Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
№ 590, 2003, с. 124-127

УДК 519.6

Применение полиномов Фабера-Лорана к приближенному решению сингулярных интегральных уравнений

В. А. Золотаревский, И. Г. Тэрыцэ
Госуниверситет Молдовы, Молдова

The reduction method, built on the Faber-Laurent polynomial system for the aproximative solving of the singular integral equations defined on a close contour of the complex plan has been researched (investigated). The theoretical basis (substantiation) of this method in Hölder generalized spaces has been obtained.

Исследуем сингулярное интегральное уравнение (сокращенно с.и.у.)

$$Mx \equiv c(t)x(t) + \frac{d(t)}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{x(\tau)}{\tau - t}d\tau + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad t \in \Gamma, \tag{1}$$

где Γ – произвольный гладкий замкнутый контур, ограничивающий односвязную область D^{+} комплексной плоскости (считаем, что точка $z = 0 \in D^{+}$), $c(t)$, $d(t)$, $h(t,\tau)$ и $f(t)$ – известные функции, определенные на Γ, а $\varphi(t)$ – неизвестная функция.

В работе предложена вычислительная схема метода редукции, основанного на применении полиномов Фабера-Лорана, определение которых можно найти в монографии [1].

Приближенное решение уравнения (1) ищем в виде полинома

$$x_n(t) = \sum_{k=-n}^{n}\alpha_k^{(n)}\cdot t^k, \ t \in \Gamma, \ n \in N, \tag{2}$$

с неизвестными комплексными коэффициентами $\alpha_k = \alpha_k^{(n)}$, $k = \overline{-n, n}$. Эти коэффициенты определим из условия совпадения n – той частичной суммы ряда Фабера-Лорана для функции $(Mx_n)(t)$ с n – той частичной суммой этого ряда для функции $f(t)$:

$$S_n M x_n \equiv S_n f, \tag{3}$$

где через S_n обозначен оператор редукции Фабера-Лорана.

$$(S_n g)(t) = \sum_{k=0}^{n}a_k\Phi_k(t) + \sum_{k=1}^{n}b_k\cdot F_k\left(\frac{1}{t}\right), \tag{4}$$

a_k $(k = 0, 1, \ldots)$ и b_k $(k = 1, 2, \ldots)$ – коэффициенты Фабера-Лорана для функции $g(t)$, а $\Phi_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots$ и $F_k\left(\frac{1}{t}\right)$, $k = 1, 2, \ldots$ суть полиномы

Фабера-Лорана для контура Γ по неотрицательным и, соответственно, по отрицательным степеням t.

Для возможности осуществления численного эксперимента, необходимо, вместо операторного уравнения (3), получить скалярные уравнения. С этой целью введем обозначения

$$\Phi_{-k}(t) = F_k\left(\frac{1}{t}\right) \text{ и } a_{-k} = b_k,\ k = 1, 2, \ldots .$$

Тогда определение (4) принимает вид

$$(S_n g)(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k \cdot \Phi_k(t),\ t \in \Gamma, (5)$$

а неизвестный полином (2) может быть записан в форме

$$x_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} x_k^{(n)} \Phi_k(t),\ t \in \Gamma; \tag{6}$$

очевидно, коэффициенты $\alpha_k^{(n)}$, $k = \overline{-n, n}$ из формулы (2) выражаются единственным образом через $x_k^{(n)}, k = \overline{-n, n}$, посредством невырожденной матрицы (обозначим ее A); обратно, коэффициенты $x_k^{(n)}$ из (6) выражаются единственным образом через $\alpha_k^{(n)}$ из (2) посредством матрицы A^{-1}. Отметим, что матрица A определяется достаточно просто и мы не остановимся на ее выводе.

Далее будем предполагать, что приближенное решение с.и.у. (1) ищется в виде (6).

Раскрывая операторное уравнение (3), используя свойство ортогональности системы $\{\Phi_k(t)\}_{k=-n}^{n}$ и приравнивая коэффициенты при $\Phi_k(t)$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ получим, для определения неизвестных $x_k^{(n)}$, $k = \overline{-n, n}$, следующую систему линейных алгебраических уравнений (сокращенно СЛАУ):

$$\sum_{k=0}^{n} a_{j-k} x_k^{(n)} + \sum_{k=-n}^{-1} b_{j-k} x_k^{(n)} + \sum_{k=-n}^{n} A_{jk} x_k^{(n)} = f_j,\ j = \overline{-n, n}; \tag{7}$$

здесь a_j, b_j и A_{jk}, $j = 0, \pm 1, \ldots, \pm n$ – коэффициенты Фабера-Лорана функций, соответственно, $a(t) = c(t) + d(t),\ b(t) = c(t) - d(t)$ и

$$A_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} h(t, \tau) \cdot \Phi_k(\tau) d\tau,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n.$$

Мы дадим теоретическое обоснование вычислительной схемы (1), (6), (7) в пространствах обобщенных функций $H_\omega(\Gamma)$. Заметим, что в случае, когда контур Γ совпадает с единичной окружностью $\Gamma_0 = \{w : |w| = 1\}$, вычислительная схема (1), (6), (7) совпадает с классическим методом редукции по рядам Фурье и теоретическое обоснование для этого случая было проведено в работе [2] - для пространства $L_p(\Gamma_0)$, $1<p<\infty$ и в работе [3] - для гельдеровских пространств $H_\beta(\Gamma_0)$, $0<\beta<1$. (см. также монографию [4]).

Пусть $H_\omega(\Gamma)(=H_\omega)$ пространство обобщенных гельдеровских функций с нормой

$$\| g\|_\omega=\| g\|_C+H(g;\,\omega),\ \| g\|_C=\max|\, g(t)|,$$

$$H(g;\,\omega)=\sup_{\delta\in(0;\,d]}\left\{\frac{1}{\omega(\delta)}\cdot H(g;\,\delta)\right\}(<\infty),$$

$\omega(\delta)$ – произвольный модуль непрерывности, $H(g;\,\delta)$ – модуль непрерывности функции $g(t)$, $d=\operatorname{diam}D^+$.

Всюду в работе будем считать, что модуль непрерывности $\omega(\delta)$ удовлетворяет условиям Бари-Стечкина ([5]):

$$\int_0^d\frac{\omega(\xi)}{\xi}d\xi<\infty;\ \int_0^\delta\frac{\omega(\xi)}{\xi}d\xi+\int_\delta^d\frac{\omega(\xi)}{\xi}d\xi=O\big(\omega(\delta)\big)\to 0,\ \ \delta\to 0. \tag{8}$$

В таком случае (см. [5]) сингулярный оператор с ядром Коши ограничен в H_ω.

Пусть ω_1 и ω_2 - два модуля непрерывности, которые удовлетворяют условиям (8). Всюду в работе будем предполагать, что функция

$$\Phi(\delta)=\frac{\omega_2(\delta)}{\omega_1(\delta)},\ \delta\in(0;\,d],$$

неубывающая на $(0;\,d]$ и $\lim\limits_{\delta\to 0}\Phi(\delta)=0$.

В таком случае (см. [5]) выполняются условия $H_{\omega_1}\subset H_{\omega_2}$ и $\|\cdot\|_{\omega_1}\le c_1\|\cdot\|_{\omega_2}$; здесь и далее через $c_1,\,c_2,\ldots$, обозначаются вполне определенные постоянные, значения которых нас не будут интересовать.

Справедлива

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

$a(t),\,b(t)$ и $h(t,\,\tau)\in H_{\omega_1}$; $a(t)\cdot b(t)\ne 0,\ t\in\Gamma$; $\operatorname{ind}a(t)=\operatorname{ind}b(t)=0,\ t\in\Gamma$; $\dim Ker\, M=0$.

Если $\lim\limits_{\delta\to+0}\Phi(\delta)\cdot\ln^2\delta=0$, то для всех достаточно больших n, СЛАУ (7) метода редукции разрешима единственным образом.

Приближенные решения $x_n(t)$, найденные по формуле (6), при $n\to\infty$ сходятся, по норме пространства H_{ω_1}, к точному решению $x^*(t)$ с.и.у. (1) и выполняется соотношение

$$\| x^*-x_n\|_{\omega_1}=O\left(\Phi\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\ln^2 n\right).$$

Мы не будем останавливаться на доказательстве этой теоремы, а отметим только, что оно проводится по схеме близкой к предложенной в [2, 3] и опирается на следующие теоремы из теории аппроксимации функций.

Теорема 2. Пусть ω_1 и ω_2 - два модуля непрерывности для которых выполняется хотя бы одно из условий (8). Если

$$\lim_{n\to\infty}\Phi\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\ln n=0,$$

то для любой функции $g(t)\in H_{\omega_2}$,

$$\| S_n g-g\|_{\omega_1}\le c_2\cdot\Phi\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\ln n\cdot H(g;\,\omega_2).$$

Теорема 3. В условиях теоремы 2 имеет место соотношение

$$\| S_n\|_{\omega_1}\le c_3+c_4\ln n.$$

Теоремы 2 и 3, помимо приложений в теории приближенных методов, представляют и самостоятельный интерес с точки зрения конструктивной теории функций комплексного переменного.

Отметим, что результаты, установленные в теореме 1, обобщают результаты из [3], полученные там для классических пространств Гельдера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Суетин П.К. Ряды по многочленам Фабера. – М.: Наука, 1984.
2. Гохберг И.Ц., Фельдман И.А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. – М.: Наука, 1971.
3. Золотаревский В.А. О приближенных решениях систем сингулярных интегральных уравнений // Известия АН ССРМ. Математика, 1990, № 3. с.22-26.
4. Прёсдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений. - М.: Мир, 1979.
5. Гусейнов А.И., Мухтаров Х.Ш. Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. – М.: Наука, 1980.