Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»

УДК 517.519.6

№ 590, 2003, с. 128-132

Построение квадратурных формул для приближенного вычисления сингулярных интегралов, применяемых в задачах аэродинамики.

С. М. Исраилов
Институт Кибернетики АН РУз, Узбекистан

Quadrature formulas for approximate calculation of singular integrals with Cauchy kernel are constructed on the bases of Ryabenky cubic spline and modified Hermite spline. Estimates of errors are obtained in different classes of functions

При численном решении сингулярных интегральных уравнений в различных задачах аэродинамики широко применяется известный и эффективный метод дискретных вихрей [1] который, обеспечивая хорошую сходимость в точках, удаленных от концов интервала интегрирования, вблизи концов отрезка, к сожалению, не дает удовлетворительной сходимости. В настоящей работе построен ряд квадратурных формул для вычисления сингулярных интегралов с помощью различных локальных интерполяционных сплайнов, приведены оценки погрешности и указана хорошая сходимость построенных квадратурных формул.

Локальные сплайны, явно выражаясь через значения интерполируемой функции, обладают хорошими аппроксимативными свойствами и удобны в применении. Здесь мы рассмотрим случаи использования кубического сплайна Рябенького и модифицированного эрмитова сплайна.

1. Применение сплайна Рябенького. Известно [3], что кубический сплайн Рябенького $S_3(x)$ на отрезке $x_i \le x \le x_{i-1}$ ($x_0=-1$, $x_i=x_0+ih$, $h=2/N$) определяется равенством

$$S_3(x)=\varphi_1(t)f(x_i)+\varphi_2(t)f(x_{i+1})+\varphi_3(t)f(x_{i-2}), \tag{1}$$

где

$$t=(x-x_i)/h,\ i=0,\dots,N-1,\ \varphi_1(t)=1-t-t^2+t^3,\ \varphi_2(t)=t+2t^2-t^3,\ \varphi_3(t)=-t^2+t^3, \tag{2}$$

Применяя сплайн (1) для сингулярного интеграла

$$J(f,y)=\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{x-y}dx \tag{3}$$

построим квадратурную формулу

$$J(f,y)=\sum_{k=0}^{N+1}A_k(y)f(x_k)+R_N(f,y) \tag{4}$$

где коэффициенты $A_k(y)$ для значений $y \ne x$ $(k=0,\dots,N+1)$ определяются равенствами

$$A_0(y)=-\frac{7}{6}-\frac{\tau_0}{2}+\tau_0^2+\varphi_1(\tau_1)\ln\left|\frac{1-\tau_0}{\tau_0}\right|, \tag{5}$$

$$A_1(y) = -\frac{5}{6} - \frac{7\tau_1}{2} - \tau_1^{\,2} + \varphi_1(\tau_1)\ln\left|\frac{1-\tau_1}{\tau_1}\right| + \varphi_2(\tau_1+1)\ln\left|\frac{\tau_1}{1+\tau_1}\right|, \quad (6)$$

$$A_k(y) = 2 + \varphi_1(\tau_k)\ln\left|\frac{1-\tau_k}{\tau_k}\right| + \varphi_2(\tau_k+1)\ln\left|\frac{\tau_k}{1+\tau_k}\right| +$$

$$+ \varphi_3(\tau_k+2)\ln\left|\frac{1+\tau_k}{2+\tau_k}\right|, \quad k = 2,\dots,N-1, \quad (7)$$

$$A_N(y) = -\frac{19}{6} - \frac{\tau_N}{2} - \tau_N^{\,2} + \varphi_2(\tau_N+1)\ln\left|\frac{\tau_N}{1+\tau_N}\right| + \varphi_3(\tau_N+2)\ln\left|\frac{1+\tau_N}{2+\tau_N}\right|, \quad (8)$$

$$A_{N+1}(y) = \frac{4}{3} - \frac{5\tau_N}{2} + \tau_N^{\,2} + \varphi_3(\tau_N-1)\ln\left|\frac{2-\tau_N}{1-\tau_N}\right|.$$

Здесь $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$, определены равенствами (2), а $\tau_k=(y-x_k)/h$.

Из (5) и (8) получаем следующие соотношения

$$A_0(y) \cong -\frac{7}{6} + \ln\left|1 - \frac{h}{1+y}\right|, \quad \text{при } y \to -1+0; \quad (10)$$

$$A_N(y) \cong \frac{19}{6} - 4\ln 2 - \ln\left|1 - \frac{h}{1-y}\right|, \quad \text{при } y \to +1-0 \quad (11)$$

Для остальных коэффициентов при $y=x_k$ имеем

$A_1(x_1)=-5/6$, $\quad A_k(x_k)=2-4\ln 2$ $(k=2,\dots,N-1)$, $\quad A_{N+1}(x_{N+1})=17/6-4\ln 2$.

Теперь перейдем к оценке погрешности квадратурной формулы (4) для двух классов функций. Обозначим:

$L_\infty[a,b]$-пространство измеримых ограниченных в существенном на [a,b] функций с нормой $\|f(x)\|_\infty=\|f(x)\|_{L_\infty}=ess\ sup|f(x)|$, $\quad a\le x\le b$;

$W^2[a,b]$-класс функций, имеющих на [a,b] абсолютно непрерывную производную и $f''\in L_\infty[a,b]$.

$C^1H^\alpha[a,b]$-класс функций, производная которых на [a,b] принадлежит классу Гельдера с показателем α и константой K_1.

Теорема 1. Для погрешности $R_N(f,y)$ квадратурной формулы (4) в классах $C^1H^\alpha[-1,1+h]$ и $W^2[-1,1+h]$ справедливы оценки:

$$|R_N(f,y)| \le L_1\frac{\ln N}{N^{1+\alpha}}, \qquad |R_N(f,y)| \le L_2\frac{\ln N}{N^2},$$

где

$$L_1 = \frac{15}{4}\bullet 2^{2\alpha}K_1\left(1+\frac{1{,}92}{\ln N}\right), \quad L_2 = 5{,}64M_2\left(1+\frac{1{,}72}{\ln N}\right), \quad M_2 = \|f''\|_\infty.$$

В доказательстве теоремы используем следующие леммы, доказательства которых мы здесь опускаем.

Лемма 1. Пусть $x_i\le x\le x_{i+1}$ и $t=(x-x_i)/h$. Для погрешности сплайна (1) $r_N(f,x)=f(x)-S_3(x)$ справедливы неравенства

1) $|r_N(f,x)| \le 3*2^{\alpha+1}*K_1h^{1+\alpha}t(1-t)$, $\quad$ если $\quad f(x)\in C^1H^\alpha$;

2) $|r_N(f,x)| \le 1{,}131t(1-t)h^2\|f''(x)\|_\infty$, если $f(x) \in W^2$.

Лемма 2. Пусть $-1<x<1$ и $x_i=x_0+ih$ $(i=0,\dots,N-1)$, $h=2/N$. Тогда имеет место неравенство $\max\limits_{0\le t\le 1} 4t(1-t)\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| \le \ln N + 1{,}04$.

Доказательство теоремы. Очевидно, что погрешность квадратурной формулы (4) можно представить в виде

$$R_N(f,y) = \int_{-1}^{1} \frac{r_N(f,x)dx}{x-y} = \int_{-1}^{1} \frac{[r_N(f,x)-r_N(f,y)]dx}{x-y} +$$
$$+ r_N(f,y)\ln\left|\frac{1-y}{1+y}\right| = R_N^{(1)}(f,y) + R_N^{(2)}(f,y). \qquad (12)$$

Полагаем $0\le y<1$ (случай $-1<y\le 0$ сводится к этому). Зафиксируем число $0<\delta_N<1/2$ и разобьем интеграл $R_N^{(1)}(f,y)$ на три части:

$$R_N^{(1)}(f,y) = \left(\int_{-1}^{y-\delta_N} + \int_{y-\delta_N}^{y+\delta_N} + \int_{y+\delta_N}^{1} \right) \frac{r_N(f,x)-r_N(f,y)}{x-y}dx = I_1 + I_2 + I_3. \quad (13)$$

Сначала предположим $\delta_N<1-y$. Для I_1 получим

$$|I_1| \le 2\|r_N(f,y)\| \left| \int_{-1}^{y-\delta_N} \frac{dx}{x-y} \right| = 2\|r_N(f,y)\| \ln\frac{1+y}{\delta_N} < 2\|r_N(f,y)\| \ln\frac{2}{\delta_N}. \quad (14)$$

Так как согласно теореме о среднем

$$\max_{x,y}\left| \frac{r_N(f,x)-r_N(f,y)}{x-y} \right| \le \|r'_N(f,y)\|,$$

то

$$|I_2| \le \|r'_N(f,y)\| \int_{y-\delta_N}^{y+\delta_N} dx = 2\delta_N \|r'_N(f,y)\|. \quad (15)$$

Для I_3 имеем

$$|I_3| \le 2\|r_N(f,x)\| \left| \int_{y+\delta_N}^{1} \frac{dx}{x-y} \right| = 2\|r_N(f,y)\| \ln\frac{1-y}{\delta_N} \le 2\|r_N(f,y)\| \ln\frac{1}{\delta_N}. \quad (16)$$

Пусть теперь $\delta_N>1-y$, тогда

$$R_N^{(1)}(f,y) = \left(\int_{-1}^{y-\delta_N} + \int_{y-\delta_N}^{1} \right) \frac{r_N(f,x)-r_N(f,y)}{x-y}dx = I_1{}^* + I_3{}^*.$$

Интегралы $I_1{}^*$ и $I^*{}_3$ оцениваются точно так же, как I_1 и I_3. Для $R_N^{(2)}(f,y)$ согласно леммам 1 и 2 имеем следующие оценки:

$$\begin{cases} \left|R_N^{(2)}(f,y)\right| \le 3*2^{\alpha-3}K_1 h^{1+\alpha}(\ln N+1{,}04), \\ \left|R_N^{(2)}(f,y)\right| \le 0{,}283\|f''(x)\|_\infty h^2(\ln N+1{,}04), \end{cases} \qquad (17)$$

соответственно для классов C^1H^α и W^2. Из соотношений (13)-(16) имеем

$$\left|R_N^{(1)}(f,y)\right| \le 4\left\|r_N(f,y)\right\| \ln\left(\frac{2}{\delta_N}\right) + 2\delta_N \left\|r'(f,y)\right\|. \qquad (18)$$

Пусть теперь $f \in C^1H^\alpha$. Тогда из (12), (17) и (18) получим

$$\left|R_N(f,y)\right| \le 4*3*2^{\alpha-3}K_1h^{1+\alpha}\frac{2}{\delta_N} + 2\delta_N*1{,}61*2^\alpha K_1h^\alpha + 3*2^{\alpha-3}K_1h^{1+\alpha}(\ln N + 1{,}04).$$

Выбирая $\delta_N=2/N$, после упрощений, находим

$$\left|R_N(f,y)\right| \le 15*2^{2\alpha}K_1\left(1+\frac{1{,}92}{\ln N}\right)\frac{\ln N}{4N^{1+\alpha}}.$$

Теорема доказана. Отметим, что для классов функций $H^\alpha[-1,1]$ и $W^1[-1,1]$ можно получить соответственно следующие оценки

$$\left|R_N(f,y)\right| \le L_1\frac{\ln N}{N^\alpha}, \qquad \left|R_N(f,y)\right| \le L_2\frac{\ln N}{N},$$

где L_1 и L_2 - некоторые постоянные.

2. Применение эрмитова сплайна. Известно [2], что эрмитов сплайн на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ определяется равенством

$$S_3(x) = \psi_1(t)f_i + \psi_2(t)f_{i+1} + \psi_3(t)hf_i' + \psi_4(t)hf'_{i+1},$$

где

$$\psi_1(t)=(1-t)^2(1+2t),\ \psi_2(t)=t^2(3-2t),\ \psi_3(t)=t(1-t)^2,\ \psi_4(t)=-t^2(1-t).$$

Учитывая то обстоятельство, что в практических задачах могут оказаться известными только узловые значения f_i, заменим в (19) производные f_i' симметричной разностью $f'(x_i)=(f_{i+1}-f_{i-1})/2h$ только во внутренних узлах x_i $(i=1,\dots,N-1)$, а в концевых узлах оставим f_0' и f_N' по-прежнему (для обеспечения хорошего приближения аппроксимируемой функции $f(x)$. В результате получим модифицированный эрмитов сплайн $\widetilde{S}_3(x)$, который на отрезках $[x_0, x_1]$, $[x_i, x_{i+1}]$, $(i=1,\dots,N-2)$, $[x_{N-1}, x_N]$ имеет соответственно вид

$$\widetilde{S}_3(x) = \varphi_1(t)f_0 + \varphi_2(t)f_1 + \varphi_3(t)f_2 + \varphi_4(t)hf_2', \qquad t=(x-x_0)/h;$$

$$\widetilde{S}_3(x) = -0{,}5\varphi_4(t)f_{k-1} + \varphi_1(t)f_k + \varphi_6(t)f_{k+1} + \varphi_3(t)f_{k+2}, \qquad t=(x-x_k)/h,\ k=1,\dots,N-2;$$

$$\widetilde{S}_3(x) = -0{,}5\varphi_4(t)f_{k-2} + \varphi_5(t)f_{N-1} + \varphi_6(t)f_{N-1} + 2\varphi_3(t)hf_N', \quad t=(x-x_{N-1})/h,$$

где $\varphi_1(t)=(2-5t^2+3t^3)/2$, $\varphi_2(t)=3t^2-2t^3$, $\varphi_3(t)=(-t^2+t^3)/2$;

$\varphi_4(t)=t-2t^2+t^3$, $\varphi_5(t)=1-3t^2+2t^3$, $\varphi_6(t)=(t-4t^2-3t^3)/2$.

С помощью этого сплайна для сингулярного интеграла (3) построена квадратурная формула

$$J(f,y) = \sum_{k=0}^{N} A_k(y)f(x_k) + B_0(y)hf'(-1) + B_N(y)hf'(1) + R_N(f,y). \qquad (19)$$

Для коэффициентов $A_k(y)$, $B_0(y)$, $B_N(y)$ найдены явные выражения. Для погрешности $R_N(f,y)$ в классах функций C^pH^α (p=1,2; $0<\alpha\le1$) и W^q (q=2,3) доказана теорема 2, устанавливающая справедливость оценок

$$\left|R_N(f,y)\right| \le L_1^{(p)}\frac{\ln N}{N^{p+\alpha}}, \quad \left|R_N(f,y)\right| \le L_2^{(q)}\frac{\ln N}{N^q},$$

где

$$L_1^{(1)} = 14 * 2^{\alpha} K_1 \left(1 + \frac{1{,}24}{\ln N}\right), \quad L_2^{(2)} = \frac{37}{4} * 2^{\alpha} K_1 \left(1 + \frac{1{,}2}{\ln N}\right),$$

$$L_1^{(2)} = 6M_2 \left(1 + \frac{1{,}56}{\ln N}\right), \quad L_2^{(3)} = 5M_3 \left(1 + \frac{0{,}7}{\ln N}\right), \quad M_q = \left\| f^{(q)}(x) \right\|_{\infty}.$$

Сравнение теорем 1 и 2 показывает, что сходимость квадратурной формулы (19) лучше, чем (4), а это является следствием того, что в (19) участвуют значения производной плотности $f'(x)$ в концевых точках.

В других работах автора [4,5] с помощью вышеуказанных локальных сплайнов построены квадратурные формулы для вычисления весовых сингулярных интегралов

$$J_j(f, y) = \frac{\omega_j(y)}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)dx}{\omega_j(x)(x-y)}, \quad -1 < y < 1,$$

где $\omega_1(x) = \sqrt{1-x^2}$, $\omega_2(x) = \sqrt{(1-x)/(1+x)}$, $\omega_3(x) = \omega_2^{-1}(x)$, $\omega_4(x) = \omega_1^{-1}(x)$.

В построенных квадратурных формулах нами найдены выражения для коэффициентов $A_k^{(j)}(y)$, являющиеся устойчивыми при счете. Также даны оценки погрешности в соответствующих классах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.:Наука, 1985. 256 с.
2. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.И. Методы сплайн-функций. М.: наука, 1980. 252 с.
3. Исраилов М.И., Эщдавлатов Б. Уточнение остаточного члена одного интерполяционного сплайна // Вопросы вычисл. и прикл. математики. – Ташкент, 1986, вып.80, с.10-26.