Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
№ 590, 2003, с. 188-192

УДК 519.863

К проблеме снижения размерности задач оптимизации

Ю. Т. Олейник

Макеевский экономико-гуманитарный институт, Украина

Considered have been the methods of reduction of dimensions based on scantily explored ideas of adjusting linear restrictions to the transportation form and the double character of the problems of non-linear programming. Investigated are the necessary and sufficient conditions of applicability and possible fields of application of these approaches.

Численные эксперименты, основанные на реализации МДО в задачах математической физики, зачастую связаны с решением больших систем линейных алгебраических уравнений либо задач оптимизации с линейными ограничениями. В связи с этим остается актуальной проблема снижения размерности и упрощения общих алгоритмов реализации таких моделей.

Линейная оптимизация.

Поставим задачу редукции системы линейных уравнений

$$AX = A_0,\ A_0 \ge 0 \tag{1}$$

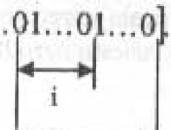
к транспортному виду

$$TX = b,\ b = \left[a_i,\ b_j,\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right] \ge 0\ , \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{3}$$

Матрицу T составляют так называемые векторы коммуникаций, ее s-й столбец имеет вид

$$P_s = P_{(i-1)n+j} = \left[0\ldots01\ldots01\ldots0\right]$$



В силу условия замкнутости (3) число линейно-независимых уравнений системы (2) равно $m+n-1$. Поэтому в дальнейших рассуждениях будем считать, что матрица T имеет размеры $(m+n-1)\times mn$ и ранг $r_T = m+n-1$, а вектор b имеет размеры $(m+n-1)\times 1$ (последнее уравнение в (2) отброшено).

Прямоугольная матрица A эквивалентна транспортной матрице T тех же размеров, если существуют две невырожденные квадратные матрицы P и Q такие, что

$$PAQ = T\ . \tag{5}$$

Рассмотрим необходимые и достаточные условия выполнимости преобразования (5). Поскольку в системе (2) $m \geq 2$ и $n \geq 2$, причем $m \neq n$, то число переменных исходной системы (1) должно быть $l = mn \geq 6$, а количество уравнений $k = m + n - 1 \geq 4$. Поэтому к системе (2) сводятся только такие системы (1), у которых размеры матрицы A удовлетворяют условиям:

$k = m + n - 1 \geq 4,\ l = mn \geq 6,\ m \neq n$ - целые числа.(6)

Как известно из теории матриц [1], для того, чтобы две прямоугольные матрицы были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы эти матрицы имели один и тот же ранг:

$r_A = r_T = k = m + n - 1.$ (7)

Таким образом, при выполнении условий (6-7) матрица линейных ограничений A всегда эквивалентна транспортной.

Полученные выводы можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Совместная система линейных уравнений (1) приводится к системе (2) с помощью невырожденного линейного преобразования тогда и только тогда, если она удовлетворяет условиям (6-7), где k и l соответственно число уравнений и количество переменных системы (1), а m и n - число строк и столбцов системы (2).

Доказательство.

1. Пусть выполняются условия (6) и (7). Тогда матрица A эквивалентна транспортной матрице и существует невырожденное линейное преобразование (5), приводящее систему (1) к системе (2).

2. Пусть система (1) редуцируется к системе (2), то есть существует невырожденное линейное преобразование (5). Тогда матрицы A и T эквивалентны, имеют одинаковые размеры и

$$r_A = r_T = k = m + n - 1.$$

Так как систему (1) можно представить в виде (2), то $k = m + n - 1 \geq 4,\ l = mn \geq 6,\ m \neq n$ - целые числа.

Теорема доказана.

Следствия.

1. К системе (2) невырожденным линейным преобразованием приводится любая совместная система (1), удовлетворяющая условиям (6).

2. Преобразованием системы ограничений (1) к транспортному виду общая задача линейного программирования размеров $k \times l$ редуцируется к транспортной задаче размеров $l = m \times n$.

Рассмотрим методы нахождения преобразующих матриц P и Q.

Обозначим через G_1 и G_2 соответственно матрицы, к которым приводятся матрицы A и T методом исключения Гаусса. Матрицы G_1 и G_2 имеют верхнюю почти треугольную форму. Переход от матриц A и T к матрицам G_1 и G_2 осуществляется при помощи некоторых преобразующих матриц W_1 и W_2:

$$W_1 A = G_1,\ W_2 T = G_2. \quad (8)$$

Матрицы G_1, W_1, G_2, W_2 однозначно определяются заданием матриц A и T, причем W_1 и W_2 - невырождены [2]. Так как G_1 и G_2 обе имеют верхнюю почти треугольную форму, то существует некоторое невырожденное линейное преобразование B, такое, что

$$G_1 B = G_2 . \tag{9}$$

Элементы преобразующей матрицы $B = \|bsq,\ s,q = 1 \div l\|$ определяются из матричного уравнения (9), которое представляет собой l систем линейных уравнений с l неизвестными и k уравнениями в каждой:

$$\sum_{s=1}^{l} g_{ps}^{(1)} \cdot b_{sq} = g_{pq}^{(2)},\ p = \overline{1,k},\ q = \overline{1,l}, \tag{10}$$

где $G_1 = \left\lfloor g_{ps}^{(1)},\ p = \overline{1,k},\ s = \overline{1,l} \right\rfloor$, $G_2 = \left\lfloor g_{pq}^{(2)},\ p = \overline{1,k},\ q = \overline{1,l} \right\rfloor$

Так как $k < l$, то все системы (10) неопределенны и имеют по $l - k$ свободных и по k базисных неизвестных, поэтому элементы последних $l - k$ строк матрицы B могут быть выбраны произвольно (с учетом ее невырожденности) и не влияют на базисные решения (10).

Докажем следующую теорему.

Теорема 2. Если матрица A удовлетворяет условиям теоремы 1, можно положить

$$P = W_2^{-1} W_1,\ Q = B, \tag{11}$$

где B определяется из матричного уравнения (9).

Доказательство.

Так как A удовлетворяет теореме 1, то существует преобразование (5). Положим в нем $Q = B$, тогда из (8) и (9) следует:

$$T = W_2^{-1} G_2 = W_2^{-1} G_1 B = W_2^{-1} W_1 AB,$$

то есть

$$P = W_2^{-1} W_1,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. В случае выполнимости условий теоремы 1 система линейных уравнений (1) приводится к виду:

$$PAX = PA_0,$$

или

$$TY = W_2^{-1} W_1 A_0,\ \text{где}\ X = BY. \tag{12}$$

Для численного преобразования системы (1) к виду (12) заметим, что применение алгоритма Гаусса к матрице $\|AA_0\|$ дает одновременно матрицу G_1 и вектор $W_1 A_0$. Аналогично, применением алгоритма Гаусса к матрице $\|TE\|$ одновременно находятся матрицы G_2 и W_2.

Таким же образом можно доказать **теорему 2'**. Если матрица A удовлетворяет условиям теоремы 1, можно положить

$$Q=(W_4^{-1}W_3)', \ P=C, \tag{11'}$$

где W_3 и W_4 - соответственно матрицы, преобразующие транспонированные матрицы A' и T' к верхней почти треугольной форме G_3 и G_4, а C - определяется из матричного уравнения

$$G_3C'=G_4. \tag{9'}$$

В этом случае система (1) приводится к виду

$$TY=CA_0, \ X=(W_4^{-1}W_3)'Y. \tag{12'}$$

2. Нелинейная оптимизация

Представление моделей нелинейного программирования в виде задач о седловой точке позволяет ввести понятие двойственных задач НП. Для задач НП с выпуклыми и дифференцируемыми целевой функцией и ограничениями справедлива теорема, аналогичная теореме двойственности ЛП, и выполняются условия регулярности теоремы Куна-Таккера.

Как известно, размерности прямой и двойственной линейных задач совпадают. Но для нелинейных программ это условие выполняется не всегда, что позволяет снижать размерность моделей НП за счет перехода к двойственным задачам. Например, можно показать [3], что пары квадратичных программ

$$\max(b'X+X'CX), \ AX\le A_0, \ X\ge 0, \tag{13}$$

$$\min(A_0'Y-X'CX), \ A'Y-2CX\ge b, \ Y\ge 0, \ X\ge 0, \tag{14}$$

и

$$\min(b'X+X'Cx), \ AX\le A_0, \ X\ge 0, \tag{15}$$

$$\min(X'CX+A_0'Y), \ A'Y+2CX+b\ge 0, \ Y\ge 0, \ X\ge 0 \tag{16}$$

являются двойственными.

Квадратичную программу (13) запишем в виде задачи о седловой точке

$$\min_{x\ge 0}[\varphi(X,Y)-Y'\nabla_y\varphi(X,Y)], \ \nabla_y\varphi(X,Y)\le 0, \ Y\ge 0, \tag{17}$$

где $\varphi(X,Y)=-(b'X+X'CX)+Y'(AX-A_0)$ - функция Лагранжа.

По аналогии с линейным программированием определим двойственную задачу к (17)

$$\max_{y\ge 0}[\varphi(X,Y)-X'\nabla_x\varphi(X,Y)], \ \nabla_x\varphi(X,Y)\ge 0, \ X\ge 0, \tag{18}$$

и подставляя выражение для $\varphi(X,Y)$ в (18), получим запись двойственной к (17) задачи в виде (14).

Аналогично для (15), используя функцию Лагранжа

$$\varphi(X,Y)=b'X+X'CX+Y'(AX-A_0), \tag{19}$$

двойственную задачу можно представить в эквивалентной форме (16), причем

$$\min(b'X+X'CX)=-\min(X'CX+A_0'Y)=\max(X'CX+A_0'Y).$$

Условия регулярности соответственно имеют вид:

$$X_0(b+2CX_0-A'Y_0)=0;\ Y_0'(AX_0-A_0)=0 \quad (20)$$

и

$$X_0'(b+2CX_0+A'Y_0)=0,\ Y_0'(AX_0-A_0)=0, \quad (21)$$

где X_0 и Y_0 - оптимальные решения задач (17), (18).

Заметим, что если модели (14) и (16) содержат $n+m$ переменных $X=\{x_j,\ j=\overline{1,n}\}$ и $Y=\{y_i,\ i=\overline{1,m}\}$ при n ограничениях, то двойственные задачи (1) и (2) имеют n переменных $X=\{x_j,\ j=\overline{1,n}\}$ и m ограничений. Таким образом, если задача КП допускает представление в виде (14) или (16), то переход к двойственной задаче приводит к снижению ее размерности на величину n^2, где n - число ее ограничений. Полученные результаты позволяют решение квадратичной программы с $n+m$ переменными при n ограничениях без всяких громоздких матричных преобразований свести к решению двойственной задачи с n переменными и числом условий m, и системе не более m линейных уравнений, следующих из условий регулярности (17) или (18).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. –М.: Наука, 1988. –552с.
2. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры.- М.-Л.: Физматгиз., 1963. –734с.
3. Олейник Ю.Т. Двойственный метод снижения размерности задач квадратичного программирования //Экономическая кибернетика, 2002.-№1-2.-С.65-70.