Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 519.642.6
№ 590, 2003, с. 249-254

Исследование бесконечных систем со степенно-разностными и степенно-суммарными индексами

О. Н. Яковлева
Южно-украинский государственный педагогический университет

Determinating the conditions of solvability and investigating the properties of infinite combined algebraic equation with power-difference and power-sum- indices.

Пусть известны величины $a_n^{(\nu)}, b_n^{(\nu)}, c_n^{(\nu)}, d_n^{(\nu)}$ удовлетворяют условиям

$$\left|a_n^{(\nu)}\right| \le m_1 n^{-r-1-\alpha},\ \left|b_n^{(\nu)}\right| \le m_2 n^{-r-1-\alpha},\ \left|c_n^{(\nu)}\right| \le m_3 n^{-r-1-\alpha},\ \left|d_n^{(\nu)}\right| \le m_4 n^{-r-1-\alpha}, \tag{1}$$

а известные величины f_n – одному из условий

$$|f_n| \le m_5 n^{-r-1-\alpha}, \tag{2}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^g < +\infty, \tag{3}$$

где r - целое неотрицательное число; α, q – вещественные числа: $0<\alpha<1$, $1<q\le 2$, а m_i - здесь и ниже вполне определенные постоянные, не зависящие от n. Рассматривается система уравнений вида

$$\sum_{\nu=0}^{r}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left[a_{n-k}^{(\nu)} k^{\nu}\varphi_k + c_{n+k}^{(\nu)} k^{\nu}\varphi_k\right] + \sum_{k=-\infty}^{-1}\left[b_{n-k}^{(\nu)} k^{\nu}\varphi_k + d_{n+k}^{(\nu)} k^{\nu}\varphi_k\right]\right\} = f_n,\ n=0,\pm 1,\ldots \tag{4}$$

Система уравнений (4) является значительным обобщением бесконечных систем с разностными и суммарными индексами, которые достаточно полно изучены в работах [1-3]. Однако методы исследования бесконечных систем, предложенные в этих работах, не применимы к исследованию системы уравнений (4).

Методом, приложенным в работе [4], исследование системы уравнений (4) приводится к исследованию следующей дифференциальной краевой задачи на единичной окружности $\gamma=\{t\in C;\ |t|=1\}$

$$\sum_{\nu=0}^{r}(-i)^{\nu}\left[a_{\nu}(t)\varphi^{(\nu)+}(t) + c_{\nu}(t)\varphi^{(\nu)+}\left(t^{-1}\right) - b_{\nu}(t)\varphi^{(\nu)-}(t) - d_{\nu}(t)\varphi^{(\nu)-}\left(t^{-1}\right)\right] = f(t)\quad t\in\gamma, \tag{5}$$

где $\varphi^{+}(t)$ $(\varphi^{-}(t))$- краевое значение на γ неизвестной функции $\varphi^{+}(z)$ $(\varphi^{-}(z))$, аналитической в области $D^{+}=\{z\in c: |z|<1\}$ $D^{-}=\{z\in c: |z|>1\}$,

$$a_{\nu}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(\nu)} t^n,\ b_{\nu}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^{(\nu)} t^n,\ c_{\nu}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(\nu)} t^n,$$

$$d_\nu(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n^{(\nu)} t^n,\quad f_n(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n t^n. \tag{6}$$

$$\varphi^{(\nu)+}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(ik)^\nu \varphi_k t^k,\quad \varphi^{(\nu)-}(t)=-\sum_{n=-\infty}^{-1}(ik)^\nu \varphi_k t^k. \tag{7}$$

В силу условий (1) согласно работе [5] функции $a_\nu(t)$, $b_\nu(t)$, $c_\nu(t)$, $d_\nu(t)\in H_\alpha$; функция $f(t)\in \mathrm{H}_\alpha$, если выполнено условие (2), и функция $f(t)\in L_p$, $p\ \geq\ 2$, $p^{-1}+q^{-1}=1$, если выполнено условие (3). Задача (5) является дифференциальной краевой задачей с обратным сдвигом Карлемана $\alpha(t)=t^{-1}$, причем $\alpha'(t)=-it^{-1}$ на γ. Сведем теперь исследование задачи (5) к исследованию матричной дифференциальной краевой задачи. Для этого введем новые неизвестные функции $\Phi_1^{\pm}(z),\Phi_2^{\pm}(z)$, аналитические в области $D^{\pm}$, краевые значения которых, по крайней мере, s раз дифференцируемы на γ и связаны с краевыми значениями $\varphi^{\pm}(t)$ и их производными по формулам

$$\Phi_1^{(\nu)+}(t)=\varphi^{(\nu)+}(t),\ \Phi_1^{-}(t)=\varphi^{(\nu)-}(t),$$
$$\Phi_2^{(\nu)+}=t^{-1}\varphi^{(\nu)-}\left(t^{-1}\right),\ \Phi_2^{-}(t)=t^{-1}\varphi^{(\nu)+}\left(t^{-1}\right). \tag{8}$$

Тогда задачу (5) можно записать в виде

$$\sum_{\nu=0}^{s}\left[M_\nu(t)\Phi^{(\nu)+}(t)+N_\nu(t)\Phi^{(\nu)-}(t)\right]=F(t), t\in\gamma, \tag{9}$$

где $\Phi^{\pm}(t)=\left\{\Phi_1^{\pm}(t),\Phi_2^{\pm}(t)\right\}^T$, $F(t)=\left\{f(t),f\left(t^{-1}\right)\right\}^T$, где знак «*t*» означает транспонирование, а матрицы-функции (м.ф.) $M_\nu(t),N_\nu(t)$ имеют вид

$$M_\nu(t)=(-i)^\nu\begin{pmatrix} a_\nu(t) & -td_\nu(t)\\ C_\nu(t^{-1}) & -tb_\nu(t^{-1})\end{pmatrix}, N_\nu(t)=(-i)^\nu\begin{pmatrix} -b_\nu(t) & tC_\nu(t)\\ -d_\nu(t^{-1}) & ta_\nu(t^{-1})\end{pmatrix} \tag{10}$$

В силу тождественных преобразований задача (9) и система уравнений (4) эквивалентны в том смысле, что они одновременно разрешимы или нет и решения системы уравнений (1) выражаются через решения задачи (9) по формуле

$$\varphi_k=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left[\Phi_1^{+}(t)-\Phi_1^{-}(t)\right]^{-k-1}dt, k=0,\pm1,\dots \tag{11}$$

Согласно работе [4] введем функции

$$P(z,\tau)=\frac{(-1)^s}{(s-1)!}\left[(\tau-z)^{s-1}\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)-\sum_{k=0}^{s-1}d_k\tau^{s-k-1}z^k\right], z\in D^{+}, \tau\in\gamma,$$

$$Q(z,\tau)=\frac{(-1)^s}{(s-1)!}\left[(\tau-z)^{s-1}ln(1-\frac{\tau}{z})-\sum_{k=0}^{s-1}l_k\tau^{s-k-1}z^k\right], z\in D^{-}, \tau\in\gamma,$$

$$d_k=\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{j+1}c_{s-1}^{j}(k-j)^{-1},\ l_k=\sum_{j=k+1}^{s-1}(-1)^j c_{s-1}^{j}(j-k)^{-1}.$$

Известно [4], что функция $P(z,\tau)$ ($Q(z,\tau)$) и ее частные производные по z до порядка s-1 непрерывны в области $D^+ \cup \gamma$ ($D^- \cup \gamma$)) и

$$\frac{\partial^s P(z,\tau)}{\partial z^s} = \frac{1}{\tau - z}, \quad \frac{\partial^s Q(z,\tau)}{\partial z^s} = \left(\frac{\tau}{z}\right)^s \frac{1}{\tau - z}.$$

Тогда согласно работе [4] любую пару вектор- функций (в.ф.) $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, $\Phi^-(\infty) = 0$, размерности 2, аналитических соответственно в областях D^+ и D^- и таких, что краевые значения $\Phi^{(s)+}(t)$ и $\Phi^{(s)-}(t)$ соответственно в.ф. $\Phi^{(s)+}(z)$ и $\Phi^{(s)-}(z)$ удовлетворяют условию Гельдера или принадлежат пространству $L_p, p \ge 2$ можно записать в виде

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma P(z,\tau)\rho(\tau)d\tau + D_0(z), z \in D^+,$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma Q(z,\tau)\rho(\tau)d\tau, z \in D^-, \tag{12}$$

где $\rho(\tau)$ – неизвестная в.ф. размерности 2, однозначно определяемая в.ф. $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, а в.ф. $D_0(z)$ имеет вид

$$D_0(z) = \sum_{k=0}^{s-1} \Phi_k z^k \tag{13}$$

где Φ_k - коэффициенты Фурье в.ф. $\Phi^+(t)$. Тогда на основании формул Сохоцкого для производных в.ф. и свойств частных производных по z функций $P(z,\tau)$ и $Q(z,\tau)$ исследование задачи (9) приводится к исследованию следующей системы сингулярных интегральных уравнений (ССИУ)

$$K_p = K_0 p + Tp = F + C_0, t \in \gamma \tag{14}$$

где

$$(K_0 p)(t) = A(t)p(t) + \frac{B(t)}{\pi i}\int_\gamma (\tau - t)^{-1} p(\tau)d\tau, \quad (T\varphi)(t) = \int_\gamma K(t,\tau)p(\tau)d\tau \tag{15}$$

$$A(t) = 0{,}5\left[M_s(t) - N_s(t)\right], \quad B(t) = 0{,}5\left[M_s(t) + N_s(t)\right],$$

$$C_0(t) = -\sum_{\nu=0}^{s-1} (-i)^\nu M_\nu(t) D^{(\nu)}(t), \tag{16}$$

$$K(t,\tau) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=0}^{s-1}\left[M_\nu(t)\frac{\partial^\nu P(t,\tau)}{\partial t^\nu} + N_\nu(t)\frac{\partial^\nu Q(t,\tau)}{\partial t^\nu} + B_s(t) t^\nu \tau^{s-\nu}\right]. \tag{17}$$

При этом задача (9) и ССИУ (14) эквивалентны в том смысле, что они одновременно разрешимы или нет и каждому решению $\Phi^\pm(t)$ задачи (9) соответствует решение $p(t)$ ССИУ (14), возможно не единственное, и наоборот. Учитывая структуру в.ф. $D_0(z)$, чтобы связь между решениями задачи (9) и ССИУ (14) была однозначной согласно работе [6], необходимо, чтобы были известны векторы

$$\Phi_k = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left[\Phi^+(t) - \Phi^-(t)\right]^{-k-1} dt, k = \overline{0, s-1}, \tag{18}$$

где $\Phi^{\pm}(t)$ - решения задачи (9). Обозначив $\Phi_k = \left\{a_k^{(1)}, a_k^{(2)}\right\}^T$ на основании (18), (11), (8) нетрудно подсчитать, что $a_k^{(1)} = \varphi_k$, $k = \overline{0, s-1}$, $a_k^{(2)} = -\varphi_k$, $k = \overline{-s, s-1}$. Таким образом, если векторы $\Phi_k, k = \overline{0, s-1}$, известны, т.е. если известны величины $\varphi_k, k = \overline{-s, s-1}$, то система уравнений (4) и ССИУ (14) эквивалентны в том смысле, что они одновременно разрешимы или нет; каждому решению системы уравнений (4) соответствует одно и только одно решение ССИУ (14) и наоборот и решения системы уравнений (4) выражаются через решения ССИУ (14) по формулам (12), (11). Кроме того, согласно работе [6] необходимым и достаточным условием определенности системы уравнений (4) является задание заранее неизвестных $\varphi_k, k = \overline{-s, s-1}$, которые будем называть начальными условиями системы уравнений (4). Откуда следует

<u>**Теорема 1.**</u> Для того, чтобы система уравнений (4) была определена, необходимо и достаточно, чтобы были заданы ее начальные условия $\varphi_k, k = \overline{-s, s-1}$.

Рассмотрим сначала случай нулевых начальных условий, т.е. $\varphi_k = 0, k = \overline{-s, s-1}$. Значит в.ф. $D_0(z) = 0$.

<u>**Теорема 2.**</u> Если начальные условия нулевые, т.е. $\varphi_k = 0, k = \overline{-s, s-1}$, и величины $a_n^{(\nu)}, b_n^{(\nu)}, c_n^{(\nu)}, d_n^{(\nu)}$ удовлетворяют условиям (1), то система уравнений (4) является нетеровой тогда и только тогда, когда выполняемо условие

$$\Delta(t) = a_s(t) b_s\left(t^{-1}\right) - d_s(t) c_s\left(t^{-1}\right) \neq 0, t \in \gamma. \tag{19}$$

При выполнении условия (19) индекс системы уравнений (4) определяется по формуле $æ = ind\Delta(t)$.

<u>*Доказательство.*</u> Заметим, что систему уравнений (4) будем называть нетеровой, если нетерова ССИУ (14). Так как начальные условия φ_k заданы, то система уравнений (4) и ССИУ (14) эквивалентны. Согласно работе [1] ССИУ нетерова тогда и только тогда, когда $det\left[A(t) + B(t)\right] \neq 0$, $det\left[A(t) - B(t)\right] \neq 0$ на γ. Откуда следует (19) и остальные утверждения теоремы 2.

Пусть выполнено условие (19). Тогда существует м.ф. $\left[A(t) + B(t)\right]^{-1}$. Обозначим $æ_1 \geq æ_2$ - частные индексы м.ф. $\left[A(t) + B(t)\right]^{-1}\left[A(t)) - B(t)\right]$ и введем обозначения

$$P = \sum_{æ_j \geq 0} æ_1, \qquad P = -\sum_{æ_j \geq 0} æ_2 \tag{20}$$

<u>**Теорема 3**</u> Пусть начальные условия нулевые, т.е. $\varphi_k = 0, k = \overline{-s, s-1}$, величины $a_n^{(\nu)}, b_n^{(\nu)}, c_n^{(\nu)}, d_n^{(\nu)}$ удовлетворяют условиям (1), а величины f_n одному из условий – (2) или (3) и выполнено условие (19). Тогда число линейно независимых решений однородной системы уравнений (4) не меньше чем P, а неоднородная система уравнений (4) разрешима, если выполнены не менее чем Q следующих условий

$$\int_\gamma F(t)\psi_j(t)dt = 0, \tag{21}$$

где $F(t)$ - правая часть ССИУ (14), а $\Psi_j(t)$ - линейно- независимые решения однородной союзной системы ССИУ, т.е. ССИУ $K'\ \Psi = 0$.

Доказательство этого утверждения следует из того факта [1,6], что в этом случае однородная ССИУ (14) имеет не меньше чем P линейно- независимых решений, а неоднородная ССИУ (14) разрешима, если выполнено не менее чем Q условий (21).

<u>**Теорема 4**</u>. В условиях теоремы 3, если система уравнений (4) разрешима и величины f_n удовлетворяют условиям (2), то решение системы уравнений (4) удовлетворяет условиям

$$|\varphi_k| \le m_5 |k|^{-r-s-\alpha}, k \le -s-1, k \ge s. \tag{22}$$

Если же величины f_n удовлетворяют условиям (3), то решения системы уравнений (4) удовлетворяют условию

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|k^{r+s}\varphi_k\right|^q < +\infty, 1 < q \le 2. \tag{23}$$

<u>*Доказательство.*</u> Согласно работе [5] м.ф. $A(t), B(t), K(t,\tau) \in H_\alpha^{(r)}$ по переменной t, а в.ф. $F(t) \in H_\alpha^{(r)}$, если выполнены условия (2). Тогда на основании работ [1,6] решения ССИУ (14) принадлежат пространству $H_\alpha^{(r)}$. Тогда на основании (12) в.ф. $\Phi^\pm(t) \in H_\alpha^{(r+s)}$. Откуда на основании работы [5] следует (22). Если же выполнено условие (3), то в.ф. $F(t) \in L_p^{(r)}, p \ge 2, p^{-1} + q^{-1} = 1$. Тогда решения ССИУ (14) принадлежат пространству $L_p^{(r)}$. Значит в.ф. $\Phi^\pm(t) \in L_p^{(r+s)}$. Откуда на основании работы [5] следует (23).

<u>*Замечание.*</u> Если начальные условия не нулевые, т.е. $\varphi_k \ne 0, k = \overline{-s, s-1}$, то заменой $\Phi_k = 0,\ -s \le k \le s-1;\ \Phi_k = \varphi_k,\ k \le -s-1, k \ge s$ система уравнений (4) приводится к решению следующей системы уравнений

$$\sum_{\nu=0}^{s}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left[a_{n-k}^{(\nu)}k^\nu\Phi_k + c_{n+k}^{(\nu)}k^\nu\Phi_k\right] + \sum_{k=-\infty}^{-1}\left[b_{n-k}^{(\nu)}k^\nu\Phi_k + d_{n+k}^{(\nu)}k^\nu\Phi_k\right]\right\} = f_n^{(1)}.\ n = 0, \pm 1, \dots$$

с нулевыми начальными условиями $\Phi_k = 0,\ k = \overline{-s, s-1}$, где

$$f_n^{(1)} = f_n - \sum_{\nu=0}^{s} \left\{ \sum_{k=0}^{s-1} \left[a_{n-k}^{(\nu)} k^\nu \varphi_k + c_{n+k}^{(\nu)} k^\nu \varphi_k \right] + \sum_{k=-s}^{-1} \left[b_{n-k}^{(\nu)} k^\nu \varphi_k + d_{n+k}^{(\nu)} k^\nu \varphi_k \right] \right\}.$$

Таким образом предложенный в работе метод позволяет полностью исследовать нормальный случай системы (1). Его можно применить к исследованию исключительного случая и систем вида (1) с комплексно сопряженными значениями неизвестных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пресдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений.- М.: Наука, 1979.- 493с.
2. Гохберг И.У., Фельдман А.И. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения.- М.: Наука, 1971.- 352с.
3. Билай В.В., Тихоненко Н.Я. К теории разрешимости и приближенному решению систем Винера- Хопфа с разностными и суммарными индексами. // Дифференц. Уравнен.- 1997.- т.33, №9.- с.1120- 1126.
4. Яковлева О.Н. Разрешимость и свойства решений бесконечных систем со степенно- разностными индексами. // Дифференц. Уравнен.- 2001.- т.37, №10.- с. 1425- 1431.
5. Бари Н.К. Тригонометрические ряды.- М.: ГИМФЛ, 1961.- 936 с.
6. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения.- М.: Наука, 1968.- 511с.