Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 517.968.6. № 590, 2003, с. 183-187

Приближенное решение многоэлементных задач Карлемана, заданных на системе параллельных прямых

В. Н. Озийчук, Н. Я. Тихоненко
Южно-украинский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского, Украина
Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова, Украина

Grounding the methods of approximate solution of multiple unit Karleman's tasks, which one sited on system of parallel to real axis lines.

Широкий круг задач математической физики приводится к решению многоэлементных задач Карлемана, краевые условия которых заданны на системе прямых, параллельных вещественной оси R, в частности, к задаче: найти функцию $\Phi(z)$, аналитическую в полосе $-1<I_m z<1$ и такую, что интеграл $\int\limits_R |\Phi(x+iy)|^2 dx$ ограничен равномерно на $y\in[-1;1]$, по краевому условию

$$K\Phi \equiv A(x)\Phi(x+i)+B(x)\Phi(x-i)+C(x)\Phi(x)=H(x),\ x\in R, \quad (1)$$

где $A(x),B(x),C(x)\in C, H(x)\in L_2$ - известные функции. Согласно работе [1] задача (1) является нормально разрешимой, если

$$\Delta(x)=0{,}25\left[3A(x)-B(x)\right]\left[3B\left(\frac{1}{x}\right)-A\left(\frac{1}{x}\right)\right]+C(x)C\left(\frac{1}{x}\right)\neq 0,\ x\in R.$$

При этом её индекс определяется по формуле $æ = -ind\Delta(x)$.

Приближенное решение задачи (1) ищем в виде

$$\Phi_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\left[C_k^+\varphi_{k+2}^+(x)+C_k^-\varphi_{k+2}^-(x)\right], \quad (2)$$

где

$$\varphi_k^+(x)=\frac{1}{x+ik},\ \varphi_k^-(x)=\frac{1}{x-ik},\ k=1,2,\dots. \quad (3)$$

Согласно работе [3] система функций (2) является замкнутой в пространстве L_2, начиная с любого натурального числа m, $k=m$, $m+1,\dots$, в виду расходимости ряда $\sum\limits_{k=m}^{\infty}\frac{k}{1+k^2}$. Отметим необходимые в дальнейшем и легко проверяемые свойства функций система (2)

$$\varphi_k^{\pm}(x\pm i)=\varphi_{k+1}^{\pm}(x),\ \varphi_{k+1}^{\pm}(x\mp i)=\varphi_k^{\pm}(x).$$

В виду этих свойств функция $\Phi_n(x)$ является аналитической в полосе $-1 < I_m z < 1$ и интеграл $\int_R |\Phi_n(x+iy)|^2 dx$ ограничен равномерно для всех $y \in [-1;1]$.

Отметим, что нам неизвестны работы, посвященные построению и обоснованию методов приближенного решения задачи (1). Ниже приведём обоснование методов наименьших квадратов, Бубнова-Галёркина и коллокаций приближенного решения задачи (1).

1. <u>Метод наименьших квадратов.</u> Приближенные решения задачи (1) ищем в виде (2), неизвестные постоянные $C_k^{\pm}$ определяем из условия достижения минимума функционала $I = \|(K\Phi_n)(x) - H(x)\|_{L_2}^2$, т.е. из систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{n}\left[C_k^+ D_{jk} + C_k^- E_{jk}\right] = H_j^+, \quad \sum_{k=1}^{n}\left[C_k^+ F_{jk} + C_k^- G_{jk}\right] = H_j^-, \quad j = \overline{1,n}, \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned}
D_{jk} &= \left(A\varphi_{k+3}^+ + B\varphi_{k+1}^+ + C\varphi_{k+2}^+, A\varphi_{j+3}^+ + B\varphi_{j+1}^+ + C\varphi_{j+2}^+\right),\\
E_{jk} &= \left(A\varphi_{k+1}^- + B\varphi_{k+3}^- + C\varphi_{k+2}^-, A\varphi_{j+3}^+ + B\varphi_{j+1}^+ + C\varphi_{j+2}^+\right),\\
H_j^+ &= \left(H, A\varphi_{j+3}^+ + B\varphi_{j+1}^+ + C\varphi_{j+2}^+\right), \quad H_j^- = \left(H, A\varphi_{j+1}^- + B\varphi_{j+3}^- + C\varphi_{j+2}^-\right)\\
F_{jk} &= \left(A\varphi_{k+3}^+ + B\varphi_{k+1}^+ + C\varphi_{k+2}^+, A\varphi_{j+1}^- + B\varphi_{j+3}^- + C\varphi_{j+2}^-\right),\\
G_{jk} &= \left(A\varphi_{k+1}^- + B\varphi_{k+3}^- + C\varphi_{k+2}^-, A\varphi_{j+1}^- + B\varphi_{j+3}^- + C\varphi_{j+2}^-\right), \quad k, j = \overline{1,n},
\end{aligned}$$

где здесь и ниже $(\bullet,\bullet)$ - означает скалярное произведение в L_2.

<u>Теорема 1.</u> Пусть функции $A(x), B(x), C(x) \in C, H(x) \in L_2$; $\Delta(x) \neq 0$ на R, $æ = 0$ и задача (1) имеет единственное решение. Тогда система уравнений (4) однозначно разрешима при всех n, а приближенные решения $\Phi_n(x)$ задачи (1) сходятся в пространстве L_2 к её точному решению $\Phi(x)$, т.е.

$$\|\Phi(x) - \Phi_n(x)\|_{L_2} \to 0, \quad n \to \infty \tag{5}$$

Если же функции $A(x), B(x), C(x) \in H_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, функция $H(x) \in \overset{o}{H}_{\alpha 1}$, $0 < \alpha < 1$, то приближенные решения задачи (1) сходятся к её точному решению со скоростью

$$\|\Phi(x) - \Phi_n(x)\|_{L_2} = O\left[\left(\sigma_n^{-1}\ln\sigma_n\right)^{-\alpha}\right], \tag{6}$$

где $\sigma_n = \sum_{k=2}^{n}\frac{k}{1+k^2}$.

<u>Доказательство.</u> В условиях теоремы определённой формулой (1) оператор $K: L_2 \to L_2$ непрерывно обратим [1]. Тогда на основании роботы [4, стр. 47] справедлива оценка

$$\|\Phi(x)-\Phi_n(x)\|_{L_2} = \|K\| \, \|K^{-1}\| E_n(\Phi)_{L_2},$$

где $E_n(\Phi)_{L_2}$ - наилучшее приближение в пространстве L_2 решения задачи (1) агрегатами вида (2). Если функция $H(x)\in L_2$, то решение $\Phi(x)$ задачи (1) принадлежит пространству L_2 [1], если же функции $A(x), B(x), C(x) \in H_\alpha$, $H(x)\in \overset{o}{H}_{\alpha 1}$, то решение задачи (1) принадлежит пространству $\overset{o}{H}_{\alpha 1}$. Согласно работе [3], если $\Phi(x)\in L_2$, то $E_n(\Phi)_{L_2}\to 0$, $n\to\infty$. Если же $\Phi(x)\in \overset{o}{H}_{\alpha 1}$, то $E_n(\Phi)_{L_2} \le d_1\left(\sigma_n^{-1}\ln\sigma_n\right)^\alpha$, где здесь и ниже d_i - вполне определённые постоянные, независящие от n. Ввиду ограниченности операторов K и K^{-1} из этого следуют оценки (5) и (6).

2. <u>Метод Бубнова-Галёркина.</u> Приближенные решения задачи (1) ищем в виде (2), а неизвестные постоянные $C_k^\pm$ определяем из системы уравнений $\left(K\Phi_n, \varphi_j^\pm\right) = \left(H, \varphi_j^\pm\right)$, $j=\overline{1,n}$, которую можно переписать в следующем виде

$$\sum_{k=1}^{n}\left(C_k^+ D_{jk}^\pm + C_k^- E_{jk}^\pm\right) = H_j^\pm, \quad j=\overline{1,n}, \tag{7}$$

где

$$D_{jk}^\pm = \left(A\varphi_{k+3}^+ + B\varphi_{k+1}^+ + C\varphi_{k+2}^+, \varphi_{j\pm 2}^-\right), \quad H_j^\pm = \left(H, \varphi_{j+2}^\pm\right),$$
$$E_{jk}^\pm = \left(A\varphi_{k+1}^- + B\varphi_{k+3}^- + C\varphi_{k+2}^-, \varphi_{j+2}^\pm\right), \quad k,j=\overline{1,n}.$$

<u>Теорема 2.</u> Пусть функции $A(x), B(x), C(x)\in C, H(x)\in L_2$; $\Delta(x)\ne 0$ на R, $æ=0$ и задача (1) имеет единственное решение. Тогда система уравнений (7) однозначно разрешима при достаточно больших n, а приближенные решения задачи (1) сходятся в пространстве L_2 к её точному решению, т.е. справедлива оценка (5). Если же функции $A(x), B(x), C(x)\in H_\alpha$, $H(x)\in \overset{o}{H}_{\alpha 1}$, то приближенные решения задачи (1) сходятся к её точному решению со скоростью (6).

Если оператор K - положительно определённый (например: $A(x)>0$, $B(x)>0$, $C(x)>0$), то доказательство этого утверждения следует из теоремы 1. Если же оператор K не является положительно определённым, то доказательство этого утверждения следует из работ [4, 5].

3. <u>Метод коллокаций.</u> Пусть функция $f(x)\in C_{01}$. Обозначим через L_n оператор, который ставит в соответствие каждой функции $f(x)\in C_{01}$ её интерполяционный многочлен Логранжа [6], т.е.

$$(L_n H)(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k w_k(x), \quad a_k = \frac{1}{2n+1}\sum_{j=-n}^{n} f(x_j) e^{-\frac{2\pi i}{2n+1}jk},$$

где $w_k(x)=\left[\frac{x-i}{x+i}\right]^k$, $k=0,\pm1,\ldots$, а x_j - узлы интерполяции вида

$$x_j=-ctg\frac{\pi}{2n+1}j,\ j=\overline{-n,n}. \tag{8}$$

Приближенные решения задачи (1) ищем в виде (2), а неизвестные постоянные $C_k^{\pm}$ определяем из системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{A(x_j)}{x_j+(k+3)i}+\frac{B(x_j)}{x_j+(k+1)i}+\frac{C(x_j)}{x_j+(k+2)i}\right)C_k^{+}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{A(x_j)}{x_j-(k+1)i}+\frac{B(x_j)}{x_j-(k+3)i}+\frac{C(x_j)}{x_j-(k+2)i}\right)C_k^{-}\right\}=H(x_j),\ \ j=\overline{-n.n}, \tag{9}$$

где x_j - узлы коллокаций (8). Ясно, что систему уравнений (9) можно записать в виде $L_nK\Phi_n=L_nH$.

<u>**Теорема 3.**</u> Пусть функции $A(x),B(x),C(x)\in H_\alpha^{(r)}$, $r\geq 0$, $0<\alpha<1$, $H(x)\in \overset{o}{H}{}_{\alpha 1}^{(r)}$, $r\geq 0$, $0<\alpha<1$; $\Delta(x)\neq 0$ на R, æ$=0$ и система уравнений (1) имеет единственное решение. Тогда система уравнений (9) однозначно разрешима при достаточно больших n, а приближенные решения задачи (1) при $r=0$ сходятся в пространстве L_2 к её точному решению, т.е. справедлива оценка (5), а при $r\geq 1$ приближенные решения задачи (1) сходятся к её точному решению со скоростью

$$\|\Phi(x)-\Phi_n(x)\|_{L_2}=O\left[n^{-r-\alpha}\right].$$

Доказательство этого утверждения производится на основе результатов работ [3, 5, 6].

<u>*Замечание.*</u> Аналогичным способом строятся методы наименьших квадратов, Бубнова-Галёркина и коллокаций приближенного решения задач Карлемана вида

$$\sum_{k=-m}^{m}A_k(x)\Phi(x+ik)=H(x),\ x\in R. \tag{10}$$

При численной реализации приведённые методы приближенного решения задачи (1) показали высокую эффективность и могут быть применены к приближенному решению задачи вида (10) и других краевых задач теории аналитических функций, краевые условия которых заданы на системе параллельных прямых.

ЛИТЕРАТУРА

1. Василевский Н.Л., Карелин А.А., Керекеша П.В., Литвинчук Г.С. Об одном классе сингулярных интегральных уравнений с инволюцией и его

применениях в теории краевых задач для дифференциальных уравнений в частности производных. // Дифференц. уравн. – 1977.–Т. 13, №9.–С. 1692-1700; 1977.–Т. 13, №11. – С. 2051–2062.
2. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 382с.
3. Русак В.Н. Рациональные функции, как аппарат приближения. – Минск: БГУ, 1979. – 174с.
4. Иванов В.В. Теория приближенных методов и её применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. – Киев: Наукова думка, 1968. – 287с.
5. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Гостехиздат, 1957. – 342с.
6. Тихоненко Н.Я., Лисицина И.Н. Интерполяция функций на вещественной оси и приложения // Вісник Київськ. ун-ту. Серія фіз.-мат. наук, 1998. – вип. 2. – С. 77-86.