Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 517.519.6
№ 590, 2003, с. 145-149

Квадратурная формула для гиперсингулярного интеграла с весом $(1-x^2)^{2/3}$ на базе системы ортонормированных полиномов Якоби

А. С. Кононенко
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

The subject of inquiry for the following publication is a hypersingular integral with $(1-x^2)^{2/3}$ weight function. Quadrature formula of the interpolative type with Jacoby nodes is built for such an integral. Integrals from obtained quadrature formula are transformed to the most suitable form for calculation. Numerical experiment was carried out. Some results are given. Program package Mathematica 4.1 was used for calculation.

В работе рассматривается сингулярный и гиперсингулярный интегралы:

$$(I_1 f)(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{(x-y)}\frac{dx}{(1-x^2)^{1/3}} \tag{1}$$

$$(I_2 f)(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{(x-y)^2}(1-x^2)^{2/3}dx \tag{2}$$

где первый интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, а второй в смысле конечной части по Адамару и $f(x) \in C^{1,\alpha}[-1,1]$. Определения и условия существования вышеуказанных интегралов можно найти, например, в [1].

А. А. Корнейчук в работе [2] построил квадратурные формулы интерполяционного типа для вычисления сингулярных интегралов вида $\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{x-y}\omega(x)dx$, где $\omega(x)$ - весовая функция. Их можно применить для вычисления сингулярного интеграла (1). Цель настоящей работы построить аналогичные формулы для гиперсингулярного интеграла (2).

В дальнейшем будет использоваться следующее равенство (см. [1]), в предположении $F(-1)=F(1)=0$ и $F(x) \in C^{1,\alpha}[-1,1]$:

$$\int_{-1}^{1}\frac{F(x)}{(x-y)^2}dx = \int_{-1}^{1}\frac{F'(x)}{(x-y)}dx\,,$$

Итак, преобразуем (2):

$$(I_2 f)(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{(x-y)^2}(1-x^2)^{2/3}dx=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(f(x)(1-x^2)^{2/3})'}{(x-y)}dx=$$
$$=-\frac{4}{3\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)x}{(x-y)}\frac{dx}{(1-x^2)^{1/3}}+\int_{-1}^{1}\frac{f'(x)(1-x^2)^{2/3}}{(x-y)}dx=$$
$$=\int_{-1}^{1}\frac{f'(x)(1-x^2)}{(x-y)}\frac{dx}{(1-x^2)^{1/3}}-\frac{4}{3\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)x}{(x-y)}\frac{dx}{(1-x^2)^{1/3}}= \tag{3}$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f'(x)(1-x^2)\ -\frac{4}{3}xf(x)}{(x-y)}\frac{dx}{(1-x^2)^{1/3}}$$

Выразим $f(x)$ через значения ее производной по следующей формуле:

$$f(x)=\int_{c}^{x}f'(x)dx+f(c),$$

где c любая константа из интервала (-1,1). Таким образом, (2) можно преобразовать к виду:

$$(I_2 f)(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f'(x)(1-x^2)\ -\frac{4}{3}x(\int_{c}^{x}f'(x)dx+f(c))}{(x-y)}\frac{dx}{(1-x^2)^{1/3}}$$

Выбираем одну из первообразных для $f'(x)$, полагая $f(0)=0$, имеем:

$$(I_2 f)(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f'(x)(1-x^2)\ -\frac{4}{3}x\int_{0}^{x}f'(x)dx}{(x-y)}\frac{dx}{(1-x^2)^{1/3}}=(I_1 g)(y),$$

где

$$g(x)=f'(x)(1-x^2)\ -\frac{4}{3}x\int_{0}^{x}f'(x)dx \tag{4}$$

Предположим теперь, что $f(x)$ является полиномом степени l, тогда $f'(x)(1-x^2)$ есть полином степени $l+1$, также как и $x\int_{0}^{x}f'(x)dx$, поэтому их линейная комбинация $g(x)$ также является полиномом степени $l+1$.

Теперь же, используя полученные в [2] результаты, примененные к системе полиномов Якоби при $\alpha=\beta=-\frac{1}{3}$ (см., например, [3]) имеем:

$$(I_1 g)(y)=-\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n+1}\frac{g(x_m)}{p'_{n+1}(x_m)}\frac{q_{n+1}(x_m)-q_{n+1}(y)}{x_m-y} \tag{5}$$

здесь $\{x_m\}_{m=1}^{n+1}$ - узлы квадратурной формулы – нули полинома Якоби степени $n+1$, $p_{n+1}(x)$ - полином Якоби степени $n+1$ при $\alpha=\beta=-\frac{1}{3}$,

$$q_{n+1}(y)=-\int_{-1}^{1}\frac{p_{n+1}(x)}{x-y}\frac{dx}{(1-x^2)^{1/3}}.$$

Выражение (5) при условии (4) можно считать квадратурной формулой для гиперсингулярного интеграла (2).

Упростим теперь выражение для $q_{n+1}(y)$ и приведем его к виду удобному для вычисления:

$$q_{n+1}(y)=-\int_{-1}^{1}\frac{p_{n+1}(x)}{x-y}\frac{dx}{(1-x^2)^{1/3}}=$$

$$=-\int_{-1}^{1}\frac{p_{n+1}(x)-p_{n+1}(y)}{x-y}\frac{dx}{(1-x^2)^{1/3}}-\int_{-1}^{1}\frac{p_{n+1}(y)}{x-y}\frac{dx}{(1-x^2)^{1/3}}=$$

$$=-\int_{-1}^{1}\frac{p_{n+1}(x)-p_{n+1}(y)}{x-y}\frac{dx}{(1-x^2)^{1/3}}+p_{n+1}(y)\int_{-1}^{1}\frac{1}{x-y}\frac{dx}{(1-x^2)^{1/3}}$$

Первый интеграл – сходящийся несобственный. Второй интеграл может быть представлен в виде:

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x-y}\frac{dx}{(1-x^2)^{1/3}}=\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt[6]{1-x^2}}{x-y}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt[6]{1-x^2}-\sqrt[6]{1-y^2}}{x-y}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=-\int_{-1}^{1}\frac{x+y}{(\sqrt[6]{1-x^2}+\sqrt[6]{1-y^2})(\sqrt[3]{(1-x^2)^2}+\sqrt[3]{(1-y^2)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}\sqrt[3]{1-y^2})}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Таким образом, второй интеграл в выражении для $q_{n+1}(y)$ также приведен к виду удобному для вычисления.

Был проведен численный эксперимент с использованием квадратурной формулы (5). При проведении расчетов использовался пакет Mathematica 4.1. Далее представлены полученные результаты для $(I_2 f)(y)$ при конкретных значениях *f(x)*.

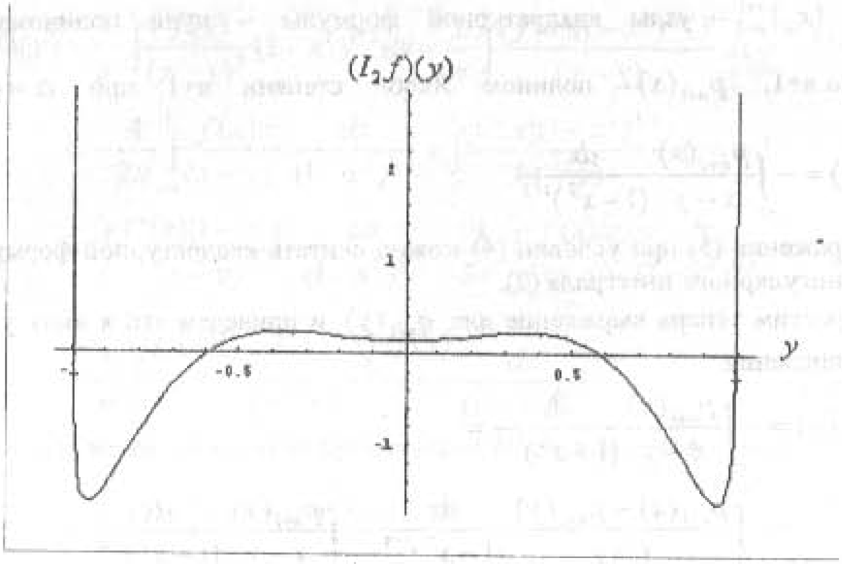

Рис. 1. График функции $(I_2 f)(y) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{f(x)}{(x-y)^2}(1-x^2)^{2/3}\,dx$ *полученный по квадратурной формуле (5), при* $f(x) = x^4, n = 5$.

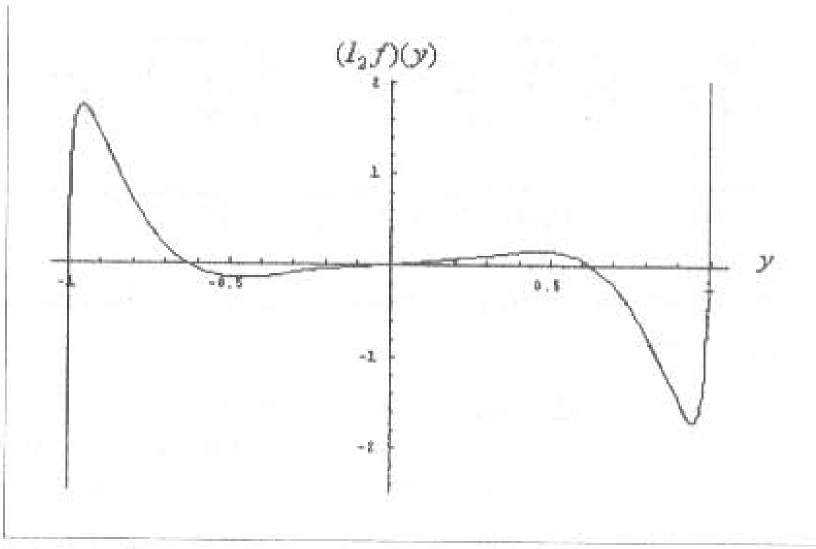

Рис. 2. График функции $(I_2 f)(y) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{f(x)}{(x-y)^2}(1-x^2)^{2/3}\,dx$ *полученный по квадратурной формуле (5), при* $f(x) = x^5, n = 6$.

Полученные интерполяционные квадратурные формулы для гиперсингулярных интегралов могут быть использованы при решении гиперсингулярных интегральных уравнений задач дифракции на электромагнитных структурах.

В заключении, автор статьи хотел бы выразить благодарность проф. Ю. В. Ганделю за поставленную задачу и постоянный интерес к ней.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. – Харьков: Изд-во ХНУ, 2001.53 - 58с.
2. Корнейчук А.А. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов // Сборник: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. – 1964. – С. 64-74.
3. Сеге Г. Ортогональные многочлены. – М.: ГИФМЛ,1962. – 500 с.
4. Гандель Ю.В., Еременко С.В., Полянская Т.С. Математические вопросы метода дискретных токов.- Харьков: Ротапринт ХГУ, 1992.- 145с