

Метод дискретных особенностей в задачах теории глиссирования

С. А. Довгий, М. В. Макасеєв

Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт», Украина

The statement and method of the solution of some main problems of the two-dimensional theory of a steady planing on a surface of a heavy fluid is presented. The problems are reduced to systems of singular integral equations with unknown limits of integrating (unknown lengths of wetted sections of glider's surfaces). The numerical solution of systems is implemented by a method of discrete singularities. The non-linear problem on definition of wetted lengths is decided by a method of series minimization. As an example the results of the numerical solution of a problem on motion of a glider with given load and center of gravity position and unknown angle of a course are presented.

К решению задач теории глиссирования в настоящее время широко применяется метод интегральных уравнений. Это связано главным образом с имеющейся аналогией с теорией крыла в безграничном потоке, где метод интегральных уравнений сейчас уже является основным методом исследований. Однако в теории глиссирования есть свои характерные особенности, обусловленные эффектами влияния свободной поверхности и силы тяжести. В частности, неизвестна область контакта тела с жидкостью, что делает задачу изначально нелинейной. Применение метода дискретных особенностей как наиболее простого и эффективного метода численного решения сингулярных интегральных уравнений позволило успешно решить известные и ряд новых задач теории глиссирования.

В конструкциях современных быстроходных глиссирующих судов и в других технологических приложениях явления глиссирования используют эффекты снижения сопротивления за счет уменьшения области контакта путем создания многореданных и многопрофильных поверхностей, а также управление гидродинамическими характеристиками путем поддува или отсоса газа или жидкости в межпрофильное или межреданной пространство. Поэтому в настоящей работе постановка и метод решения двумерной задачи о глиссировании дается коротко в достаточно общем виде – для системы профилей.

1. Постановка задачи о глиссировании

Пусть система произвольного числа N слабо изогнутых профилей движется с постоянной скоростью V_0 по поверхности жидкости в отрицательном направлении оси x , совпадающей при $x \rightarrow -\infty$ с невозмущенным уровнем свободной поверхности. Жидкость предполагается идеальной, несжимаемой, возмущенное течение потенциально, граничные условия записываются в

предположениях теор
связанной с системой
возмущенной скорос

кинематическому усл

динамическому услови

условию затухания воз

При $x \rightarrow -\infty$ могут

малой амплитуды:

где φ_0 – потенциал нез

В условиях (2) и (3)

профилей, $\eta_k(x)$ – ф

между профилями сист

смоченных границ пр

$v = 1/Fr^2$, $Fr = V_0/\sqrt{g}$

– характерный линейн

Характерный линей

определяется по объёмн

$a = \sqrt[3]{V}$, а $V = \Delta/\rho g$,

воды. В случае систем

характерная нагрузка –

профиль.

Давление в жидкости

$p(x, y) = -\varphi_x(x, y) - \rho y$

профилей обозначим $\gamma_k(x)$

$$\gamma(x) = \begin{cases} \gamma_k(x), & x \in \Sigma_k \\ 0, & x \in \Sigma_0 \end{cases}$$

С учетом принятых об

всю ось x :

$$\varphi_y(x, -0) = \gamma(x)$$

$$\varphi_x(x, -0) = -v$$

Соотношения (6) и (7)

кромок профилей, где обр

предположениях теории волн малой амплитуды [1]. В системе координат, связанной с системой необходимо найти в нижней полуплоскости потенциал возмущенной скорости $\varphi(x, y)$, удовлетворяющий уравнению Лапласа

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad y < 0, \quad (1)$$

кинематическому условию гладкого обтекания профилей

$$\varphi_y(x, -0) = f'_k(x), \quad x \in S_k, \quad k = \overline{1, N}, \quad (2)$$

динамическому условию отсутствия перепада давления на свободной границе

$$\varphi_x(x, -0) = -v\eta_k(x), \quad x \in \Sigma_k, \quad k = \overline{1, N+1}, \quad (3)$$

условию затухания возмущенной скорости в глубине на бесконечности

$$\varphi_x, \varphi_y \rightarrow 0, \quad y \rightarrow -\infty. \quad (4)$$

При $x \rightarrow -\infty$ могут быть заданы независимые от профилей свободные волны малой амплитуды:

$$\varphi(x, y) = V_0 x + \varphi_0(x, y), \quad x \rightarrow -\infty, \quad (5)$$

где φ_0 – потенциал независимых волн.

В условиях (2) и (3) $f_k(x)$ – функции, задающие форму смоченной границы профилей, $\eta_k(x)$ – функции, описывающие форму свободной поверхности между профилями системы и вне системы, S_k и Σ_k – проекции соответственно смоченных границ профилей и участков свободных границ на ось x , $v = 1/Fr^2$, $Fr = V_0/\sqrt{ga}$ – число Фруда, V_0 – скорость движения системы, a – характерный линейный размер.

Характерный линейный размер в случае одного профиля, следуя [2], определяется по объемному водоизмещению глссера V в состоянии покоя как $a = \sqrt[3]{V}$, а $V = \Delta/\rho g$, где Δ – вес глссера (нагрузка), ρg – удельный вес воды. В случае системы профилей в качестве Δ может быть взята некоторая характерная нагрузка – суммарная, средняя, либо нагрузка на один какой-то профиль.

Давление в жидкости определяется линеаризованным интегралом Бернулли $p(x, y) = -\varphi_x(x, y) - \rho y$. Давление на смоченной поверхности каждого из профилей обозначим $\gamma_k(x) = p_k(x, -0)$, $x \in S_k$, $k = \overline{1, N}$. Пусть

$$\gamma(x) = \begin{cases} \gamma_k(x), & x \in S_k, \quad k = \overline{1, N}, \\ 0, & x \in \Sigma_k, \quad k = \overline{1, N+1}, \end{cases} \quad \eta(x) = \begin{cases} f_k(x), & x \in S_k, \quad k = \overline{1, N}, \\ \eta_k(x), & x \in \Sigma_k, \quad k = \overline{1, N+1}. \end{cases}$$

С учетом принятых обозначений граничные условия (2) и (3) продолжим на всю ось x :

$$\varphi_y(x, -0) = \eta'(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (6)$$

$$\varphi_x(x, -0) = -\gamma(x) - v\eta(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (7)$$

Соотношения (6) и (7) не выполняются в малых окрестностях передних кромок профилей, где образуются возвратные брызговые струйки. В частности,

производные η_x в точках поворота струн не существуют. Функция $\eta(x)$ описывает нулевую линию тока и имеет в передних кромках разрывы первого рода, равные расходу брызговых струек, которыми мы пренебрегаем как величинами второго порядка малости [1]. Функция $\gamma(x)$ в точках поворота струи имеет интегрируемые разрывы второго рода.

Однако если перейти от обычных функций к обобщенным [8], то соотношения (6) и (7) будут справедливыми для всех x в обобщенном смысле.

2. Системы интегральных уравнений

Для решения задачи (1), (4)–(7) воспользуемся обобщенным преобразованием Фурье. Аналогично методике [3] получим в результате

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma(s)}{x-s} ds + \frac{\nu}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(s) R(\nu, x-s) ds - \frac{i\nu}{2\pi} (Ae^{i\nu x} - \bar{A}e^{-i\nu x}) = -\eta'(x), \quad (8)$$

$$-\infty < x < \infty,$$

где $R(\nu, x) = \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x + \operatorname{Si} \nu x \right) \cos \nu x - \operatorname{Ci} \nu |x| \sin \nu x \right]$, $\operatorname{Si} x$ и $\operatorname{Ci} x$ –

интегральные синус и косинус [4], $A = A_1 + iA_2$ – комплексная константа, определяющая амплитуду свободных волн. Первый интеграл в (8) понимается в смысле главного значения.

Для системы конечного числа профилей, удовлетворяя равенство (8) в точках на проекциях профилей, получим систему сингулярных интегральных уравнений

$$\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \int_{a_j}^{a_j+l_j} \gamma_j(s) \left[\frac{1}{x-s} + \nu R(\nu, x-s) + \nu \pi \cos \nu(x-s) \right] ds = -f'_k(x) - \frac{\nu}{\pi} (A_1^* \cos \nu x + A_2^* \sin \nu x), \quad x \in S_k, \quad k = \overline{1, N}, \quad (9)$$

где a_j – абсциссы передних кромок (для определенности $a_1 = 0$), l_j – неизвестные длины смоченных участков, константы A_1^* и A_2^* определяют амплитуду независимых волн, если они заданы в (5).

В случае бесконечной периодической системы одинаковых профилей можно получить сингулярное интегральное уравнение с ядром Гильберта вида

$$\frac{1}{L} \int_0^l \gamma(s) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{L} (x-s) ds + \nu \int_0^l \gamma(s) R_{\infty}(\nu, x-s) ds = -f'(x), \quad (10)$$

где

$$R_{\infty}(\nu, x-s) = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin j \frac{x-s}{L}}{j - \nu n} =$$

$$= \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} \left(\operatorname{Si} \frac{\pi(x-s)}{L} + \operatorname{Si} \frac{\pi(x-s)}{L} \right) \right]$$

l – длина проекции с между передними кро выполняться условие

Система (9) и урав длины отрезков инт дополнительные соот Например, если все заданы нагрузки Δ_k

соотношения для коэф

$k = \overline{1, N}$, где характе нагрузке Δ . Выраз

необходимые соотноше

$$\int_{a_k}^{a_k+l_k} \gamma_k(x)$$

3. Численный метод

Применение метода уравнений вида (9), (относительно неизвестн

неизвестных l_k . Алгеб

неизвестных l_k . В вектор

$$D(l)X =$$

где D – матрица коэф

векторов неизвестных з

Элементы матрицы D за

Решение нелинейной

последовательной миним

минимума по l функции

$$U(l) = \min_x$$

4. Примеры численно

Приведем некоторые

глицсировании пластины п

хода, т.е. уравнения (9) и

$$= \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} \left(\pi - \frac{x-s}{n} \right) \cos v(x-s) - \ln 2 \left| \sin \frac{x-s}{2n} \right| \sin v(x-s) + \sum_{j=0}^{[m]} \frac{\sin j \frac{x-s}{n}}{j-m} \right],$$

l – длина проекции смоченного участка профиля, $n = L/2\pi$, L – расстояние между передними кромками соседних профилей, $L > l > 0$. При этом должно выполняться условие $m \neq 0, 1, 2, \dots$

Система (9) и уравнение (10) не замкнуты, так как содержат неизвестные длины отрезков интегрирования. Для замыкания уравнений необходимы дополнительные соотношения, зависящие от постановки конкретной задачи. Например, если все профили конечной системы не связаны между собой и заданы нагрузки Δ_k на каждом из них, то дополнительными для (9) будут соотношения для коэффициентов подъемной силы пластин $c_{y_k} = 2\Delta_k / \rho V_0^2 a^2$, $k = \overline{1, N}$, где характерная длина определяется по некоторой характерной нагрузке Δ . Выражая $c_{y_k} = 2\Delta_k / \rho V_0^2 a^2$ через давления, получим необходимые соотношения

$$\int_{a_k}^{a_k+l_k} \gamma_k(x) dx = v \Delta_k / \Delta. \quad (11)$$

3. Численный метод

Применение метода дискретных вихрей [5,6] к системе интегральных уравнений вида (9), (11) приводит к системе алгебраических уравнений относительно неизвестных значений функций $\gamma_k(x)$ в точках дискретизации и неизвестных l_k . Алгебраическая система будет нелинейной относительно неизвестных l_k . В векторном виде ее можно записать так:

$$D(l)X = B, \quad (12)$$

где D – матрица коэффициентов, X – вектор-столбец, составленный из векторов неизвестных значений функций γ_k , B – вектор правых частей. Элементы матрицы D зависят от элементов вектора l – неизвестных l_k .

Решение нелинейной системы (12) может быть найдено методом последовательной минимизации [7] как решение задачи поиска нулевого минимума по l функции

$$U(l) = \min_x (D(l)X - B)^T (D(l)X - B). \quad (13)$$

4. Примеры численного решения

Приведем некоторые результаты численного решения задачи о глассировании пластины при заданной нагрузке и свободном (неизвестном) угле хода, т.е. уравнения (9) и (11) при $N = 1$. Индексы далее опускаем. Форма

профиля $f(x) = -kx$, где $k = tg\alpha$, α – угол хода. Задается также положение проекции точки приложения внешней силы на ось абсцисс – центра тяжести. Для замыкания задачи используется дополнительное соотношение, выражающее равенство нулю суммы моментов относительно задней кромки всех сил, действующих на пластину:

$$\int_0^l \gamma(x)(l-x)dx = \Rightarrow b, (14)$$

где b – расстояние от центра тяжести до задней кромки пластины.

При $Fr \rightarrow \infty$ (или $v \rightarrow 0$) смоченная длина (рис. 1) стремится к величине $4b/3$. Это означает, что центр тяжести расположен на расстоянии $1/4$ смоченной длины от передней кромки пластины, т.е. в центре давления, соответствующем известному точному решению для глиссирующей пластины при $Fr \rightarrow \infty$. При малых скоростях хода при $Fr \rightarrow 0$ смоченная длина приближается к величине $3b$, т.е. центр тяжести лежит на расстоянии $1/3$ смоченной длины от задней кромки. Этой точке соответствует положение центра тяжести прямоугольного треугольника с малым углом α при вершине, лежащем на невозмущенном уровне свободной поверхности. Следовательно, нагрузка при предельно малых скоростях хода уравнивается почти полностью гидростатической силой. Полученные результаты для предельно малых и предельно больших чисел Фруда согласуются с выводами Л.И.Седова [1], сделанными на основе решения задачи с заданной смоченной длиной и фиксированном угле хода. Свободный угол хода (рис. 2) с увеличением скорости вначале растет, а затем уменьшается и стремится к нулю при $Fr \rightarrow \infty$. Этот результат согласуется с известными экспериментальными данными на диаграммах Г.Е.Павленко [2].

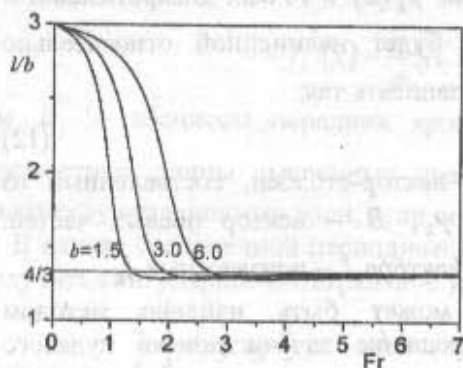


Рис.1. Зависимость смоченной длины глиссирующей пластины от числа Фруда при различных положениях центра тяжести

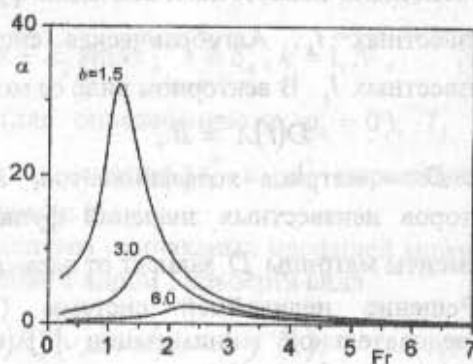


Рис.2. Зависимость угла хода глиссирующей пластины в градусах от числа Фруда при различных положениях центра тяжести

1. Седов Л.И. Плоский гидродинамический течения // В сб. "Динамика жидкостей и газов". М.: Наука, 1981. – 448 с.
2. Павленко Г.Е. Избранные труды // High speed hydrodynamics. Washington, USA, 1966. – 16–23, 2002. Cheb.
3. Янке Е., Эмде Ф., Фриш Ф. Таблицы функций. М.: Мир, 1979.
4. Белоцерковский С.А. Газодинамика крыла. М.: Наука, 1988.
5. Белоцерковский С.А. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1988.
6. Роман В.М., Макасеев М.В. Крыло конечного размаха // В сб. "Динамика жидкостей и газов". М.: Наука, 1981. – 448 с.
7. Роман В.М., Макасеев М.В. Крыло конечного размаха // В сб. "Динамика жидкостей и газов". М.: Наука, 1981. – 448 с.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
2. Павленко Г.Е. Избранные труды. – Киев: Наукова думка, – 1978. – 495 с.
3. Dovgiy S.A., Efremov I.I., Makasyeyev M.V. Some problems of a planing theory // High speed hydrodynamics / Proc. of Int. Summer Scientific School. June 16–23, 2002. Cheboksary, Russia. – Comput. Public.: Cheboksary, Russia / Washington, USA. – 2002. – Pp. 241–248.
4. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1977. – 342 с.
5. Белоцерковский С.М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. – М.: Наука, 1965, 244 с.
6. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М.: Наука, 1985, 256 с.
7. Роман В.М., Макаеев М.В. Расчет формы каверны за суперкавитирующим крылом конечного размаха // Динамика сплошной среды с нестационарными границами. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та. – 1984. – С. 103–109.