Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 539.3
№ 590, 2003, с. 255-258

Вычислительный эксперимент в задачах идентификации нестационарных нагружений прямоугольной пластины и пологой сферической оболочки

Е.Г. Янютин, А.С. Шарапата, А.В. Воропай
Национальный технический университет "ХПИ", Украина
ХНАДУ, Украина

The stable (relative to the small error in input data) numerically-analytical solution of ill-posed problem of identification the unknown loading, which affect on the rectangular elastic isotropic plate and spherical shallow shell (the inverse problem of the theory of elasticity) is considered. The input data are normal displacements in one of the points of examining objects.Simulation of plate and shell deformation is based on the Timoshenko's two-dimensional theory. The first-kind Volterra integral equations in considered problems are solved numerically by Tikhonov's regularization method.The numerical results are given.

В настоящее время исследования, связанные с изучением импульсного деформирования элементов конструкций, интенсивно развиваются. Решение обратных нестационарных задач теории упругости имеет большое значении при изучении напряженно-деформированного состояния (НДС) элементов конструкций, а также при проектировании ответственных конструкций и сооружений.

Анализ последних достижений и публикаций

Несмотря на их важность, имеется мало решенных задач по идентификации нестационарных нагрузок, действующих на конструкции. В работах [1,3] решен ряд прямых и обратных задач теории упругости для стержней, в монографии [4] приведены задачи посвященные распознаванию закона изменения во времени неизвестной нагрузки воздействующей на цилиндрическую и полусферическую оболочки.

Цель и постановка задачи

Целью работы было рассмотрение двух новых задач по идентификации нестационарных нагрузок, механическими объектами исследований в которых являются прямоугольная пластина и пологая сферическая оболочка. Для решения этих задач должны быть известны как геометрические параметры исследуемого объекта и его механические свойства, так и изменение во времени одного из параметров, определяющего НДС. Помимо этого на основании выбранной математической модели должно быть получено аналитическое выражение, связывающее этот параметр с искомой нагрузкой.

Идентификация нестационарных нагружений

Рассмотрим прямоугольную шарнирно-опертую пластину, срединная поверхность которой расположена в плоскости xOy и имеет размеры l и m, вдоль осей Ox и Oy соответственно, а толщину h (рис. 1). Предполагается, что пластина нагружается сосредоточенной касательной силой $P_z(x,y,t)$.

Рис.1. Схема нагружения пластины

Задача о вынужденных колебаниях прямоугольной упругой изотропной пластины сводится к решению системы уравнений, аналогичной приведенной в [5] с учетом специфики нагружения и также дополненной двумя уравнениями, определяющими колебательный процесс вдоль срединной плоскости и содержащими компоненты продольных перемещений.

Для шарнирно-опертой пластины, в предположении нулевых начальных условий, можно получить следующее выражение для прогиба в точке пластины с координатами (x_s, y_s)

$$w(x_s, y_s, t) = w(t) = \int_0^t P(\tau) K(t-\tau) d\tau, \qquad (1)$$

где $K(t) = a \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{k\pi \cdot x_s}{l} \sin\frac{n\pi \cdot y_s}{m} \frac{C_{kn}^M}{\Delta_{kn}} \left[\frac{\sin \omega_{1kn}(t)}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin \omega_{2kn}(t)}{\omega_{2kn}} \right]$,

$P(t)$ – функция изменения приложенной нагрузки во времени,

причем, G' – приведенный модуль сдвига, $I = h^3/12$, $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$,

$$C_{kn}^M = \frac{2}{l \cdot m} \cdot \frac{h}{\rho \cdot I} \cdot \cos\left(\frac{k\pi \cdot x_0}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi \cdot y_0}{m}\right),\ a = \frac{G'}{\rho},\ b = \frac{G' h}{\rho \cdot I},\ d = \frac{D}{\rho \cdot I},$$

$$\lambda_{kn}^2 = \pi^2\left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2}\right),\ \omega_{1kn} = \sqrt{0.5(\lambda_{kn}^2 (a+d) + b + \Delta_{kn})},$$

$$\omega_{2kn} = \sqrt{0.5(\lambda_{kn}^2 (a+d) + b - \Delta_{kn})},\ \Delta_{kn} = \sqrt{(\lambda_{kn}^2 (a+d) + b)^2 - 4 \cdot a \cdot d \cdot \lambda_{kn}^4}.$$

Если известно изменение прогиба во времени в одной из точек пластины с координатами (x_s, y_s), а воздействующая сила неизвестна, тогда выражение (1) является интегральным уравнением Вольтерра I рода относительно функции $P(t)$.

В аналогичной постановке рассмотрим задачу о нестационарном нагружении пологой сферической оболочки. Ее движение на основе теории типа Тимошенко при осесимметричном нагружении описывается системой из трех дифференциальных уравнений в перемещениях [6].

Функции перемещений раскладываются в ряды Фурье-Бесселя. Решение должно удовлетворять условию жесткого закрепления края оболочки. Только одна из функций (нормальное перемещение) в силу разложения ее в ряд по функции Бесселя первого рода нулевого порядка удовлетворяет граничным условиям. Поэтому использован подход [6], позволяющий получить решение, удовлетворяющее полному набору граничных условий. Он заключается во введении дополнительных нагрузок, сосредоточенных на контуре оболочки: усилие и момент. Указанные усилие и момент определяются при решении системы двух интегральных уравнений Вольтерра I рода, которая следует из двух граничных условий (равенство нулю касательного перемещения и угла поворота нормали). Эта система сводится к решению блочной системы линейных алгебраических уравнений обобщенным методом Гаусса, с последующим вычислением коэффициентов разложения. Рассматривается случай, когда оболочка до начала действия равномерно распределенной нагрузки находится в невозмущенном состоянии (в покое). Указанному соответствуют нулевые начальные условия.

Решение обратной задачи (идентификационной) строится с учетом того, что упомянутый закон изменения во времени нормального перемещения задавался с погрешностями случайного характера (неточные исходные данные). Так как, если прогиб пластины измеряется, например, в ходе эксперимента, то на него естественно накладывается ряд погрешностей (измерения и др.).

При решении описанных некорректных задач теории упругости, связанных с решением интегральных уравнений Вольтерра, можно использовать регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова, в результате которого приходим к регуляризированной СЛАУ типа [7]

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \alpha\mathbf{C})\mathbf{p} = \mathbf{A}^T\mathbf{w}_\delta^*, \qquad (2)$$

где **A** – матрица, элементы которой $a_{ji}=K[(j-i)\cdot\square t]$, $\mathbf{A}^T$ – транспонированная к **A** матрица, вектор **p** – соответствует искомой функции P(t), а **w** – вектору исходных данных, α – параметр регуляризации, вид матрицы **C** и подробное описание получения данной СЛАУ описан в [4,7].

Для обоснования вышеупомянутого метода идентификации для пластины принимаются следующие исходные данные: плотность материала пластины $\rho=7890$ кг/м^3; модуль упругости материала пластины $E=2.07\cdot10^{11}$ Па; коэффициент Пуассона $\nu=0.3$; толщина пластины $h=0.04$ м; размеры пластины $l=0.6$ м, $m=0.4$ м; координаты приложения сосредоточенной силы $x_0=0.4$ м, $y_0=0.3$ м; .

Численное определение $P(t)$ было выполнено на основе (2) (рис. 2, кривая 1), причем в качестве известных перемещений заданной точки $w^*(t)$ использовалось решение соответствующей прямой задачи (рис. 2, кривая 2) при заданном законе нагружения и наложении на него искусственного “шума” по следующей зависимости $w^*(t)=w(t)[1+\square\cdot Rnd(t)]$ где $\square = 0.05$ – относительная погрешность; $Rnd(t)$ – случайные числа в интервале $[-1;1]$. При решении прямой задачи предполагалось, что на пластину воздействует сосредоточенная касательная сила, изменение во времени которой соответствует “двойной ступеньке”.

Исходные данные, принятые в случае численных расчетов для оболочки: $h=0.05$м; $R=1$м; $r_0=0.4$м; $T=8$; количество членов в рядах Фурье-Бесселя $N=\square$; погрешность в задании закона изменения во времени нормального перемещения вытекающего из решения прямой задачи при воздействии на оболочку бесконечно длинного импульса давления $\square=0.1$. Предполагается, что закон распределения нормальной нагрузки по поверхности оболочки задан.

Результаты распознавания изменения нагрузки во времени представлены на рис. 3 кривая 2, там же показан закон изменения во времени прогиба в одной из точек срединной поверхности оболочки (кривая 1).

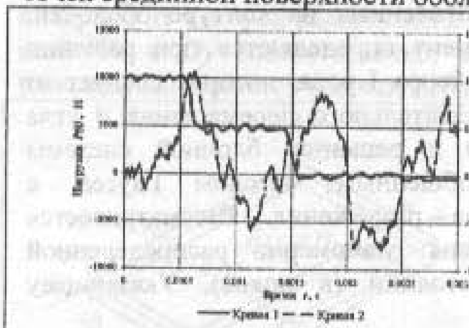

Рис.2. Результат идентификации нагрузки, воздействующей на пластину

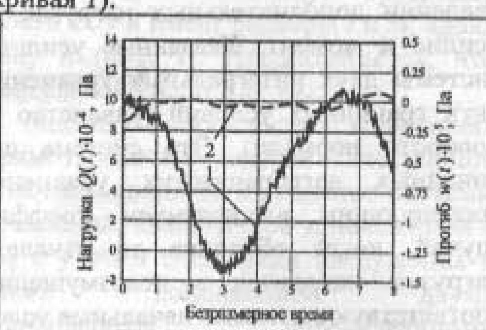

Рис.3. Результат идентификации нагрузки, воздействующей на оболочку

Выводы

Как видно из приведенных графиков, полученные методом данной статьи решения задач идентификации неизвестных нагружений пластины и оболочки достаточно устойчивы при уровнях шума до 10%.

Вызывает научный интерес дальнейшее развитие данной тематики для сложных видов нагружения (нескольких усилий, сочетания усилий и моментов), уточнение механических моделей рассматриваемых объектов, обобщение полученных решений для других объектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Краснобаев И.А., Потетюнко Э.И. Прямые и обратные задачи продольных колебаний стержней. // Числ. и аналит. методы решения задач строит. мех. и теории упругости, Ростов н/Д. 1989. С. 3-16.
2. Романенко В.А., Муштаков Н.А., Туркевич Я.М. Определение ударной силы при ударе цилиндрического стержня с торцом произвольной формы. // Оптимиз. режимов и параметров горн. и строит.-дор. машин. Карагандинский политех. ин-т. 1989. С. 25-28.
3. Gladwell G.M.L. The inverse problem for the vibrating beam. // Proc. Roy. Soc. London. 1984. V. A393. No. 1805. P. 277-295.
4. Янютин Е. Г., Янчевский И. В. Импульсные воздействия на упругодеформируемые элементы конструкций. - Харьков: Изд-во ХГАДТУ (ХАДИ), 2001. - 184 с.
5. Григолюк Э. И., Селезов И. Т. (1973). Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – Москва: ВИНИТИ. – 272 с.
6. Янютин Е. Г. Импульсное деформирование упругих элементов конструкций. – Киев: Наук. думка, 1993. – 146 с.
7. Тихонов А. Н., Гончаровский А. В. и др. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М.: Наука. // Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 200 с.