

О влиянии толщины трехмерного вихревого слоя на его устойчивость¹⁾

П. Р. Андронов, С. Я. Герценштейн, Г. Я. Дынникова, Х. Исванд
 НИИ механики МГУ, Россия

The dynamics of 2D and 3D free vortical layers with finite thickness when they are presented as one or several parallel chains of discrete vortices is investigated. The influence of the number of the chains on the stability characteristics of the layer is revealed. The results are compared with the exact solution of the linear theory of hydrodynamic stability for the shear layer of finite thickness. The possibility of approximate taking into account the finite thickness of the layer is investigated.

1. Введение. Широкий класс важных прикладных проблем связан с необходимостью моделирования гидродинамических течений, содержащих вихревые слои. Во многих случаях для этих целей применяется метод дискретных вихрей [1-3], в соответствии с которым вихревой слой моделируется цепочкой точечных вихрей или совокупностью вихревых отрезков. Известно, что цепочки точечных вихрей и совокупности вихревых отрезков при описании их движения по закону Био-Савара всегда неустойчивы, в отличие от реально наблюдаемых вихревых слоев [4-5], и что для их адекватного моделирования должна учитываться толщина слоя. В работе [6] было показано, что вихревой слой толщины b устойчив к коротковолновым возмущениям с длиной волны $\lambda < 5b$ и неустойчив к возмущениям с большей длиной волны. В данной статье рассматриваются два способа учета толщины вихревого слоя. Первый, основанный на представлении слоя в виде нескольких подслоев, можно назвать прямым моделированием толщины слоя. Он требует существенного увеличения времени расчета по сравнению с обычным методом, так как при его использовании вместо одного набора дискретных вихрей рассматриваются несколько. Тем не менее, в случае двумерных течений данный метод может иметь практическое значение в связи с его простой идеологией и быстрым развитием вычислительной техники. Идея моделирования слоя несколькими цепочками вихрей высказывалась и ранее [2]. В данной работе впервые проанализированы характеристики устойчивости такой модели.

Второй способ представляет собой обобщение подхода, предложенного в работе [7], на случай трехмерной вихревой пелены. В [7] показано, что скорость геометрической серединной линии в двумерном слое конечной толщины не совпадает со скоростью движения частиц жидкости, лежащих на этой линии, если толщина слоя переменна. Предложенная поправка к индуцированной скорости движения вихрей обеспечивает устойчивость слоя к мелкомасштабным возмущениям.

Рассматривались следующие задачи.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 02-01-00670).

2. Задача "а". Двумерный бесконечный вихревой слой, разделяющий два потока со скоростями, противоположными по направлению и равными V по модулю, моделировался двумя или более цепочками вихрей. В начальный момент задавалось периодическое синусоидальное поперечное возмущение малой амплитуды. Расстояния между вихрями h вдоль и поперек слоя брались одинаковыми. Далее рассматривалась эволюция слоя в предположении сохранения периодичности. Для определения инкремента возрастания амплитуды возмущения n при заданном отношении толщины слоя b к длине волны λ вычислялось положение геометрической средней линии слоя. На рис. 1 изображено положение вихрей в семи цепочках в момент времени $t = \lambda / (2V)$. Сплошной линией изображено положение средней геометрической линии слоя. Из приведенных данных хорошо видно, что положение геометрической средней линии в общем случае не совпадает с положением частиц жидкости, первоначально находившихся на ней (в данном случае - со средней цепочкой). Это происходит из-за смещения границ слоя при его неоднородной толщине и приводит к его устойчивости в случае, когда отношение толщины слоя к длине волны достаточно велико. На рис. 2 представлены полученные в результате расчета зависимости обезразмеренного инкремента n роста амплитуды синусоидального возмущения от $k b$, где $k = 2\pi / \lambda$, $b = I h$, I -число цепочек, для $I = 1, 2$ и 6 (значки). Там же сплошной линией изображена зависимость $n(k)$, полученная Рэлеем [6], а штрихами изображена кривая [7], полученная при использовании регуляризирующей поправки. Видно, что при использовании однократной цепочки происходит неограниченное возрастание степени неустойчивости по мере уменьшения длины волны. При моделировании слоя конечной толщины двумя и более цепочками характеристики устойчивости оказываются близкими к реальным.

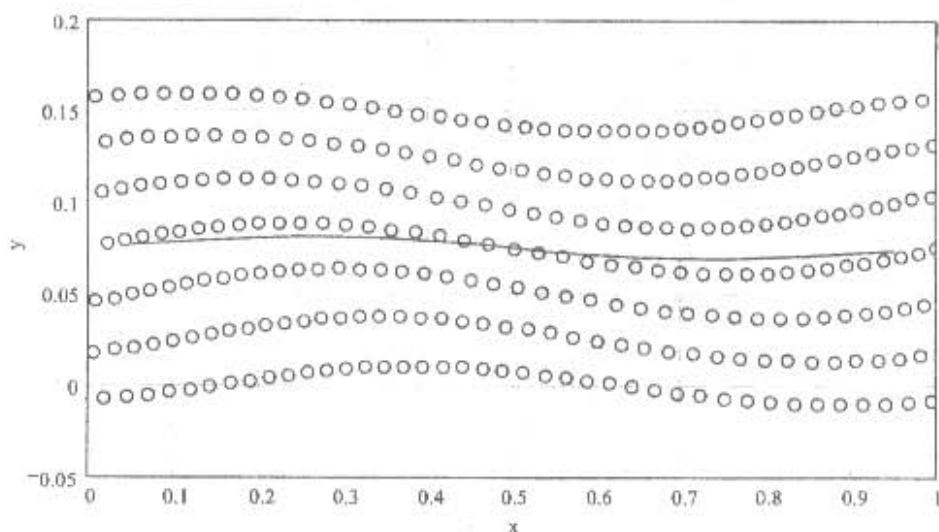


Рис. 1. Положение вихрей в семи цепочках при $t = \lambda / (2V)$; $\lambda / b = 5, 7$

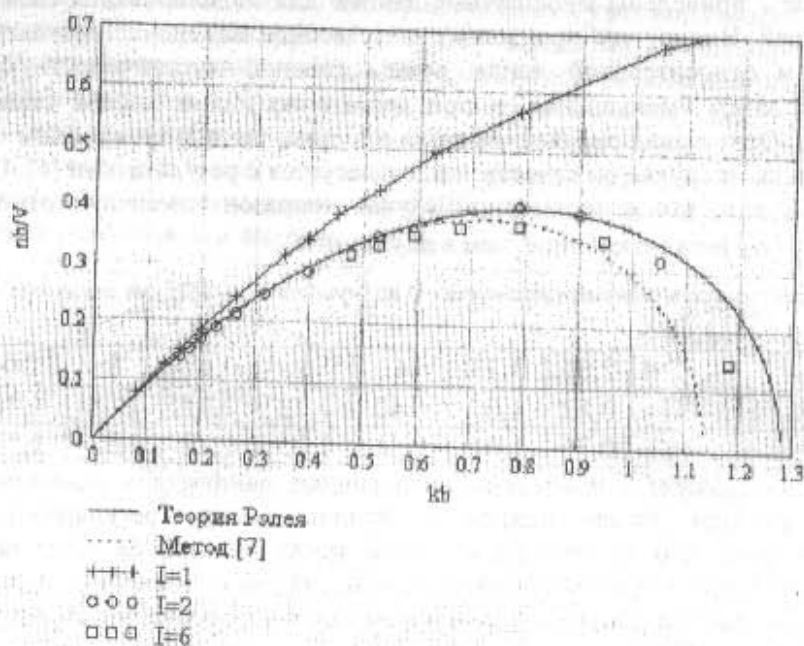


Рис. 2. Зависимость инкремента возрастания волн от волнового числа

3. Задача "б". При моделировании эволюции трехмерного вихревого слоя рассматривалось аналогичное поперечное синусоидальное начальное возмущение. Но, в отличие от задачи "а", рассматривалась не постоянная, а квадратичная зависимость начальной амплитуды возмущения вихревых линий от третьей координаты z с максимальным значением амплитуды при $z = 0$. В области отрицательности квадратичной функции амплитуда полагалась равной 0. При этом криволинейная вихревая линия аппроксимировалась ломаной. Число рядов вихрей I принимало значения 1 и 2. Длина невозмущенного звена ломаной равнялась расстоянию h между вихрями по двум другим направлениям. Шаг по времени был равен $\Delta t = 0,2 h / V$. В таблице 1 приведены полученные в результате расчета отношения амплитуды возмущений a_1 в момент безразмерного времени $t = 0,25$ к начальной амплитуде a_0 при различных относительных длинах волн в случае, когда вихревой слой моделируется одним рядом вихрей. Для сравнения приведены данные двумерного и трехмерного расчета, причем в трехмерном случае амплитуда считалась в сечении $z = 0$, где она максимальна. Как и на рис. 2, наблюдается монотонный рост степени неустойчивости с уменьшением длины волны, причем результаты для трехмерного и для двумерного случая достаточно близки.

Таблица 1. Зависимость отношения амплитуд возмущений a_1 / a_0 от величины λ / b в случае одного ряда вихрей

λ / b	3,33	4	5	6,67	10
плоский слой	5,15	4,21	3,25	2,30	1,62
трехмерный слой	5,14	4,20	3,24	2,29	1,62

В таблице 2 приведены аналогичные данные для моделирования слоя двумя рядами вихрей. Видно, что произошло качественное изменение результатов: с уменьшением относительной длины волны степень неустойчивости сначала нарастает, а затем уменьшается, и при достаточно малых λ слой становится устойчивым. Этот вывод справедлив как в плоском, так и в трехмерном случае, причем в плоском случае он качественно согласуется с результатами [6]. Однако следует отметить, что в трехмерном случае диапазон изменения отношения амплитуд a_1/a_0 несколько шире, чем в двумерном.

Таблица 2. Зависимость отношения амплитуд возмущений a_1/a_0 от величины λ/b в случае двух рядов вихрей

λ/b	2,86	3,33	4	5	6,67	8	10
плоский слой	0,82	1,07	1,40	1,72	1,72	1,65	1,46
трехмерный слой	0,76	1,01	1,51	1,85	1,79	1,57	1,51

Наконец, в таблице 3 приведены аналогичные данные для моделирования слоя однократным рядом вихрей с использованием регуляризирующей поправки. Видно, что в этом случае слой также становится устойчивым с уменьшением относительной длины волны, причем значения отношения амплитуд возмущений близки к полученным при моделировании двумя рядами вихрей.

Таблица 3. Зависимость отношения амплитуд возмущений a_1/a_0 от величины λ/b в случае одного ряда вихрей с приближенным учетом толщины слоя

λ/b	2,86	3,33	4	5	6,67	8	10
плоский слой	0,77	1,14	1,39	1,46	1,59	1,51	1,34
трехмерный слой	0,75	1,12	1,38	1,45	1,59	1,51	1,34

4. Задача "в". При моделировании эволюции участка свободного трехмерного вихревого слоя, имеющего форму квадрата, задавалось начальное поперечное смещение одной вершины вихревой сетки (рис. 3 (а)). Вне рассматриваемого квадрата слой считался невозмущенным. Шаг вихревой сетки h до внесения возмущений был выбран постоянным и одинаковым по обоим направлениям. Шаг по времени был равен $\Delta t = 0,02 h/V$. Время счета составляло 80 шагов. При вычислении текущего смещения каждой вершины к вектору индуцированной скорости добавлялась поправка, имеющая вид: $\vec{W} = 0,25(\vec{\gamma} \times \text{grad } b)$. Эта поправка позволяет приблизительно учесть тот же эффект, который был виден на рис. 1 (смещение срединной поверхности вихревого слоя относительно ряда вихрей, замороженного в среду). Если связать локальную систему координат с вихревой поверхностью, то вывод данной формулы в трехмерном случае аналогичен приведенному в [7] для плоского случая. Толщина b каждого участка слоя в процессе движения изменяется. Начальная толщина задавалась равной $2h$. Вследствие несжимаемости жидкости произведение толщины на площадь участка остается постоянным и равным первоначально заданному значению. Это позволяет вычислять толщину участков на каждом временном шаге. На рис. 3 (б) показана форма вихревой пелены в момент окончания счета, полученная без учета поправки, а на рис. 3 (в)

– с учетом поправки. Видно, что приближенный учет конечности толщины слоя позволил и в трехмерном случае адекватно смоделировать реально наблюдаемую его устойчивость к мелкомасштабным возмущениям.

5. Заключение. Учет толщины вихревого слоя как путем прямого моделирования набором вихревых цепочек, так и с помощью предложенной в работе поправки к скорости движения вихрей позволит более адекватно, по сравнению с обычным вариантом МДВ, моделировать процессы, связанные с потерей устойчивости вихревых слоев.

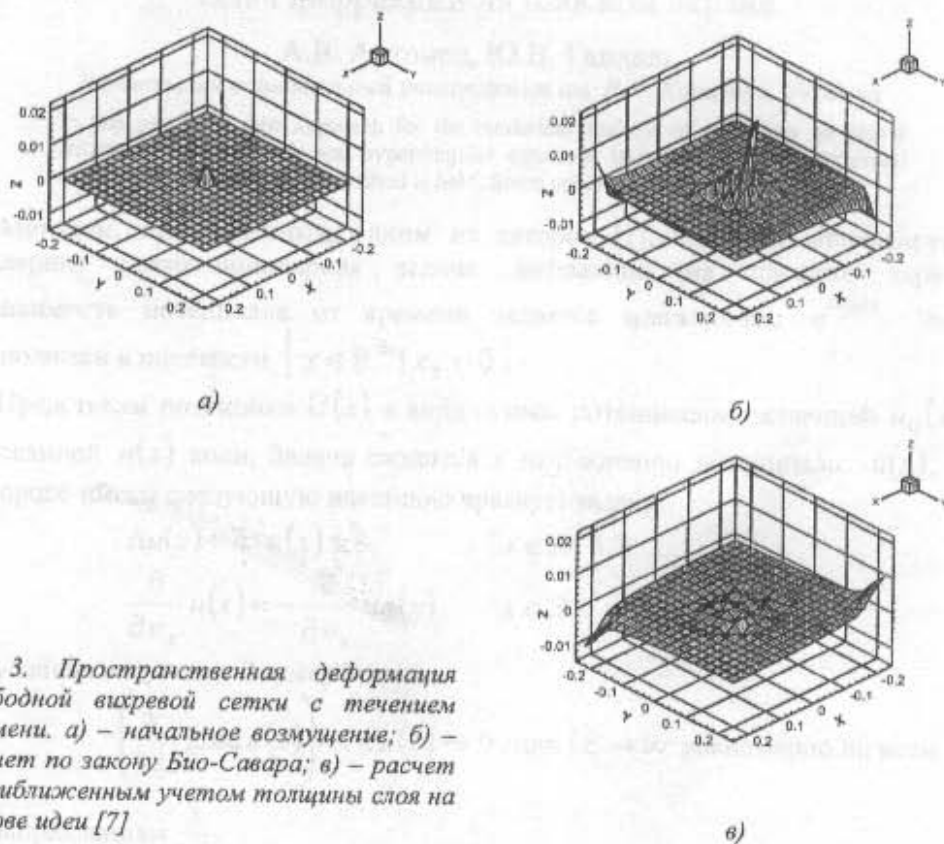


Рис. 3. Пространственная деформация свободной вихревой сетки с течением времени. а) – начальное возмущение; б) – расчет по закону Био-Савара; в) – расчет с приближенным учетом толщины слоя на основе идеи [7]

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. – Москва: Наука, – 1978. – 352 с.
2. Сарпкаяя Т. Вычислительные методы вихрей. Фримановская лекция (1988). // Современное машиностроение, серия А. – 1989. – № 10. – С. 1-60.
3. Белоцерковский С.М., Гиневский А.С. Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей. – Москва: Физико-математическая литература, – 1995. – 386 с.
4. Бетчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. – Москва: Мир, – 1971. – 350 с.
5. Герценштейн С.Я. Гидродинамическая турбулентность и неустойчивость. // Материалы юбилейной конференции. В сборнике "Аэромеханика и

- космические исследования". – Москва: Издательство ЦНИИС, – 2002. – С. 44-52.
6. Рэлей Д. Теория звука. Том 1. – Москва: Гостехиздат, – 1955. – 503 с.
 7. Дынникова Г.Я. Моделирование свободного сдвигового течения методом непрерывного вихревого слоя. // Известия РАН, механика жидкости и газа. – 1999. – № 1. – С. 42-50.