Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
№ 590, 2003, с. 150-154

УДК 517

Развитие метода дискретных вихрей и обобщенные функции

И. К. Лифанов

Военно-воздушная инженерная академия им. Н.Е. Жуковского
Институт вычислительной математики РАН, Москва

This work demonstrates a case when nontraditional physical interpretation of the flow round a profile during aspiration of the external flow leads to the necessity of using distributions in order to solve such problems. The use of distributions enables us to simplify algorithms of the numerical solution of suction problems. It also enables us to provide more correct mathematical statements of such problems.

Рассмотрим плоскую задачу обтекания идеальной несжимаемой жидкостью кривой L которую будем полагать гладкой замкнутой или разомкнутой. В каждой точке M кривой L возьмем орт $\vec{n}_M$ нормали так, что когда точка движется по кривой, этот орт меняется непрерывно и если кривая замкнутая, то он направлен во внешнюю область. Пусть скорость набегающего потока будет $\vec{U}_0(M)$ в точке M и пусть еще в точке $M_Q \in L$ помещен сток интенсивности Q скорость от которого в точке M обозначим $\vec{V}_Q(M)$. Кривую L будем моделировать вихревым слоем интенсивности $\gamma(M)$ в точке $M \in L$. Скорость от этого вихревого слоя в точке M_0 обозначим $\vec{V}_\gamma(M_0)$. Будем решать следующую задачу: найти такую интенсивность $\gamma(M)$ вихревого слоя, чтобы суммарное поле скоростей $\vec{U}(M)=\vec{V}_\gamma(M)+\vec{U}_0(M)+\vec{V}_Q(M)$ удовлетворяло условию не протекания в точках кривой L со стороны вектора $\vec{n}_M$ (на L^+) во всех точках M$\neq M_Q$ и на L^- во всех точках M на L, в окрестности $O^+(M_Q)$ точки M_Q со стороны L^+ поле $\vec{U}(M)$ имеет особенность типа стока, а в окрестности $O^-(M_Q)$ точки со стороны L^- является гладким [1-3].

Для задач обтекания профиля с отсосом внешнего потока удовлетворение условия не протекания на L^+ (M$\neq M_Q$, $M \in L$) было традиционным [1, 3-6] и оно приводило к уравнению

$$\vec{V}_\gamma^{\,+}(M_0)\vec{n}_{M_0} = -\vec{U}_0^{\,+}(M_0)\vec{n}_{M_0} - \vec{V}_Q^{\,+}(M_0)\vec{n}_{M_0},\ M_0 \in L,\ M_0 \neq M_Q, \qquad (1)$$

$$\vec{V}_Q(M) = \frac{Q}{2\pi}\frac{\vec{r}_{MM_Q}}{r^2_{MM_Q}}.$$

Уравнение (1) является одномерным сингулярным интегральным относительно функции $\gamma(M)$ на кривой L в правой части которого стоит сумма двух функций: $f_1(M_0)=-\vec{U}_0^{+}(M_0)\vec{n}_{M_0}$ -непрерывной на L и $f_2(M_0)=-\vec{V}_Q^{+}(M_0)\vec{n}_{M_0}$ -непрерывной на L\ M_Q и ,как показано в курсах математической физики [7] , доопределяемая до непрерывной функции на L.

Условие гладкости поля скоростей $\vec{U}(M)$ в окрестности $O^{-}(M_Q)$ точки M_Q показывает, что решение $\gamma(M)$ уравнения (1) надо искать в классе функций, имеющих в окрестности точки M_Q особенность вида $Q/\pi(t_q-t)$, где t параметр, описывающий кривую L, а t_q - параметр точки M_Q.

Численное решение уравнения (1) проводится методом дискретных вихрей (м.д.в.). Дискретные вихри и расчетные точки на контуре L выбираются так, чтобы точка M_Q была бы одной из расчетных и при составлении системы линейных алгебраических уравнений (с.л.а.у.) уравнение, соответствующее точке M_Q, опускалось. Это приводило к изменению традиционных схем м.д.в. и из тех или иных физических соображений добавлялось уравнение связывающее дискретные вихри, ближайшие к расчетной точке M_Q. При решении пространственных задач обтекания крыла конечного размаха с отсосом внешнего потока уравнение вида (1) приводило к еще большему усложнению вычислительного алгоритма в методе дискретных замкнутых вихревых рамок (м.д.з.в.р.).

Начиная с работ [2,8] условие не протекания начали выполнять не традиционно на стороне L^{-} во всех точках $M\in L$. Тогда оно приобретает вид

$$\vec{V}_{\gamma}^{-}(M_0)\vec{n}_{M_0}=-\vec{U}_0^{-}(M_0)\vec{n}_{M_0}-\vec{V}_Q^{-}(M_0)\vec{n}_{M_0},\ M_0\in L. \qquad (2)$$

Известно[9], что $\vec{V}_{\gamma}^{+}(M_0)\vec{n}_{M_0}=\vec{V}_{\gamma}^{-}(M_0)\vec{n}_{M_0}$, $\vec{U}_0^{+}(M_0)\vec{n}_{M_0}=\vec{U}_0^{-}(M_0)\vec{n}_{M_0}$. Из гидродинамической сущности стока следует, что

$$\vec{V}_Q^{-}(M_0)\vec{n}_{M_0}=f_2(M_0)+\frac{Q}{2}\delta(M_0-M_Q),\ M_0\in L. \qquad (3)$$

Таким образом, левые части уравнений (1) и (2) совпадают, а правые части отличаются на дельта функцию. При этом решением этих уравнений в обоих случаях является одна и та же функция. В уравнении (2) нам не надо помнить в какой точке находится отсос, так как эту информацию несет в себе дельта функция.

Различия в применении м.д.в. для численного решения уравнений (1) и (2) продемонстрируем на примере, когда L=[-1,1] оси OX и задача циркуляционная. В этом случае уравнение (1) имеет вид [1]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\gamma(x)dx}{x_0-x}=f_1(x_0),\ x_0\in(-1,1),\ x_0\neq q\in(-1,1), \qquad (4)$$

где функция $f_1(M_0)$ -гладкая на [-1,1] функция. Возьмем дискретные вихри в точках x_i, i=1,...,n, при их равномерном расположении с шагом h и расчетные точки $x_{0i}=x_i+\frac{h}{2}$, i=1,...,n. При этом предполагаем $q=x_{0j_q}$. В точке q расположен сток интенсивности Q. В первых вычислительных схемах [1] уравнение (4) для циркуляционной задачи заменялось следующей с.л.а.у.

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j_q}}^{n}\Gamma_i\omega_{ij}=f_1(x_{0j})-\Gamma_{j_q}\omega_{j_q j},\ j=1,\ldots,n,\ j\neq j_q, \tag{5}$$

где $\Gamma_i=\gamma_n(x_i)\,h$, $\Gamma_{j_q}=\frac{2Q}{\pi h}$, $\omega_{ij}=\frac{1}{\pi(x_{0j}-x_i)}$. Если решение системы (5) обозначить $\gamma_n^-(x_i)$, а решение системы

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j_q+1}}^{n}\Gamma_i\omega_{ij}=f_1(x_{0j})-\Gamma_{j_q+1}\omega_{j_q+1\,j},\ j=1,\ldots,n,\ j\neq j_q, \tag{6}$$

обозначить через $\gamma_n^+(x_i)$, то численное решение $\gamma_n(x_i)=\frac{1}{2}(\gamma_n^-(x_i)+\gamma_n^+(x_i))$ значительно ближе лежит к точному решению. Поэтому по предложению Полянского Ю.Н. вместо системы (5) или (6) стали брать (с соответствующим математическим обоснованием) систему [10]

$$\sum_{i=1}^{n}\Gamma_i\omega_{ij}=f_1(x_{0j}),\ j=1,\ldots,n,\ j\neq j_q, \tag{7}$$

$$\Gamma_{j_q}-\Gamma_{j_q+1}=\frac{4Q}{\pi h},\ j=j_q.$$

При отсутствии стока для циркуляционной задачи берут систему

$$\sum_{i=1}^{n}\Gamma_i\omega_{ij}=f_1(x_{0j}),\ j=1,\ldots,n. \tag{8}$$

Уравнение (2) для L=[-1,1] имеет вид

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\gamma(x)dx}{x_0-x}=f_1(x_0)+\frac{Q}{2}\delta(x_0-x_q),\ x_0\in(-1,1). \tag{9}$$

Для численного решения уравнения (9) введем функцию $\delta_h(x_0-x_q)=0$, при $x_0\notin[x_{j_q},x_{j_q+1}]$, и $\delta_h(x_0-x_q)=\frac{1}{h}$, $x_0\in(x_{j_q},x_{j_q+1})$. Теперь уравнение (9) для циркуляционной задачи заменяем следующей с.л.а.у. [11,12]

$$\sum_{i=1}^{n}\Gamma_i\omega_{ij}=f_1(x_{0j})+\frac{Q}{2}\delta_h(x_{0j}-x_q),\ j=1,\ldots,n. \tag{10}$$

В работе [12] дано доказательство сходимости решения системы (10) к точному решению уравнения (9) в циркуляционной задаче в точках x_i, i=1,…,n.

Важно отметить, что при отсутствии отсоса (т. е. Q=0) система (10) совпадает с системой (8), т. е. м.д.в. теперь в задачах с отсосом и без отсоса имеет один вид.

В пространственном случае задача обтекания крыла конечного размаха с отсосом внешнего потока на некоторой линии L поверхности σ крыла сводится к решению двумерного гиперсингулярного интегрального уравнения на поверхности σ с пространственной дельта функцией в правой части, которая имеет своим носителем кривую L. Пространственная дельта функция с носителем на кривой L это такая функция $\delta_L(M,M_0)$, $M\in L, M_0\in R^2$, $L\subset R^2$, где R^2- плоскость, что для любой финитной бесконечно дифференцируемой функции $f(M_0)$, определенной на плоскости R^2, выполняется соотношение

$$\iint_{R^2}\delta_L(M,M_0)f(M_0)dxdy=\int_L f(M)dl\,. \tag{11}$$

Левую часть соотношения (11) будем обозначать (δ_L,f). Численно это двумерное гиперсингулярное интегральное уравнение решается методом дискретных замкнутых вихревых рамок (м.д.з.в.р.) [13].

Интересно отметить, что задача о нахождении входного сопротивления проволочных антенн [14] привела к необходимости решения уравнения

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{g(x)dx}{(x_0-x)^2}=f(x_0)+\frac{A}{x_0-q},\ q, x_0\in(-1,1), \tag{12}$$

где A - некоторое число, а q – фиксированная точка интервала (-1,1).

Для численного решения уравнения (12) применяется метод дискретных вихревых пар.

Вывод. Изучение сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений в классе обобщенных функций позволило решить новый класс задач в аэродинамике и электродинамике и позволило построить более простые алгоритмы численного решения задач обтекания профилей и крыльев с отсосом внешнего потока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях, Москва, Наука, 1985, 256 с..
2. Вайникко Г.М., Лифанов И.К. Моделирование задач аэродинамики и дифракции волн и расширение интегральных операторов типа Коши на замкнутых и разомкнутых кривых, Дифференциальные уравнения, 2000, т.36, № 9, с. 1184-1195.
3. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения, Москва, ТОО «Янус-К», 2001, 510 с..

4. Бушуев В.И., Лифанов И.К. К расчету аэродинамических характеристик летательного аппарата со струйно-эжекторной механизацией, Труды XVII чтений К.Э. Циолковского, Секция «Авиация и воздухоплавание», Москва, 1983, с. 32-37..
5. Бушуев В.И., Лифанов И.К. Численное решение сингулярных интегральных уравнений в классе сингулярных функций и задача отсоса потока в аэродинамике, ЖВМ и МФ, т. 26, № 10, с. 1572-1577.
6. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент, Москва, ТОО «Янус», 1995, 520 с..
7. Владимиров В.С. Уравнения математической физики, Москва, Наука, 1976, 528 с..
8. Вайникко Г.М., Лифанов И.К. Обобщение и использование псевдодифференциальных операторов в моделировании некоторых задач механики, ДАН РФ, 2000, т. 373, № 2, с. 157-160.
9. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа, Москва, Наука, 1978, 736 с..
10. Лифанов И.К., Сетуха А.В. О сингулярных решениях некоторых краевых задач и сингулярных интегральных уравнений, Дифференциальные уравнения, 1999, т. 35, № 9, с. 1227-1241.
11. Димитрогло М.Г., Лифанов И.К., Сетуха А.В. О новом способе расчета обтекания тонкого профиля идеальной жидкостью с отсосом внешнего потока, НММ кафедры аэродинамики ВАТУ под редакцией Желанникова А.И., Москва, 2002, с. 96-112.
12. Вайникко Г.М., Лебедева Н.В., Лифанов И.К. Численное решение сингулярного и гиперсингулярного интегрального уравнения на отрезке и дельта функция, Математический сборник, 2002, т. 193, № 10, с.3-16.
13. Димитрогло М.Г., Лифанов И.К., Сетуха А.В. Расчет обтекания крыла конечного размаха с отсосом внешнего потока, НММ кафедры аэродинамики ВАТУ под редакцией Желанникова А.И., Москва, 2002, с. 113-132.
14. Лифанов И.К., Ненашев А.С. Новый подход к теории тонких проволочных антенн, появится в ж. «Эдектромагнитные волны и электронные системы» в 2003 г.