Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 532.546
№ 590, 2003, с. 139-144

Исследование двумерного шлейфа загрязнения в неоднородном слое[1)]

А. А. Квасов, В. Ф. Пивень
Орловский государственный университет, Россия

The problem of the definition of the washed train in the complex form of the hearth of pollution is set up in the bit of non-homogeneous layer. Non-homogeneous integral equation of Fredgolm's type of the second kind is put into the base of the solution of the problem. Using numerating methods the problem is solved for elliptic hearth of pollution.

1. Проводимые исследования связаны с актуальной проблемой защиты водозаборов от загрязнения, мониторинга загрязнения в грунте.

Пусть область фильтрации D состоит из чистой области D_1 и очага загрязнения, занимающего область D_2. Области D_1 и D_2 сопрягаются по гладкой кривой Γ. Пусть фильтрационное течение обусловлено поступательным потоком, скорость которого равна u, и работой водозабора, представляющего собой совершенную скважину суммарного дебита Π. В рамках одножидкостной модели считаем, что протекая через область D_2, жидкость загрязняется и за областью D_2 могут образовываться шлейфы вымываемых загрязнений G_1 и G_1'. Каждый из них имеет три стационарные границы (две из которых являются частями линий тока и третью – часть границы загрязнения $\Gamma - \Gamma_0$ (γ_0)) и одну нестационарную – границу Γ_1 (Γ_1') (рис. 1).

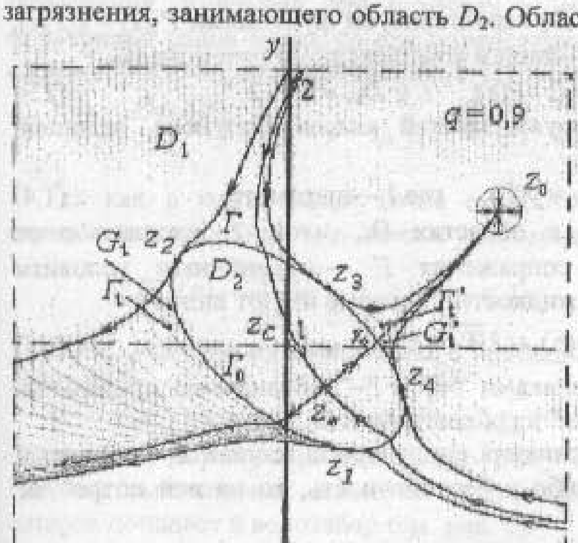

Рис.1 Картина течения к водозабору, работающему с дебитом $q > q_*$

Считаем, что фильтрация двумерная, установившаяся и происходит в неоднородном изотропном недеформируемом слое; течение описывается линейным законом Дарси; жидкость несжимаема, обладает одинаковой во всей

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 01-01-00063)

области фильтрации вязкостью; проводимость слоя $P = KH$ (K — коэффициент проницаемости слоя, H — его толщина) с течением времени не изменяется. Работу водозабора моделируем точечным стоком мощности $q = \Pi/P(z_0)$, расположенным в точке z_0.

Для описания фильтрационного течения, вводится комплексный потенциал

$$W(z) = \varphi(z) + i\psi(z)/P(z), \tag{1.1}$$

являющийся обобщённо-аналитической функцией координаты z и удовлетворяющий уравнению [1]

$$\frac{\partial W(z)}{\partial \bar{z}} + A(z)\left[W(z) - \overline{W}(z)\right] = 0, \quad z \in D_1 \cup D_2 \tag{1.2}$$

где $A(z) = \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} \ln\sqrt{P(z)}$, $2\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} = \dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}$.

В кусочно-неоднородном слое области D_1 и D_2 характеризуем непрерывными коэффициентами проницаемости K_1 и K_2. Они на границе сопряжения Γ изменяются скачком, причём $K_\nu(z) = k_\nu K(z)$ (k_1 и k_2 — $const$, $\nu = 1, 2$). Полагаем, что толщина слоя H непрерывна во всей области фильтрации D. Тогда проводимость слоя в областях D_1 и D_2 характеризуем функциями $P_\nu(z) = k_\nu P(z)$, $\nu = 1, 2$. Течение в областях D_1 и D_2, опишем комплексными потенциалами

$$W_\nu(z) = k_\nu \varphi_\nu(z) + i\psi_\nu(z)/P(z), \quad z \in D_\nu,\ \nu = 1, 2. \tag{1.3}$$

Границу сопряжения Γ моделируем кривой класса Ляпунова, заданной параметрическим уравнением:

$$z = z(l) \quad (x = x(l),\ y = y(l)), \quad \text{где } l \text{ — параметр.} \tag{1.4}$$

Комплексные потенциалы (1.3) в областях D_ν, $\nu = 1, 2$, удовлетворяют уравнению (1.2), а на границе сопряжения Γ — граничным условиям (непрерывности давления и расхода жидкости), которые имеют вид [1]:

$$(1-\lambda)W_1^+(z) = W_2^-(z) + \lambda \overline{W}_2^-(z), \quad z \in \Gamma, \tag{1.5}$$

где $\lambda = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)$, $\lambda \in [-1, 1)$, знаками "+" и "–" обозначены предельные значения $W_1(z)$ и $W_2(z)$ при подходе к Γ из области D_1 и D_2.

Если область фильтрации D ограничена сингулярной линией L, на которой проводимость обращается в ноль либо в бесконечность, то на ней потребуем выполнения условия [2]:]

$$P(z)\frac{\partial \varphi_\nu(z)}{\partial n} = 0, \quad \text{либо} \quad \varphi_\nu(z) = const, \quad \nu = 1 \text{ и (или) } 2, \quad z \in L. \tag{1.6}$$

Пусть в отсутствии границы Γ ($k_1 = k_2 = 1$) течение описывается комплексным потенциалом $W_0(z)$ вида (1.1). Полагаем, что он удовлетворяет условию (1.6). Комплексный потенциал $W_0(z)$ представим в виде:

$$W_0(z) = G(z) + qF(z, z_0), \tag{1.7}$$

где функция $G(z)$ описывает поступательный поток со скоростью u, $F(z, z_0)$ — функция, описывающая течение к стоку единичной мощности, расположенному в точке z_0 и имеющая в этой точке особенность логарифмического типа.

При наличии в области фильтрации границы смены неоднородностей Γ, течение по обе стороны от неё возмущается. Учтём течение, описываемое комплексным потенциалом (1.7). Тогда, комплексные потенциалы (1.3) представим следующим образом:

$$W_\nu(z) = W_0(z) + W_*(z), \quad z \in D_\nu, \quad \nu = 1, 2, \tag{1.8}$$

где комплексный потенциал возмущений $W_*(z)$ имеет вид (1.1). Учитывая (1.8), условия (1.5), (1.6) запишем для комплексного потенциала $W_*(z)$:

$$(1-\lambda)W_*^+(z) = W_*^-(z) + \lambda\overline{W}_*^-(z) + \lambda\left[W_0(z) + \overline{W}_0(z)\right], \quad z \in \Gamma, \tag{1.9}$$

$$P(z)\frac{\partial\varphi_*(z)}{\partial n} = 0, \text{ либо } \varphi_*(z) = 0, \quad z \in L. \tag{1.10}$$

Следуя [2], для единственности решения задачи сопряжения (1.2), (1.5), (1.6) имеем условие в бесконечности:

(1.11) $\varphi_*(z) = O(|z|^{-1}), K(z)|\nabla\varphi_*(z)| = O(|z|^{-2})$, где $|z-\zeta| \to \infty$, $\zeta \in \Gamma \cup L$.

Таким образом, ищем комплексный потенциал возмущений $W_*(z)$, удовлетворяющий уравнению (1.2) и условиям (1.9) – (1.11).

Определив $W_*(z)$, а следовательно, согласно (1.8), — $W_1(z)$, $W_2(z)$, исследуем вымываемые из области D_2 шлейфы загрязнения. Для этого, во первых, найдём число m (m = 1, 2, …) таких линий тока, каждая из которых имеет с Γ только одну общую точку z_m. Во вторых, определив координату z_* критической точки, выясним взаимное расположение области захвата водозабора и очага загрязнения. Учитывая, что в точках z_m нормальная составляющая скорости фильтрации равна нулю, то для определения координат z_m, m = 1, 2, …, имеем систему, состоящую из уравнения (1.4) и условия

$$\frac{\partial\varphi_1(z)}{\partial n_z} = 0, \quad z = z_m \in \Gamma; \; m = 1, 2, 3, \tag{1.12}$$

Так как в критической точке скорость фильтрации равна нулю, то для определения координаты z_*, имеем уравнение

$$K_\nu(z)\frac{\partial\varphi_\nu(z)}{\partial z} = 0, \quad z = z_* \in D \tag{1.13}$$

Далее, выделяя из комплексного потенциала (1.8) мнимые части и, построив линии тока

$$\psi_\nu(z) = \psi_\nu(z_r), \quad \nu = 1 \text{ и (или) } 2, \tag{1.14}$$

проходящие через точки $z_r \in \{z_m, z_*\}$, m = 1, 2, …, определяем стационарные границы вымываемых шлейфов загрязнения и указываем ту часть шлейфа, которая попадает в водозабор (см. рис. 1).

Для определения нестационарной границы Γ_t шлейфа G_t и Γ'_t шлейфа G'_t, учитывая (1.8) и связь скорости фильтрации с физической скоростью [3], имеем дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\overline{z}}{dt} = 2K(z)\frac{\partial}{\partial z}\left[\varphi_0(z) + \varphi_*(z)\right], \quad z \in \Gamma_t \cup \Gamma'_t. \tag{1.15}$$

Полагая, что в начальный момент времени $t = 0$ граница Γ_t (Γ'_t) совпадает с границей Γ_0 (γ_0), то начальные условия для дифференциального уравнения (1.15) имеют вид:

$$z = z(l), \quad z \in \Gamma_0 \cup \gamma_0. \tag{1.6}$$

2. В работе [4] решение задачи сопряжения (1.2), (1.9) – (1.11) для канонических границ Γ получено в конечном виде и, согласно формул (1.12) –

(1.15), исследованы вымываемые шлейфы загрязнения. Для очага загрязнения произвольной формы границу загрязнения моделируем кривой класса Ляпунова и, следуя [1], комплексный потенциал возмущений $W_*(z)$ ищем в виде потенциала двойного слоя непрерывно распределённого с плотностью $g(\zeta)$ ($g(\zeta)$ — вещественная функция) на Γ:

$$W_*(z)=\int_\Gamma g(\zeta)P(\zeta)\frac{\partial F_1(z,\zeta)}{\partial n_\zeta}dl_\zeta,\quad z\in D_\nu,\ \nu=1,2 \tag{2.1}$$

Здесь $F_1(z,\zeta)$ — первое фундаментальное решение уравнения (1.2), имеющее в точке $\zeta=\xi+i\eta$ особенность логарифмического типа. Тогда, в силу свойств потенциала двойного слоя, комплексный потенциал $W_*(z)$, удовлетворяет условиям (1.10), (1.11), а из (1.9) имеем уравнение [5]:

$$g(z)-2\lambda\int_\Gamma g(\zeta)P(\zeta)\frac{\partial \Phi_1(z,\zeta)}{\partial n_\zeta}dl=2\lambda\varphi_0(z),\quad z\in\Gamma, \tag{2.2}$$

где $\Phi_1(z,\zeta)=ReF_1(z,\zeta)$. Уравнение (2.2) относительно функции $g(\zeta)$ является неоднородным интегральным уравнением второго рода типа Фредгольма. Следуя [6], его решение ищем методом дискретных особенностей.

Определив из уравнения (2.2) $g(\zeta)$, имеем комплексный потенциал возмущений (2.1), а значит, согласно (1.8), и $W_1(z)$, $W_2(z)$, что позволяет найти шлейфы загрязнений. Следуя [1], уравнения (1.12) – (1.15) представим в виде:

$$\frac{\partial\varphi_0(z)}{\partial n_z}-\frac{1}{P(z)}\int_\Gamma\frac{\partial g(\zeta)}{\partial l_\zeta}\frac{\partial\Psi_2(z,\zeta)}{\partial l_z}dl_\zeta=0,\ z=z_m\in\Gamma,\ m=1,2,\ldots, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial\varphi_0(z)}{\partial z}-\frac{i}{P(z)}\int_\Gamma\frac{\partial g(\zeta)}{\partial l_\zeta}\frac{\partial\Psi_2(z,\zeta)}{\partial z}dl_\zeta=0,\quad z=z_*, \tag{2.4}$$

$$\psi_0(z)+\int_\Gamma\frac{\partial g(\zeta)}{\partial l_\zeta}\Psi_2(z,\zeta)dl_\zeta=\psi(z_r),\ z_r\in\{z_m,z_*\},\ m=1,2,\ldots, \tag{2.5}$$

$$\frac{d\bar z}{dt}=2\left(K(z)\frac{\partial\varphi_0(z)}{\partial z}-\frac{i}{H(z)}\int_\Gamma\frac{\partial g(\zeta)}{\partial l_\zeta}\frac{\partial\Psi_2(z,\zeta)}{\partial z}dl_\zeta\right),\quad z\in\Gamma_t, \tag{2.6}$$

где $\Psi_2(z,\zeta)=P(z)\operatorname{Im}F_2(z,\zeta)$, $F_2(z,\zeta)$ – второе фундаментальное решение уравнения (1.2).

Решая уравнения (2.3) – (2.6) численно, определяем шлейфы G_t, G_t' вымываемого из очага загрязнения.

Отметим, что в рассмотренной постановке, решение задача об определении шлейфа вымываемого загрязнения позволяет помимо самого шлейфа, найти зону санитарной охраны водозабора (его область захвата) и указать условия, при которых водозабор работает без загрязнения (определить местоположение водозабора относительно очага загрязнения и рассчитать его предельно допустимый (критический) дебит q_*).

3. Определим шлейфы вымываемого загрязнения в слое, проводимость которого моделируется степенной функцией:

$$P(z) = y^s, \quad s = const > 0.$$

Ось Ox является сингулярной линией L. Границу загрязнения Γ моделируем эллипсом с центром в точке z_c и полуосями a, b. Большая полуось a наклонена под углом β к L. Согласно [7], $\Phi_1(z, \zeta)$ и $\Psi_2(z, \zeta)$ имеют вид:

$$\Phi_1(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\frac{Q_\mu(\omega)}{(y\eta)^{\mu+1}}, \quad \Psi_2(z,\zeta) = \frac{(y\eta)^{\mu+1}}{2\pi}Q_{\mu+1}(\omega),$$

где $Q_\mu(\omega)$ — функция Лежандра второго рода порядка $\mu = s/2 - 1$, $\omega = \omega(z, \zeta) = [(x-\xi)^2 + y^2 + \eta^2]/(2y\eta)$. Действительная часть комплексного потенциала (1.7) имеет вид: $\varphi_0(z) = -ux + \frac{q}{2\pi}\left(\frac{y_0}{y}\right)^{\mu+1} Q_\mu(\omega_0)$, где

$$\omega_0 = \frac{(x-x_0)^2 + y^2 + y_0^2}{2yy_0}.$$

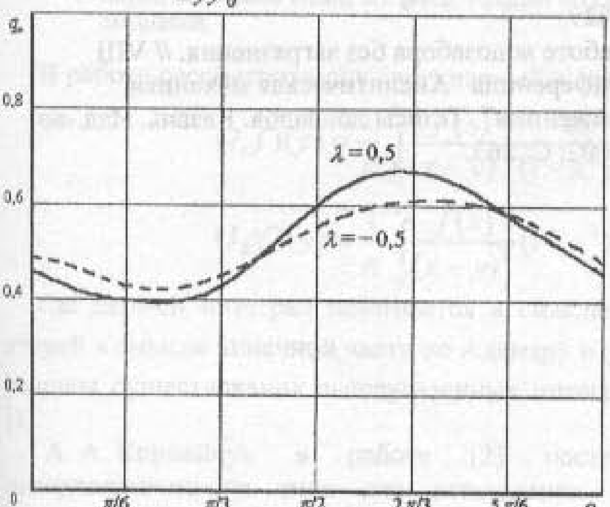

Рис. 2. Зависимость критического дебита от ориентации очага загрязнения

Решая численно уравнения (2.2) – (2.5) и дифференциальное уравнение (2.6) при начальных условиях (1.16), находим шлейфы загрязнения, представленные на рис. 1 (временной интервал $\Delta t = 0{,}2$; $H = y^2$; $K = 1$; дебит водозабора измеряется в единицах $2\pi u y_c$; время – в единицах $\sigma y_c/u$, σ – пористость грунта). Проведя для рассматриваемого очага загрязнения численный эксперимент по определению критического дебита q_* [8], на рис. 2 представлена зависимость $q_* = q_*(\beta)$. Из анализа графика следует, что критический дебит будет наибольшим, если $\beta \in (\pi/2; 5\pi/6)$.

Полученные результаты исследования могут представлять интерес при эксплуатации водозаборов и проектировании хранилищ промышленных отходов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пивень В.Ф. Интегральные уравнения задачи сопряжения обобщённых аналитических функций на нестационарной границе. // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. №10. С. 1405 – 1409.

2. Пивень В.Ф. Единственность решения граничных задач сопряжения физических процессов в неоднородной среде. // Труды X международного симпозиума “МДОЗМФ-2001”. Херсон. ООО “Айлант” 2001. С. 265-269.
3. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М.: Высш. шк. 1972. 368 с.
4. Квасов А.А Исследование шлейфа вымываемого загрязнения в плоскопараллельной задаче с прямолинейной границей смены однородностей. // Труды международных школ–семинаров “МДОЗМФ”. 2002. С. 44-49.
5. Пивень В.Ф., Квасов А.А Двумерная задача об определении шлейфа вымываемого загрязнения. // Труды международных школ–семинаров “МДОЗМФ”. 2002. С. 74-80.
6. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М. “Янус”. 1995. 520 с.
7. Пивень В.Ф. О теории двумерных процессов в слоях переменной проводимости, характеризуемых степенью гармонической функции // Докл. АН. 1995. Т. 344, № 5. С. 627-629.
8. Квасов А.А., Пивень В.Ф. О работе водозабора без загрязнения. // VIII Четаевская международная конференция “Аналитическая механика, устойчивость и управление движением”. Тезисы докладов. Казань. Изд.-во Казанского гос. техн. ун.-та. 2002. С. 263.

УДК 517.519.6

Квадрат
интегр
орто

Харьковский

The subject of in
$(1-x^2)^{2/3}$ weigh
nodes is built fo
transformed to t
carried out. Som
calculation.

В работе рассматр

$(I_1 f)$

$(I_2 f)$

где первый интег
второй в смысле конеч
условия существовани
[1].

А. А. Корнейчук
интерполяционного
$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{x-y}\omega(x)dx$, где
вычисления сингуляр
аналогичные формулы

В дальнейшем бу
предположении $F(-1)=$

Итак, преобразуем (2):