Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
№ 590, 2003, с. 235-239

УДК 519.64

Вычисление интегралов типа Коши в задачах плоской теории упругости

Ш. С. Хубежты
Северо-Осетинский государственный университет им. К.Л.Хетагурова, г.Владикавказ, Россия

Quadrature formulas for Cauchy type integrals are constructed, which are convinient for calculation of integrals near the boundary of the given domain. The error is estimated and the ways of calculation of stress and displacement of the plane theory of elasticity with the help of these formulas are indicated.

В задачах математической теории упругости (см. [1]) широко используются интегралы типа Коши следующего вида:

$$u(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)}{t-z}dt,\qquad u_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)}{t-z}d\bar t,$$
$$u_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\bar t\varphi(t)}{(t-z)^2}dt,\quad u_3(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\bar t\varphi(t)}{(t-z)^3}dt, \tag{1}$$

где L - замкнутый гладкий контур, $\varphi(t)$ - заданная функция на L, $z\in D$ - внутренняя точка области D, ограниченной контуром L. Обычно такие интегралы вычисляются методом аппроксимации $\varphi(t)$ - функции многочленами на дугах $\tau_\sigma\tau_{\sigma+1}$ $(\sigma=0,1,..,n-1)$, где точки $\tau_\sigma\in L$ равномерно распределены на контуре L, то есть интегрируются с помощью обыкновенных квадратурных формул. Однако точность таких формул может существенно понижаться при сколь угодном приближении z к границе области.

В работе [2] предлагается новый метод приближенного вычисления интегралов типа Коши, основанная на выборе свободных параметров. Построенная вычислительная схема легко реализуема и позволяет получать равномерные оценки погрешности по всей области вплоть до границы. Но она пригодна только для первого интеграла из (1). Мы обобщаем указанный метод до такой степени, чтобы могли вычислять все интегралы, приводимые в (1). Далее, метод применяется для вычисления компонентов напряжения в задачах полоской теории упругости.

§1. Квадратурные формулы для интегралов типа Коши

Будем считать контур L гладким и замкнутым. Введем систему точек (узлов) τ_σ $(\sigma=0,1,..,n-1)$, разбивающих L на равные части, причем возрастанию индексов соответствует положительное направление обхода с учетом периодичности. Полагая t_0,t_1,t_2 - произвольные точки контура L, а ν

$(0 \le \nu \le n-1)$- номер, для которого $t_0, t_1, t_2 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}$, будем представлять функцию $\varphi(t)$, $t \in \tau_\sigma \tau_{\sigma+1}$ $(0 \le \sigma \le n-1)$, следующим образом:

$$\begin{aligned}\varphi(t) = \varphi(t_0) + (t-t_0)\varphi(t_0,t_1) + (t-t_0)(t-t_1)\varphi(t_0,t_1,t_2) + \\ + (t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)\varphi(t,t_0,t_1,t_2),\end{aligned} \tag{2}$$

т.е. по формуле Ньютона, где $\varphi(t_0,t_1)$, $\varphi(t_0,t_1,t_2)$, $\varphi(t,t_0,t_1,t_2)$ - соответствующие разделенные разности. Тогда приближенную формулу для $\varphi(t)$ можно записать таким образом:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t_0) + (t-t_0)\varphi(t_0,t_1) + (t-t_0)(t-t_1)\varphi(t_0,t_1,t_2) + \\ + (t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)\sum_{k=0}^{2} l_{\sigma k}(t)\varphi(\tau_{\sigma+k},t_0,t_1,t_2),\end{aligned} \tag{3}$$

где $l_{\sigma k}(t) = \prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{2} \dfrac{t-\tau_{\sigma+j}}{\tau_{\sigma+k}-\tau_{\sigma+j}}$ - фундаментальные многочлены Лагранжа. Для погрешности

$$r_n(\varphi;t,t_0,t_1,t_2) = \varphi(t,t_0,t_1,t_2) - \sum_{k=0}^{2} l_{\sigma k}(t)\varphi(\tau_{\sigma+k},t_0,t_1,t_2)$$

в предположении существования ограниченной 6-ой производной на L функции φ справедлива оценка

$$r_n(\varphi;t,t_0,t_1,t_2) = O\left(\frac{1}{n^3}\right). \tag{4}$$

Теперь возьмем первый интеграл в (1) и представим его так:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\sigma=0}^{n-1}\int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt.$$

Заменим $\varphi(t)$- функцию через $\tilde{\varphi}(t)$ и выполнив соответствующие выкладки, получаем

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt \approx \varphi(t_0) + (z-t_0)\varphi(t_0,t_1) + (z-t_0)(z-t_1)\varphi(t_0,t_1,t_2) + \\ + \sum_{\sigma=0}^{n-1}\big(A_\sigma(z)\varphi(\tau_\sigma, t_0,t_1,t_2) + A_{\sigma+1}(z)\varphi(\tau_{\sigma+1},t_0,t_1,t_2) + \\ + A_{\sigma+2}(z)\varphi(\tau_{\sigma+2},t_0,t_1,t_2)\big),\end{aligned} \tag{5}$$

где коэффициенты $A_\sigma(z)$, $A_{\sigma+1}(z)$, $A_{\sigma+2}(z)$ вычисляются точно. Подразумевается, что $\tau_{\sigma\pm n} = \tau_\sigma$, $A_{\sigma+n}(z) = A_\sigma(z)$, $(\sigma = 0,1,\dots,n-1)$.

Оценим теперь погрешность построенной квадратурной формулы (5). С учетом (4) при $|z-t| > C$ $(C = const > 0)$ получаем оценку $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. При z, стремящемся к контуру L, следует одну из параметров t_0, t_1, t_2 брать по возможности близким к z по сравнению с остальными точками L. На самой границе можно в частности, положить $t_0 = t_1 = t_2$, что приводит к относительно простой формуле для соответствующего при этом сингулярного интеграла с сохранением указанного порядка приближения.

Таким образом, для погрешности справедлива

$$|R_n(\varphi; z)| = O\left(\frac{1}{n^3}\right). \qquad (6)$$

Переходим в формулах (1) ко второму интегралу. Для него получается аналогичная формула (5), с учетом, что вместо φ будем иметь $\varphi(t)\dfrac{d\bar{t}}{dt}$.

Рассмотрим теперь третий интеграл в формулах (1). Используя разложение (3) и формулу (5), получаем

$$u_2(z) \approx \phi(t_0, t_1) + (z - t_0 + z - t_1)\phi(t_0, t_1, t_2) + \sum_{\sigma=0}^{n-1}(A^*_\sigma(z)\phi(\tau_\sigma, t_0, t_1, t_2) + A^*_{\sigma+1}(z)\phi(\tau_{\sigma+1}, t_0, t_1, t_2) + A^*_{\sigma+2}(z)\phi(\tau_{\sigma+2}, t_0, t_1, t_2)), \qquad (7)$$

где $\phi(t) = \bar{t}\varphi(t)$; а $A^*_\sigma(z)$, $A^*_{\sigma+1}(z)$, $A^*_{\sigma+2}(z)$ вычисляются точно.

Аналогично строятся квадратурные формулы и для четвертого интеграла в формулах (1):

$$u_3(z) \approx \phi(t_0, t_1, t_2) + \sum_{\sigma=0}^{n-1}(A^{**}_\sigma(z)\phi(\tau_\sigma, t_0, t_1, t_2) + A^{**}_{\sigma+1}(z)\phi(\tau_{\sigma+1}, t_0, t_1, t_2) + A^{**}_{\sigma+2}(z)\phi(\tau_{\sigma+2}, t_0, t_1, t_2)) \qquad (8)$$

Коэффициенты $A^{**}_\sigma(z)$, $A^{**}_{\sigma+1}(z)$, $A^{**}_{\sigma+2}(z)$ также вычисляются точно.

Повторяя аналогичные рассуждения для остаточного члена формулы (5) и для формул (7) и (8), получаем оценку $O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

§2 Вычисление компонентов напряжения основной смешанной задачи плоской теории упругости

Пусть упругое тело занимает на плоскости $z = x + iy$ конечную область S, ограниченную простым замкнутым гладким контуром L (см. [4]).

Основные уравнения плоской теории упругости при отсутствии объемных сил сводятся к следующим:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0,$$

$$X_x = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y_y = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial x}, X_y = Y_x = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \qquad (9)$$

где $X_x, Y_y, X_y = Y_x$ - компоненты напряжения, u,v - компоненты смещения, $\lambda > 0$, $\mu > 0$ - постоянные Ламе и $\theta = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$.

Общее (регулярное) решение основных уравнений (9) может быть выражено через две произвольные голоморфные в S функции $\varphi(z), \psi(z)$, следующим образом

$$X_x + Y_y = 4\operatorname{Re}\varphi'(z),\ Y_y - X_x + 2iX_y = 2(\overline{z}\varphi''(z) + \psi'(z)), \tag{10}$$

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(z) - z\varphi'(z) - \overline{\psi}(z), \tag{11}$$

где $\kappa = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} = 3 - 4\sigma > 1$, $\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$ - коэффициент Пуассона.

Функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ определяются по граничным условиям

$$\begin{aligned} &\varphi(t) + t\varphi'(t) + \overline{\psi}(t) = f(t) + c(t), \quad npu \quad t \in L', \\ &\varphi(t) + t\varphi'(t) + \overline{\psi}(t) = f(t), \quad npu \quad t \in L''. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь L' часть контура L, где заданы внешние напряжения, а на остальной части L'' - смещения.

Следуя Д.Н. Шерману [4], функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ мы будем искать в виде

$$\begin{aligned} &\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)}{t - z}dt, \\ &\psi(z) = \frac{-\kappa}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega}(t)}{t - z}dt + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)}{t - z}d\overline{t} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{t}\,\omega(t)}{(t - z)^2}dt, \end{aligned} \tag{13}$$

где $\omega(t)$ функция точки t границы определяется после решения соответствующего сингулярного интегрального уравнения, полученного из условия (12) с учетом представления (13).

Подставляя значения функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ из (13), в (10) и обозначая $\omega(t)$ через $\varphi(t)$ имеем

$$\begin{aligned} X_x = 2\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{(t - z)^2}dt - \operatorname{Re}\Bigg[\frac{\overline{z}}{2\pi i}\int_L \frac{2\varphi(t)}{(t - z)^3}dt + \\ + \frac{-\kappa}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi}(t)}{(t - z)^2}dt + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)d\overline{t}}{(t - z)^2} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{2\overline{t}\varphi(t)dt}{(t - z)^3}\Bigg], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_y = 2\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{(t - z)^2}dt + \operatorname{Re}\Bigg[\frac{\overline{z}}{2\pi i}\int_L \frac{2\varphi(t)}{(t - z)^3}dt + \\ + \frac{-\kappa}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi}(t)}{(t - z)^2}dt + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)d\overline{t}}{(t - z)^2} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{2\overline{t}\varphi(t)dt}{(t - z)^3}\Bigg], \end{aligned}$$

$$X_y = I_m \left[\frac{\bar{z}}{2\pi i} \int_L \frac{2\varphi(t)}{(t-z)^3} dt + \frac{-\kappa}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\varphi}(t)}{(t-z)^2 dt} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) d\bar{t}}{(t-z)^2} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\bar{t}\, \varphi(t) dt}{(t-z)^3} \right].$$

Значения полученных интегралов типа Коши можно вычислять с помощью квадратурных формул, построенные в §1, и следовательно, вычисляются компоненты напряжения.

Замечание. В выше указанных вычислениях возникают определенные трудности. В частности, при вычислений разделенных разностей, когда t_0, t_1, t_2 совпадают, разделенные разности переходят в производные. Их лучше вычислять с помощью формул численного дифференцирования, построенных Микеладзе Ш.Е. (см. [3]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости, М., "Наука", 1966, 708с.
2. Саникидзе Д.Г., Нинидзе К.Р. Метод свободных параметров в приближенном вычислении интегралов типа Коши. //Труды X международного симпозиума, Херсон, 29 мая – 5 июня 2001г, с. 299-302.
3. Микеладзе Ш.Е. Численные методы математического анализа, М., Гостехиздат, 1953, 526с.
4. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения, М., "Наука", 1968, 540с.