Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 519. + 64
№ 590, 2003, с. 213-218

Сингулярные интегральные уравнения в численных конформных отображениях

Д. Г. Саникидзе, М. Г. Мирианашвили
Институт вычислительной математики им. Н.И. Мусхелишвили Академии Наук Грузии, Грузия

The question of application of singular integral equations to approximate conformal mappings is considered. On the basis of the so-called modified method of discrete rotations concrete calculation algorithm is elaborated. Results of solution of some numerical examples are given.

Применение граничных интегральных уравнений в теории конформных отображений областей хорошо известно из классической литературы (см., напр., [1, 2, 3]). По-видимому, основанные на этом методе отображения приводят во многих случаях к одним из эффективных схем для численной реализации таких задач. Тем не менее, применение граничных интегральных уравнений Фредгольма (что обычно и предполагается в упомянутом подходе) иногда связано с определенными неудобствами в аспекте осуществления реальных вычислительных процессов. Рассмотрения показывают, что с этой точки зрения более приемлемыми могут быть вычислительные схемы, основанные на использовании сингулярных интегральных уравнений. Приложения таких уравнений к исследованию граничных задач теории гармонических функций (вообще для многосвязных областей) также хорошо известны (см. [2, 4]).

На основе сказанного мы можем представить себе, что одним из наиболее важных шагов на этом пути является решение вопросов конструирования по возможности эффективных схем для численного решения порожденных упомянутой задачей сингулярных интегральных уравнений, их обоснование и оценки погрешности построенных отображающих функций в любой точке рассматриваемой области вплоть до её границы.

Излагая вкратце вывод граничных сингулярных интегральных уравнений для ряда конкретных задач, ради простоты будем рассматривать случай односвязных областей. Не оговаривая каждый раз, рассматриваемые области будем считать ограниченными (замкнутыми) контурами Ляпунова.

1. Отображение конечной односвязной области на единичный круг.

Пусть D^+ – упомянутая область в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ и L – ее граница. Считая, что начало координат находится в D^+, требуется найти функцию $\zeta = w(z)$, взаимнооднозначно и конформно отображающую данную область на внутренность единичного круга $|\zeta| \le 1$ при условиях $w(0) = 0$, $w'(0) > 0$. Искомую функцию $w(z)$ представим в виде

$$w(z) = ze^{\Phi(z)}, \tag{1}$$

где $\Phi(z)$ – однозначная аналитическая в области D^+ функция, причём $\operatorname{Im}\Phi(0)=0$. Далее, т. к. должно быть

$$\left|w^+(t)\right|=1 \quad (w^+(t)=\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^+}} w(z),\ t\in L),$$

то в силу (1) граничное условие задачи можно записать

$$\operatorname{Re}\Phi^+(t)=-\ln|t|. \tag{2}$$

Теперь функцию $\Phi(z)$ будем разыскивать в виде ([4], § 64)

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi}\int_L\frac{\varphi(t)}{t-z}dt+c_1+ic_2,$$

где под $\varphi(t)$ подразумевается действительная функция, удовлетворяющая на L условию Гельдера, а c_1, c_2 — действительные (не задаваемые заранее) постоянные. Из $\operatorname{Im}\Phi(0)=0$ следует

$$c_2=-\operatorname{Im}\frac{1}{\pi}\int_L\frac{\varphi(t)}{t}dt.$$

Далее, исходя из (2), на основании формулы Племеля-Сохоцкого получаем интегральное уравнение

$$\operatorname{Re}\frac{1}{\pi}\int_L\frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt+c_1=-\ln|t_0| \quad (t_0\in L) \tag{3}$$

(где сингулярный интеграл рассматривается в смысле главного значения). Константа c_1 в (3) может быть выражена через $\varphi(t)$ одним из указанных в [4] способом. Однако, с точки зрения вычислительных целей и ряда других соображений оказывается значительно более удобным положить

$$c_1=-\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)}{t-t_*}dt,$$

где t_* произвольно зафиксированная точка на L. Тем самым, граничное интегральное уравнение исходной задачи будет рассматриваться в виде

$$(K\varphi)(t_0)\equiv\operatorname{Re}\frac{1}{\pi}\int_L\frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt-\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)}{t-t_*}dt=-\ln|t_0|. \tag{4}$$

Аналогично тому, как в [4], можно показать, что соответствующее (4) однородное уравнение не имеет отличных от нуля решений.

2. Отображение бесконечной односвязной области на круг.

Пусть D^- представляет внешнюю по отношению D^+ область, g – дополнение единичного круга $|\zeta|\le 1$ до расширенной плоскости. Задача состоит в нахождении аналитической в D^- функции $\zeta=w(z)$, отображающей D^- взаимнооднозначно и конформно на область g. Если положить, что $w(\infty)=\infty$ и направление действительной оси в бесконечности остается неизменным, (ср. с [1], гл. V), то функцию w можно искать в виде (подразумевая, как и в предыдущем случае, что положительный обход L производится против движения часовой стрелки)

$$w(z) = aze^{-\Phi(z)},\ \Phi(z) = \frac{1}{\pi}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-z}dt,$$

где относительно функции $\varphi(t)$ приняты те же самые предположения, а под a подразумевается действительная положительная (не задаваемая заранее) постоянная. Соответствующее граничное условие в данном случае приводит к

$$\mathrm{Re}\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt = \ln|t_0| + \ln a \quad (t_0 \in L).$$

Или, полагая $a = e^c$, где

$$c = \mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_*}dt,$$

получаем граничное интегральное уравнение задачи в виде

$$(K\varphi)(t_0) \equiv \mathrm{Re}\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt - \mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_*}dt = \ln|t_0|. \tag{5}$$

Решением уравнения (5) очевидным образом определится и константа a.

Применяя обозначение

$$(A\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt,$$

запишем

$$(K\varphi)(t_0) = \mathrm{Re}\{(A\varphi)(t_0) + i(A\varphi)(t_*)\}.$$

Заметив ([4], §64)

$$(K\varphi)(t_0) = (A\varphi)(t_0) + (H\varphi)(t_0),$$

где

$$(H\varphi)(t_0) = -i\,\mathrm{Re}\,i(A\varphi)(t_0) + \mathrm{Re}\,i(A\varphi)(t_*),$$

усматривается, что (4), (5) представляют сингулярные интегральные уравнения первого рода с определенной регулярной частью.

Весьма удобный с различных точек зрения алгоритм для численного решения таких уравнений может быть построен применением модифицированной [5] схемы дискретных вихрей, основанной на приближениях

$$(A\varphi)(\tau_\nu) \approx i\varphi(\tau_\nu) + (Q_n\varphi)(\tau_\nu),$$

$$(Q_n\varphi)(\tau_\nu) = i\sum_{\sigma=1}^{n} p_{\nu+2\sigma-1}\frac{\varphi(\tau_{\nu+2\sigma-1}) - \varphi(\tau_\nu)}{\tau_{\nu+2\sigma-1} - \tau_\nu} \quad (\nu = \overline{1,2n}),$$

где $\{\tau_j\}_{j=1}^{2n} \in L$ $(\tau_j = \tau_{j+2n})$, $\{p_j\}_{j=1}^{n}$ – узлы и коэффициенты из [5]. На этой основе, полагая, что $\tau_\mu\tau_{\mu+1}$ $(\mu = \overline{1,2n})$ наименьшие дуги $\in L$ с концами $\tau_\mu, \tau_{\mu+1}$, аппрксимацию сингулярного интеграла $(A\varphi)(t_0)$ при любом $t_0 \in L$

осуществим выражением $(A_n\varphi)(t_0) \equiv i\varphi(t_0) + L_{n\mu}(Q_n\varphi)(t_0)$ $(t_0 \in \tau_\mu\tau_{\mu+1})$, где под $L_{n\mu}$ подразумевается линейный интерполянт по значениям $(Q_n\varphi)(\tau_\mu)$, $(Q_n\varphi)(\tau_{\mu+1})$. Исходя из этого и учитывая, что функция $\varphi(t)$ действительная, приближением левой части уравнений (4), (5) будем считать

$$(K_n\varphi)(t_0) \equiv \operatorname{Re}\{(A_n\varphi)(t_0) + i(A_n\varphi)(t_*)\} \ (L_{n\mu}(Q_n\varphi)(t_*) = (Q_n\varphi)(t_*)).$$

При этом предполагается, что точка $t_* \in L$ отлична от расчетных узлов.

Построенная на такой основе вычислительная схема приводит к линейной алгебраической системе с коэффициентами, имеющими довольно простую структуру (в отличие от систем, которые могут быть построены применением граничных интегральных уравнений Фредгольма).

Исследования к обоснованию изложенной схемы проводятся в Гельдеровом пространстве H_β $(0 < \beta < 1)$ и основываются на получении (в классе действительных функций) оценок, утверждающих стремление к нулю (при $n \to \infty$) выражений

$$\left\|A_n^{-1}(A_n - A)A^{-1}H\right\| \text{ и } \left\|A_n^{-1}(H - H_n)\right\|$$

(относительно A_n^{-1} и оценки $\left\|A_n^{-1}\right\|$ см. [5]), где H_n – аппроксимирующие H по данной схеме операторы. При этом к оценке $\left\|A_n^{-1}(A_n - A)A^{-1}H\right\|$ используется (с учетом ляпуновости L) представление ([4], §§51, 61) оператор-функции $\operatorname{Re} iA$ с данной (действительной) плотностью через интеграл с ядром вида

$$\frac{h(t_0,t)}{r^\lambda} \quad (r = |t - t_0|,\ 0 < \lambda < 1),$$

где $h(t_0,t)$ удовлетворяет условию Гельдера по обоим переменным. Наиболее существенные сложности связаны с вопросом получения нужной оценки $\left\|A_n^{-1}\right\|$ (сводящемся в конечном счете к оценке $\operatorname{Re} i(A - A_n)$ в H_β).

С точки зрения численных реализаций представляет интерес рассмотрение несколько упрощённых расчётных схем, которые могут быть получены, если в выражениях $(Q_n\varphi)(\tau_\nu)$ соответствующее значение $\varphi(\tau_\nu)$ заменить (см. [6]) интерполяционным выражением

$$\frac{\tau_\nu - \tau_{\nu+1}}{\tau_{\nu-1} - \tau_{\nu+1}}\varphi(\tau_{\nu-1}) + \frac{\tau_\nu - \tau_{\nu-1}}{\tau_{\nu+1} - \tau_{\nu-1}}\varphi(\tau_{\nu+1}).$$

Такая замена, не влекущая за собой сколько-нибудь существенной потери точности, значительно сокращает объём вычислений, что подтверждается и соответствующим численным экспериментом. Тем не менее, полное обоснование соответствующих упрощённых схем требует отдельного рассмотрения.

После того, как приближенные значения $\varphi_n \approx \varphi$ из соответствующих аппроксимирующих систем найдены, построение конформно отображаю-щих функций заключается в (приближенном) вычислении интегралов типа Коши в функциях $\Phi(z)$. При этом для z – близких к границе довольно хорошие результаты дает применение квадратурной формулы из [7].

Ниже приведены численные результаты решения отдельных примеров в виде таблиц 1, 2. Указанные в столбцах w числа представляют образы точек z (внутренних или граничных), найденных приближенно по данной здесь схеме; z^* – соответствующие прообразы, вычисленные по известным формулам, приведенным в таблицах. Сравнение значений z и z^* в определенной мере характеризует точность полученных численных результатов.

Таблица 1. *Отображение Улитки Паскаля ($x = \cos\vartheta + 0.2\cos 2\vartheta$, $y = \sin\vartheta + 0.2\sin 2\vartheta$) на единичный круг.*

z =1.20000+0.00000i		
n	w	$z^* = w + mw^2$
100	0.99989+0.00005i	1.19986+0.00007i
200	0.99997+0.00001i	1.19996+0.00002i
z =-0.7472136-0.3975739i		
100	-0.80903-0.58785i	-0.74724-0.39763i
200	-0.80902-0.58780i	-0.74722-0.39759i
z =-0.50000+0.20000i		
100	-0.54662+0.25597i	-0.49996+0.20000i
200	-0.54665+0.25597i	-0.49999+0.20000i

Таблица 2. *Отображение внешности эллипса ($x = 1.5\cos\vartheta$, $y = 0.5\sin\vartheta$) на внешность единичного круга.*

z =1.50000+0.00000i		
n	w	$z^* = w + m/w$
100	1.00073+0.00000i	1.50036+0.00000i
200	1.00018+0.00000i	1.50009+0.00000i
z =0.00000-0.50000i		
100	0.00000-0.99971i	0.00000-0.49957i
200	0.00000-0.99993i	0.00000-0.49989i
z =-1.50000+0.30000i		
100	-1.11642+0.45702i	-1.50000+0.30000i
200	-1.11642+0.45702i	-1.50000+0.30000i

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.-Л.: Физматгиз, –1962. – 708 с.
2. Михлин С.Г. Интегральные уравнения. – М.-Л.: Огиз, – 1949. –380 с.
3. Коппенфельс В.,Штальман Ф. Практика конформных отображений. – М.: Изд. иност. лит., – 1963. –406 с.
4. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, – 1962. – 600 с.
5. Саникидзе Д.Г. О некоторых оценках в модифицированной схеме метода дискретных вихрей.// Тр. VIII Межд. Симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах матем. физ.» – 1999. – С. 118-120.
6. Саникидзе Д.Г., Мирианашвили М.Г. К вопросу уменьшения размерности систем в модифицированной схеме дискретных вихрей.//Тр. IX Межд. Симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах матем. физ.» – 2000. – С. 398-402.
7. Саникидзе Д.Г., Нинидзе К.Р. Метод свободных параметров в приближенном вычислении интегралов типа Коши.//Тр. X Межд. Симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах матем. физ.» – 2001. – С. 299-302.