Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 539.3
№ 590, 2003, с. 49-54

Применение метода граничных элементов к расчету вынужденных колебаний упругих тел конечных размеров с трещинами

А. А. Бобылев, Ю. А. Доброва
Днепропетровский национальный университет, Украина

The problems of the boundary element method practical realization for calculating forced vibrations of elastic finite cracked bodies have been considered. Comparative analysis of calculating effective using various integral representations of solution was executed.

Во многих случаях причиной разрушения конструкций является внезапное развитие трещин при действии динамических нагрузок. В связи с этим, актуальным является исследование задач динамической механики разрушения. При решении данного класса задач применение аналитических методов ограничивается задачами о трещинах в бесконечных или полубесконечных телах [1]. Для расчета вынужденных колебаний тел конечных размеров с трещинами применяются численные методы. В работе [1] приведено решение для прямоугольной пластины с произвольно ориентированной трещиной, полученное на основе метода конечных элементов (МКЭ). При использовании МКЭ возникает проблема построения сетки с локальным измельчением вблизи вершины трещины. Поэтому более перспективным является применение метода граничных элементов (МГЭ), который не требует дискретизации всего тела. Граничные интегральные уравнения для задач установившихся колебаний получены в монографии [2]. Постановка динамических задач для тел конечных размеров с трещинами рассмотрена в [3]. В настоящей работе рассмотрены вопросы практической реализации вычислительного алгоритма метода граничных элементов в пространстве трансформант Фурье для плоских тел конечных размеров с трещинами при смешанных граничных условиях на поверхности тела и проведен сравнительный анализ вычислительной эффективности использования различных интегральных представлений решения.

Пусть невесомое упругое однородное изотропное тело занимает конечную область Ω с границей Γ и содержит трещину (разрез) в форме незамкнутой двусторонней кривой Ляпунова Γ_t. Под $u_i(x,t)$, $\varepsilon_{ij}(x,t)$, $\sigma_{ij}(x,t)$ будем понимать соответственно компоненты вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений в точке $x \in \Omega$ в момент времени t. Перемещения и деформации считаются малыми. Напряжения в начальном недеформированном состоянии отсутствуют. Будем полагать, что объемные силы, действующие на тело Ω, также отсутствуют. Скорости распространения продольных и поперечных волн в области Ω обозначаются C_1 и C_2 соответственно.

Поверхность тела Γ состоит из двух непересекающихся частей $\Gamma = \Gamma_q \cup \Gamma_u$. На части поверхности Γ_u заданы перемещения $\vec{g}(x,t)$, на части поверхности Γ_q – усилия $\vec{q}(x,t)$, а к берегам трещины Γ_t приложены усилия $\vec{p}(x,t)$. Функции $\vec{g}(x,t)$, $\vec{q}(x,t)$ и $\vec{p}(x,t)$ описывающие внешние воздействия на тело Ω, являются Т-периодическими функциями

$$\vec{g}(x,t) = \vec{g}(x,t+T); \quad \vec{q}(x,t) = \vec{q}(x,t+T); \quad \vec{p}(x,t) = \vec{p}(x,t+T).$$

Задача состоит в определении полей перемещений $u_i(x,t)$, деформаций $\varepsilon_{ij}(x,t)$ и напряжений $\sigma_{ij}(x,t)$, удовлетворяющих уравнению движения

$$(C_1^2 - C_2^2)u_{i,ij} + C_2^2 u_{j,ii} = \ddot{u}_j, \tag{1}$$

соотношениям Коши, закону Гука и условиям периодичности

$$\vec{u}(x,t) = \vec{u}(x,t+T), \qquad \frac{\partial \vec{u}(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial \vec{u}(x,t+T)}{\partial t}, \quad \forall x \in \Omega, \tag{2}$$

а также граничным условиям на поверхности тела Γ и берегах трещины.

Применив к сформулированной начально-граничной задаче преобразование Фурье, получим набор граничных задач в пространстве трансформант Фурье

$$\begin{gathered}
(C_1^2 - C_2^2)\overline{u}^n_{i,ij} + C_2^2 \overline{u}^n_{j,ii} + \omega_k^2 \overline{u}^n_j = 0, \\
\overline{\sigma}^n_{ij}(x,\omega_k)\nu_j(x) = \overline{q}_i(x,\omega_k), \quad \forall x \in \Gamma_q, \quad \overline{u}^n_i(x,\omega_k) = \overline{g}_i(x,\omega_k), \quad \forall x \in \Gamma_u, \\
\overline{\sigma}^+_{ij}(x,\omega_k)\nu^+_j(x) = -\overline{\sigma}^-_{ij}(x,\omega_k)\nu^-_j(x) = \overline{p}_i(x,\omega_k), \quad \forall x \in \Gamma_t, \ \omega_k = \frac{2\pi}{T}k,
\end{gathered} \tag{3}$$

где k = 1, 2… – номер гармоники ряда Фурье.

Для решения граничной задачи (3) в пространстве трансформант Фурье применяется метод граничных интегральных уравнений (ГИУ). Для построения системы ГИУ используется фундаментальное решение уравнений движения в пространстве трансформант Фурье, которое для плоской деформации имеет вид [4]

$$U_{ij}(x,\xi,\omega_k) = \frac{1}{2\pi\rho C_2^2}\left[\psi\delta_{ij} - \chi r_{,i} r_{,j}\right], \tag{4}$$

где $\psi = -\dfrac{\pi}{2}\left\{-Y_0(l_2) + \dfrac{1}{l_2}\left[Y_1(l_2) - \dfrac{C_2}{C_1}Y_1(l_1)\right]\right\}$, $\chi = -\dfrac{\pi}{2}\left[Y_2(l_2) - \dfrac{C_2}{C_1}Y_2(l_1)\right]$,

$$r^2 = (x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2, \quad r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i - \xi_i}{r} = \frac{r_i}{r}, \quad l_i = \frac{\omega_k r}{C_i}.$$

Здесь $Y_n(l_i)$ – функция Бесселя второго рода порядка n.

Введем обобщенные граничные потенциалы для задачи в пространстве трансформант Фурье

$$U_i^k(\varphi,x,S)=\int\limits_S U_{ij}(x,\xi,\omega_k)\varphi_j(\xi,\omega_k)dS\,, \tag{5}$$

$$K_i^k(\varphi,x,S)=\int\limits_S K_{ij}(x,\xi,\omega_k)\varphi_j(\xi,\omega_k)dS\,, \tag{6}$$

$$W_i^k(\psi,x,S)=\int\limits_S W_{ij}(x,\xi,\omega_k)\psi_j(\xi,\omega_k)dS\,, \tag{7}$$

$$F_i^k(\psi,x,S)=\int\limits_S F_{ij}(x,\xi,\omega_k)\psi_j(\xi,\omega_k)dS. \tag{8}$$

Здесь $U_{ij}(x,\xi,\omega_k)$ – фундаментальное решение, определяемое выражением (4); φ, ψ – плотности потенциалов простого и двойного слоя соответственно; S – кривая Ляпунова класса $C^{1,\alpha}$, $0<\alpha<1$. Схема построения ядер потенциалов (6)-(8) и свойства обобщенных потенциалов приведены например, в монографии [2].

Для построения системы ГИУ использовались два подхода: прямой, на основе аналога формулы Сомильяны, и непрямой, на основе общих положений теории потенциала. В обоих случаях трещины моделируются потенциалом двойного слоя. В работе рассмотрены четыре варианта ГИУ непрямых формулировок метода граничных элементов в пространстве трансформант Фурье:

1) $U_i^k(\varphi,x,\Gamma_u)+U_i^k(\varphi,x,\Gamma_q)+W_i^k(\psi,x,\Gamma_t)=\overline{g}_i(x,\omega)\,,\quad \forall x\in\Gamma_u,$

$1/2\varphi_i(x,\omega)+K_i^k(\varphi,x,\Gamma_u)+K_i^k(\varphi,x,\Gamma_q)+F_i^k(\psi,x,\Gamma_t)=\overline{q}_i(x,\omega)\,,\quad \forall x\in\Gamma_q,$

$K_i^k(\varphi,x,\Gamma_u)+K_i^k(\varphi,x,\Gamma q)+F_i^k(\psi,x,\Gamma_t)=\overline{p}_i(x,\omega)\,,\quad \forall x\in\Gamma_t.$

2) $1/2\psi_i(x,\omega)+W_i^k(\psi,x,\Gamma_u)+W_i^k(\psi,x,\Gamma_q)+W_i^k(\psi,x,\Gamma_t)=\overline{g}_i(x,\omega)\,,\quad \forall x\in\Gamma_u,$

$F_i^k(\psi,x,\Gamma_u)+F_i^k(\psi,x,\Gamma_q)+F_i^k(\psi,x,\Gamma_t)=\overline{q}_i(x,\omega)\,,\quad \forall x\in\Gamma_q,$

$F_i^k(\psi,x,\Gamma_u)+F_i^k(\psi,x,\Gamma_q)+F_i^k(\psi,x,\Gamma_t)=\overline{p}_i(x,\omega)\,,\quad \forall x\in\Gamma_t.$

3) $1/2\psi_i(x,\omega)+W_i^k(\psi,x,\Gamma_u)+U_i^k(\varphi,x,\Gamma_q)+W_i^k(\psi,x,\Gamma_t)=\overline{g}_i(x,\omega)\,,\ \forall x\in\Gamma_u,$

$1/2\varphi_i(x,k)+F_i^k(\psi,x,\Gamma_u)+K_i^k(\varphi,x,\Gamma_q)+F_i^k(\psi,x,\Gamma_t)=\overline{q}_i(x,\omega)\,,\quad \forall x\in\Gamma_q,$

$F_i^k(\psi,x,\Gamma_u)+K_i^k(\varphi,x,\Gamma_q)+F_i^k(\psi,x,\Gamma_t)=\overline{p}_i(x,\omega)\,,\quad \forall x\in\Gamma_t.$

4) $1/2\psi_i(x,\omega)+U_i^k(\psi,x,\Gamma_u)+W_i^k(\varphi,x,\Gamma_q)+W_i^k(\psi,x,\Gamma_t)=\overline{g}_i(x,\omega)\,,\ \forall x\in\Gamma_u,$

$1/2\varphi_i(x,k)+K_i^k(\psi,x,\Gamma_u)+F_i^k(\varphi,x,\Gamma_q)+F_i^k(\psi,x,\Gamma_t)=\overline{q}_i(x,\omega)\,,\quad \forall x\in\Gamma_q,$

$$K_i^k(\psi,x,\Gamma_u)+F_i^k(\varphi,x,\Gamma_q)+F_i^k(\psi,x,\Gamma_t)=\overline{p}_i(x,\omega)\,,\ \forall x\in\Gamma_t. \tag{9}$$

Неизвестными в приведенных системах ГИУ будут значения потенциала простого слоя $\vec{\varphi}$ и двойного слоя $\vec{\psi}$, причем на берегах трещины Γ_t значение ψ_n равно раскрытию трещины.

Для прямой формулировки МГЭ в пространстве трансформант Фурье с учетом свойств обобщенных потенциалов можно построить два варианта систем ГИУ:

$$
\begin{aligned}
1)\;& U_i^k(\overline{q},x,\Gamma_u)-W_i^k(\overline{u},x,\Gamma_q)-W_i^k(\Delta\overline{u},x,\Gamma_t)=\\
&=1/2\,\overline{g}_i(x,\omega_k)+W_i^k(g,x,\Gamma_u)-U_i^k(q,x,\Gamma_q)-U_i^k(p,x,\Gamma_t),\quad \forall x\in\Gamma_u,\\
& 1/2\,\overline{u}_i(x,\omega_k)+W_i^k(\overline{u},x,\Gamma_q)+W_i^k(\Delta\overline{u},x,\Gamma_t)-U_i^k(\overline{q},x,\Gamma_u)=\\
&=U_i^k(q,x,\Gamma_q)+U_i^k(p,x,\Gamma_t)-W_i^k(g,x,\Gamma_u),\qquad \forall x\in\Gamma_q\cup\Gamma_t,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2)\;& 1/2\,\overline{q}_i(x,\omega_k)+F_i^k(\overline{u},x,\Gamma_q)+F_i^k(\Delta\overline{u},x,\Gamma_t)-K_i^k(\overline{q},x,\Gamma_u)=\\
&=K_i^k(q,x,\Gamma_q)+K_i^k(p,x,\Gamma_t)-F_i^k(g,x,\Gamma_u),\qquad \forall x\in\Gamma_u,\\
& K_i^k(\overline{q},x,\Gamma_u)-F_i^k(\overline{u},x,\Gamma_q)-F_i^k(\Delta\overline{u},x,\Gamma_t)=\\
&=1/2\,q_i(x,\omega_k)+F_i^k(g,x,\Gamma_u)-K_i^k(q,x,\Gamma_q)-K_i^k(p,x,\Gamma_t),\quad \forall x\in\Gamma_q,\\
& K_i^k(\overline{q},x,\Gamma_u)-F_i^k(\overline{u},x,\Gamma_q)-F_i^k(\Delta\overline{u},x,\Gamma_t)=\\
&=1/2\,p_i(x,\omega_k)+F_i^k(g,x,\Gamma_u)-K_i^k(q,x,\Gamma_q)-K_i^k(p,x,\Gamma_t),\forall x\in\Gamma_t \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Неизвестными функциями в обоих вариантах системы ГИУ являются трансформанты вектора поверхностных усилий $\overline{q}_i$ на участке границы Γ_u, трансформанты вектора перемещений $\overline{u}_i$ на участке границы Γ_q и трансформанты разрыва перемещений $\Delta\overline{u}$ на берегах трещины Γ_t.

Для численного решения систем ГИУ применяется МГЭ с дискретизацией уравнений методом коллокации. В качестве граничных элементов используются одноузловые элементы с постоянной аппроксимацией неизвестных функций. Полученная в результате дискретизации система линейных алгебраических уравнений решается методом Гаусса.

Ядра граничных потенциалов в пространстве трансформант Фурье представляют собой сложные соотношения, содержащие цилиндрические функции (функции Неймана). Если для вычисления функций χ и ψ использовать стандартные подпрограммы, то при $0<l_i<0{,}5$, i=1, 2, происходит потеря точности при вычитании близких чисел. Поэтому используются разложения функций $Y_n(l_i)$ в ряды [5], которые сходятся во всей плоскости комплексного переменного. При практических расчетах можно ограничиться 6 членами ряда. Ядра граничных потенциалов для задачи в изображениях имеют тот же порядок особенностей, что и в случае граничных потенциалов в задачах статической теории упругости. Рассмотрены интегралы

со слабой особ
несобственные, ин
главного значения
смысле конечной
системы граничных
Если точка коллок
вычисляемый по
определяется численн
коллокации принад
имеет особенность

При проведени
рассматривалась з
прямолинейной вер
плоской деформаци

Вычисления про
сравнении значени
интегральных предс
элементной сетке о
трещины – на 1,1
резонансным, расхо

В табл. 1 привед
различных граничн
Таблица 1

Количество ГЭ на берегах трещины
Количество ГЭ на поверхности диска
100
250
500
750
1000

Значения физичес
принимались следую
удельная плотность
нормальные напряж
поверхности трещин
R/3.

Проведенные выч
работе алгоритм
вынужденных колеб
полученных результ
чисел вне резона
представления решен

со слабой особенностью логарифмического типа, вычисляемые как несобственные, интегралы с сильной особенностью, определяемые в смысле главного значения по Коши, и гиперсингулярные интегралы, рассматриваемые в смысле конечной части по Адамару. Вычисление интегралов, входящих в системы граничных интегральных уравнений , производится двумя способами. Если точка коллокации не принадлежит граничному элементу, то интеграл, вычисляемый по этому элементу, является регулярным и его значение определяется численно с помощью квадратурных формул Гаусса. Если же точка коллокации принадлежит граничному элементу, то интеграл по этому элементу имеет особенность и вычисляется аналитически.

При проведении вычислительных экспериментов в качестве модельной рассматривалась задача о вынужденных колебаниях круглого диска с прямолинейной вертикальной трещиной конечной длины в центре в условиях плоской деформации.

Вычисления производились для разных обобщенных волновых чисел. При сравнении значений нормального раскрытия трещины для различных интегральных представлений решения результаты на одной и той же гранично-элементной сетке отличались не более, чем на 1,7 %, а сдвигового раскрытия трещины – на 1,1 %. Отметим, что при приближении частот колебаний к резонансным, расхождение результатов увеличивается.

В табл. 1 приведены значения нормального раскрытия в центре трещины для различных гранично-элементных сеток.

Таблица 1

Количество ГЭ на берегах трещины	10	25	50	75	100
Количество ГЭ на поверхности диска					
100	$2{,}454 \cdot 10^{-5}$	$2{,}354 \cdot 10^{-5}$	$2{,}312 \cdot 10^{-5}$	$2{,}301 \cdot 10^{-5}$	$2{,}294 \cdot 10^{-5}$
250	$2{,}363 \cdot 10^{-5}$	$2{,}269 \cdot 10^{-5}$	$2{,}230 \cdot 10^{-5}$	$2{,}217 \cdot 10^{-5}$	$2{,}210 \cdot 10^{-5}$
500	$2{,}325 \cdot 10^{-5}$	$2{,}232 \cdot 10^{-5}$	$2{,}194 \cdot 10^{-5}$	$2{,}181 \cdot 10^{-5}$	$2{,}174 \cdot 10^{-5}$
750	$2{,}306 \cdot 10^{-5}$	$2{,}213 \cdot 10^{-5}$	$2{,}175 \cdot 10^{-5}$	$2{,}163 \cdot 10^{-5}$	$2{,}156 \cdot 10^{-5}$
1000	$2{,}291 \cdot 10^{-5}$	$2{,}200 \cdot 10^{-5}$	$2{,}164 \cdot 10^{-5}$	$2{,}154 \cdot 10^{-5}$	$2{,}147 \cdot 10^{-5}$

Значения физических и геометрических параметров при проведении расчетов принимались следующими: модуль Юнга $2 \cdot 10^6$ МПа, коэффициент Пуассона 0,3, удельная плотность 7800 кг/м^3, обобщенное волновое число $k_1 = \omega / C_1$ = 0,16, нормальные напряжения на границе диска q = 25 МПа, нормальные усилия на поверхности трещины p = 25 МПа, радиус диска R = 6 м, длина трещины L = R/3.

Проведенные вычислительные эксперименты показали, что рассмотренный в работе алгоритм может быть эффективно использован при анализе вынужденных колебаний упругих тел конечных размеров с трещинами. Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод, что при значениях волновых чисел вне резонансных областей рассмотренные выше интегральные представления решения дают примерно одинаковую точность.

В дальнейшем разработанные вычислительные алгоритмы могут быть использованы для исследования вынужденных колебаний упругих тел конечных размеров с трещинами при учете контакта берегов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Партон В.З., Борисковский В.Г. Динамическая механика разрушения. – М.: Машиностроение, – 1985. – 264с.
2. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. М.: Физмат-гиз, – 1963. – 472 с.
3. Гузь А.Н., Зозуля В.В. Неклассические проблемы механики разрушения. – К.: Наукова думка, – 1993. – Т. 4, кн. 2. – 237 с.
4. Cruse T.A., Rizzo F.J. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem // J. Math. Anal. Appl. – 1968. – 22, N1. – P. 244–259.
5. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. – М.-Л.: Физ-матгиз, – 1963. – 358 с.