

## Моделирование фильтров скважин

С. Л. Ставцев

ИВМ РАН, Россия

Various models of filters of chinks in three-dimensional problems of a filtration are considered: 1) model of a linear drain; 2) modelling of the filter of a chink equipotential a surface as the circular cylinder; 3) modelling of the filter of a chink by an impermeable surface with drains. The decision of a problem is reduced to system the singular and hypersingular integral equations. In case of use of the third model is solved the hypersingular equations with the generalized functions in the right part. The substantiation of use of this or that model is given.

Одним из основных вопросов задач фильтрации является построение модели скважины.

Рассмотрим работу скважины в области фильтрации  $D$ , ограниченной поверхностью  $\sigma$ . Течение жидкости в рассматриваемой области с проницаемостью среды  $k = const$  описывается с помощью потенциала  $\varphi(M)$ , удовлетворяющего уравнению Лапласа [1,6]:

$$\Delta\varphi(M) = 0, \quad M \in D. \quad (1)$$

Фильтрацию жидкости к скважине будем считать напорной, то есть на поверхности питания  $\sigma$  задаётся условие постоянства потенциала [1,6]:

$$\varphi(M) = 0, \quad M \in \sigma. \quad (2)$$

и задаётся условие для скважины (для каждой модели скважины условие своё). Задача состоит в нахождении дебита скважины  $q$ .

Скважина состоит из глухой части - трубы, по которой выкачивается нефть, и фильтра скважины, который выфильтровывает жидкость из грунта. Так как диаметр глухой части трубы  $R_c$  мал по сравнению с длиной фильтра  $L$  и размерами области фильтрации  $D$ , то влиянием глухой части скважины на течение жидкости мы будем пренебрегать. В дальнейшем, говоря о скважине, мы будем подразумевать её фильтр.

Скважина представляет собой перфорированную трубу, т.е. цилиндр с отверстиями. Положение скважины определяется через координаты одного из концов скважины  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  и сферические углы  $\theta, \alpha$ , определяющие направление оси скважины (Рис. 1).

### 1. Модели скважин.

1. В ряде работ [1,2,4,6,7] скважина моделируется линейным стоком, который представляет собой отрезок точечных стоков, расположенных по оси скважины с одинаковой интенсивностью  $q$ , равному дебиту скважины.

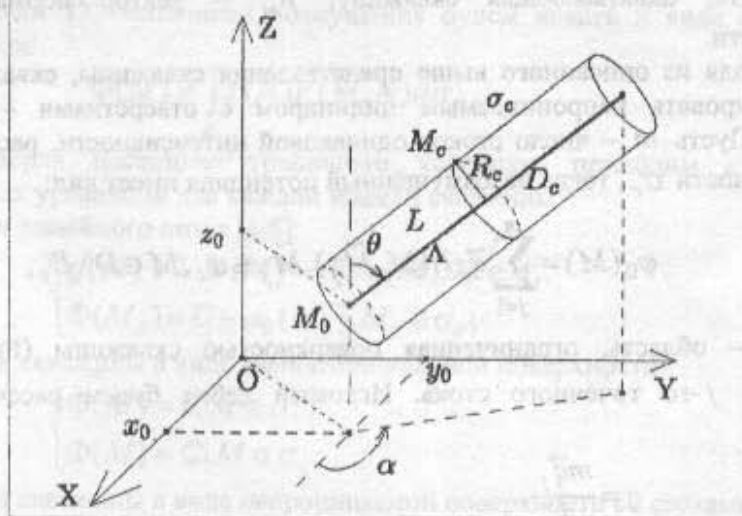


Рис. 1. Параметры скважины.

При моделировании скважины линейным стоком потенциал течения в отсутствие поверхности  $\sigma$  имеют вид:

$$\varphi_0(M) = q \int_{\Lambda} F(M, N) dl_N, \quad M \in D, \quad (3)$$

где  $\Lambda$  – отрезок, вдоль которого распределены точечные стоки,  $N \in \Lambda$ ,  $F(M, N)$  – фундаментальное решение уравнения (1). Функция  $F(M, N)$  известна [1]. Для нахождения дебита  $q$  зададим потенциалы в точке  $M_c$  на поверхности скважины  $\sigma_c$ :

$$\varphi(M_c) = C, \quad M_c \in \sigma_c, \quad (4)$$

где  $C = const$  – заданная величина. Точка  $M_c$  расположена на расстоянии  $R_c$  от отрезка  $\Lambda$ .

2. В предыдущей модели точка  $M_c$  условия (4) берётся произвольно на поверхности  $\sigma_c$ . Чтобы избежать этой неопределённости в выборе точки  $M_c$ , будем считать цилиндрическую поверхность скважины  $\sigma_c$  (Рис. 1) эквипотенциальной поверхностью, то есть

$$\varphi(M) = C, \quad M \in \sigma_c. \quad (5)$$

В качестве невозмущённого потенциала возьмём

$$\varphi_0(M) = 0. \quad (6)$$

Дебит скважины для этой модели будем рассчитывать по формуле:

$$q = \frac{1}{L} \int_{\sigma} \vec{V}(M) \cdot \vec{n}_M d\sigma_M,$$

где  $\vec{V}(M)$  – вектор скорости фильтрационного течения в точке  $M$ , рассчитываемый по закону Дарси [1,6];  $\tilde{\sigma}$  – произвольная замкнутая

поверхность, охватывающая скважину;  $\vec{n}_M$  – вектор нормали к этой поверхности.

3. Исходя из описанного выше представления скважины, скважину можно промоделировать непроницаемым цилиндром с отверстиями – точечными стоками. Пусть  $m$  – число стоков одинаковой интенсивности, расположенных на поверхности  $\sigma_c$ , тогда невозмущенный потенциал имеет вид:

$$\varphi_0(M) = \sum_{j=1}^m \tilde{q}_j F(M, \tilde{M}_j), \tilde{M}_j \in \sigma_c, M \in D \setminus D_c, \quad (7)$$

где  $D_c$  – область, ограниченная поверхностью скважины (Рис. 1),  $\tilde{q}_j$  – мощность  $j$ -го точечного стока. Искомый дебит будем рассчитывать по формуле:

$$q = \frac{m\tilde{q}_j}{L}. \quad (8)$$

Согласно [3], на непроницаемой поверхности  $\sigma_c$  зададим условие:

$$\frac{\partial \varphi(M)}{\partial n_M} = -\sum_{j=1}^m \frac{\tilde{q}_j}{2} \delta(M - \tilde{M}_j), M \in \sigma_c. \quad (9)$$

Так как согласно [3] скорости течения в области  $D_c$  равны нулю, то мы вправе записать условие

$$\varphi(M_c) = C, M_c \in D_c \quad (10)$$

для любой точки  $M_c$  из области  $D_c$ , например, для середины отрезка  $\Lambda$ .

## 2. Сведение задачи к системе интегральных уравнений.

Потенциал возмущения  $\varphi(M)$  будем искать в виде

$$\varphi(M) = \varphi_0(M) + \Phi(M), \quad (11)$$

где  $\Phi(M)$  – потенциал возмущенного течения, обусловленного наличием границ. Его для моделей {1} и {3} будем искать в виде потенциала двойного слоя:

$$\Phi(M) = \int_{\sigma} g(N) \frac{\partial F(M, N)}{\partial n_N} d\sigma_N, \quad (12)$$

и

$$\Phi(M) = \int_{\sigma} g(N) \frac{\partial F(M, N)}{\partial n_N} d\sigma_N + \int_{\sigma} f(P) \frac{\partial F(M, P)}{\partial n_P} d\sigma_P \quad (13)$$

соответственно. В (12)-(13)  $g(N)$  – плотность распределения особенностей на поверхности  $\sigma$ ;  $f(N)$  – плотность распределения особенностей на поверхности  $\sigma_c$ .

Для модели {2} потенциал возмущения будем искать в виде потенциала простого слоя:

$$\Phi(M) = \int_{\sigma} f(N)F(M, N)d\sigma_N.$$

Удовлетворяя потенциал граничным условиям, приходим к системам интегральных уравнений для каждой модели скважины:

- для модели линейного стока [1,5]:

$$\begin{cases} g(M) + 2 \cdot \Phi(M) = -2\varphi_0(M), M \in \sigma, \\ \Phi(M_c) = C - \varphi_0(M_c), M_c \in \sigma_c; \end{cases} \quad (14)$$

- для модели скважины в виде эквипотенциальной поверхности:

$$\begin{cases} \Phi(M) = 0, M \in \sigma, \\ \Phi(M) = C, M \in \sigma_c; \end{cases} \quad (15)$$

- для модели скважины в виде непроницаемой поверхности со стоками:

$$\begin{cases} g(M) + 2 \cdot \Phi(M) = -2\varphi_0(M), M \in \sigma, \\ K(M) \frac{\partial \Phi(M)}{\partial n_M} = -K(M) \frac{\partial \varphi_0(M)}{\partial n_M}, M \in \sigma_c, \\ \Phi(M_c) = C, M_c \in D_c. \end{cases} \quad (16)$$

В системах (14), (16) берётся прямое значение потенциала возмущения  $\Phi(M)$  на соответствующих поверхностях.

Системы (14)-(16) содержат как уравнения типа Фредгольма, так и гиперсингулярные интегральные уравнения с обобщёнными функциями в правой части.

### 3. Результаты исследований.

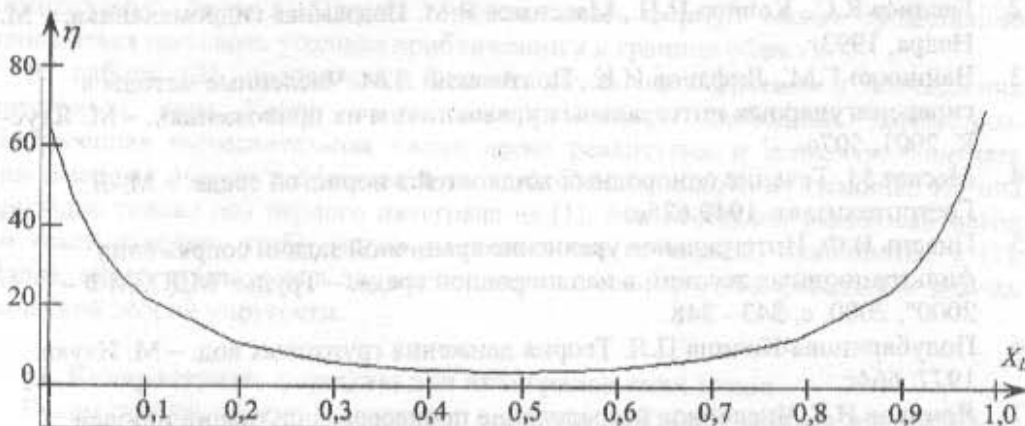


Рис. 2. Зависимость относительной погрешности дебита скважины при изменении положения точки  $M_c$  на поверхности скважины

В ходе проведённых исследований было установлено, что при моделировании скважины линейным стоком дебит скважины сильно зависит от выбора точки  $M_c$  на поверхности скважины. Это подтверждает зависимость

величины  $\eta = \left(1 - \frac{q}{q_0}\right) \cdot 100\%$ , изображённая на рисунке 2, где по оси

абсцисс откладывается величина  $X_L = \frac{d}{L}$ , где  $d$  – расстояние от точки  $M_c$  до основания цилиндрической поверхности  $\sigma_c$ , содержащей точку  $M_0$ ;  $L$  – длина фильтра скважины;  $q_0$  – дебит скважины при  $X_L = 0,5$  (случай из Рис.1).

Проводя расчёты с другими моделями скважин – моделями {2} и {3}, приходим к тому, что в модели «линейного стока» [1] величина дебита занижена на несколько десятков процентов и при использовании этой модели точку  $M_c$  на поверхности  $\sigma_c$  необходимо брать на расстоянии  $X_L = 0,85L$ .

Как показывает анализ результатов исследований для разных моделей скважин, влияние поверхности питания на дебит скважины оказывается одним и тем же. При приближении скважины к поверхности питания  $\sigma$  относительный дебит скважины увеличивается на величину одного и того же порядка – 50–60%, хотя величина  $q$  больше аналогичной величины модели «линейного стока» на 20%.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Аксюхин А.А. Математическое моделирование граничных задач фильтрации к скважине в неоднородных слоях грунта. – Автореф. канд.дисс. Орёл, ОГУ. 2000, 20с.
2. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика. – М.: Недра, 1993г.
3. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.М. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложениях. – М. Янус-К, 2001, 507с.
4. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. – М.-Л.: Гостоптехиздат. 1949.628с.
5. Пивень В.Ф. Интегральное уравнение граничной задачи сопряжения фильтрационных течений в неоднородной среде. – Труды "МДОЗМФ - 2000", 2000, с. 343 - 348.
6. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. – М. Наука. 1977. 664с.
7. Ярмахов И.Г. Численное исследование процессов фильтрации и полей постоянного тока в задачах каротажа скважин. – Автореф. канд. дисс. М., МГУ, 1983. 10с.