1981.Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
№ 590, 2003, с. 26-31

УДК 517.9 + 536.24

# Применение метода граничных элементов для решения задачи Стефана в случае медленных фазовых переходов

Э. К. Бевза, Д. В. Евдокимов, А. А. Кочубей
*Днепропетровский национальный университет, Украина*

The small parameter method is applied to Stephan problem in the case of slow phase transition, as a result of it two series of elliptical boundary-value problems are obtained. The boundary element method is used for numerical solution of obtained elliptical problems. The proposed approach is generalization of well-known Leybenzon approximation of Stephan problem. The proposed algorithm is applied to several plane slow phase transition problems under different Stephan numbers.

Задачи о фазовых переходах являются одними из наиболее сложных задач вычислительного тепломассообмена, поскольку включают специфическую нелинейность, связанную с подвижностью границы области решения. Несмотря на это для классических фазовых переходов, описываемых задачей Стефана [1], разработаны многочисленные и достаточно эффективные численные методы [2]. Однако в общей проблеме расчета фазовых переходов выделяется случай медленных фазовых переходов, для которого традиционные пошаговые по времени численные методы очевидно неэффективны. В то же время задачи о медленных фазовых переходах представляют существенный интерес в естественнонаучных исследованиях. Для предельного случая бесконечно малого числа Стефана академиком Лейбензоном Л.С. было предложено так называемое приближение Лейбензона [1], которое предполагает малость изменения внутренней энергии фаз по сравнению с энергетическим эффектом фазового перехода, в результате чего распределение температуры в фазах предполагается стационарным. Несмотря на то, что приближение Лейбензона нашло достаточно широкое распространение в прикладных исследованиях [3, 4], оно не охватывает достаточно широкий класс задач при малых, но конечных (до единицы) числах Стефана. Более универсальным подходом представляется использование для анализа медленных фазовых переходов метода малого параметра, предложенное в работе [5], но в указанной работе применение метода малого параметра было ограничено одномерным по пространству случаем однофазной задачи Стефана, что обусловлено трудностью решения последовательности эллиптических краевых задач, к которой сведена задача Стефана. Основной идеей настоящей работы является применение для численного решения упомянутых эллиптических краевых задач метода граничных элементов.

## 1. Применение метода малого параметра к задаче Стефана о медленном фазовом переходе

Рассмотрим задачу Стефана в безразмерном виде

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial\tau_{St}}St=\Delta\theta_1,\quad \frac{\partial\theta_2}{\partial\tau_{St}}Stf_a=\Delta\theta_2, \tag{1}$$

для определенности ограничим рассмотрение граничными условиями первого рода на внешних границах фаз

$$\theta_1\big|_{\Gamma_1}=\theta_{1s},\quad \theta_2\big|_{\Gamma_2}=\theta_{2s}, \tag{2}$$

условия на границе раздела фаз

$$\theta_1\big|_{\Gamma_{ф.п.}}=0,\quad \theta_2\big|_{\Gamma_{ф.п.}}=0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial n}-f_\lambda\frac{\partial\theta_2}{\partial n}=\frac{\partial n}{\partial\tau_{St}}, \tag{4}$$

начальные условия

$$\theta_1(0,x)=\theta_{10},\quad \theta_2(0,x)=\theta_{20}, \tag{5}$$

где $f_a=\dfrac{a_1}{a_2}$, $f_\lambda=\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$, стефановское время $\tau_{St}=\dfrac{\tau\lambda_1(T_п-T_{ф.п.})}{L^2\sigma\rho}$, число Стефана $St=\dfrac{C(T_п-T_{ф.п.})}{\sigma}$, остальные обозначения являются традиционно принятыми в тбпломассообмене [6]. Применим к задаче (1) – (5) метод малого параметра [5], который предполагает отыскание полей температур в виде

$$\theta_1=\theta_1^0(x,y,z,\tau)+\sum_{k=1}^{\infty}St^k\theta_1^k(x,y,z,\tau),\ \theta_2=\theta_2^0(x,y,z,\tau)+\sum_{k=1}^{\infty}St^k\theta_2^k(x,y,z,\tau). \tag{6}$$

В результате подстановки (6) в задачу (1) – (5) приходим к последовательности краевых задач для уравнений

$$\Delta\theta_1^0=0,\quad \Delta\theta_1^1=\frac{\partial\theta_1^0}{\partial\tau},\ \ldots,\ \Delta\theta_1^i=\frac{\partial\theta_1^{i-1}}{\partial\tau}, \tag{7}$$

$$\Delta\theta_2^0=0,\quad \Delta\theta_2^1=f_a\frac{\partial\theta_2^0}{\partial\tau},\ \ldots,\ \Delta\theta_2^i=f_a\frac{\partial\theta_2^{i-1}}{\partial\tau}, \tag{8}$$

с граничными условиями

$$\theta_1^0\big|_{\Gamma_1}=\theta_{1s},\quad \theta_1^0\big|_{\Gamma_{ф.п.}}=0,\ \ldots,\ \theta_1^i\big|_{\Gamma_1}=0,\ \ldots,\ \theta_1^i\big|_{\Gamma_{ф.п.}}=0, \tag{9}$$

$$\theta_2^0\big|_{\Gamma_2}=\theta_{2s},\quad \theta_2^0\big|_{\Gamma_{ф.п.}}=0,\ \ldots,\ \theta_2^i\big|_{\Gamma_2}=0,\ \ldots,\ \theta_2^i\big|_{\Gamma_{ф.п.}}=0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial\theta_1^0}{\partial n}-f_\lambda\frac{\partial\theta_2^0}{\partial n}=\frac{\partial\eta^0}{\partial\tau},\ \ldots,\ \frac{\partial\theta_1^i}{\partial n}-f_\lambda\frac{\partial\theta_2^i}{\partial n}=\frac{\partial\eta^i}{\partial\tau}, \tag{11}$$

Приведенная выше формулировка задачи (7) – (11) справедлива для любого числа пространственных измерений. Очевидно, что уравнения и граничные условия в задаче (7) – (11), снабженные индексом «0», соответствуют классическому приближению Лейбензона. В работе [7] показано, что при достаточно мягких требованиях относительно задач (7) – (11) ряды (6) сходятся для любого $St<1$.

**2. Метод граничных элементов**

Понятно, что выше сформулированные краевые задачи затруднительно решить аналитически, поэтому необходимо выбрать метод численного решения этих задач. Выбранный метод должен быть достаточно эффективен для решения эллиптических краевых задач в областях сложной, практически произвольной, изменяющейся формы. Опуская анализ существующих численных методов, отметим, что такими свойствами обладает также метод граничных элементов. Собственно говоря, неэффективность методов конечных разностей и конечных элементов для численного решения последовательности краевых задач (7) – (11) послужила причиной того, что метод малого параметра никогда ранее не применялся для решения плоских и пространственных задач Стефана в случае медленного фазового перехода. В данной работе это сделано впервые.

Преобразуем уравнения (7), (8) в граничные интегральные уравнения

$$C(x_0)\theta_1^0(x_0)=\int\limits_{\Gamma_1\cup\Gamma ф.п.}\varphi_0(x,x_0)\frac{\partial\theta_1^0}{\partial n}ds-\int\limits_{\Gamma_1\cup\Gamma ф.п.}\theta_1^0\frac{\partial\varphi_0(x,x_0)}{\partial n}ds, \quad (12)$$

$$C(x_0)\theta_2^0(x_0)=\int\limits_{\Gamma_2\cup\Gamma ф.п.}\varphi_0(x,x_0)\frac{\partial\theta_2^0}{\partial n}ds-\int\limits_{\Gamma_2\cup\Gamma ф.п.}\theta_2^0\frac{\partial\varphi_0(x,x_0)}{\partial n}ds, \quad (13)$$

$$C(x_0)\theta_1^i(x_0)=\int\limits_{\Gamma_1\cup\Gamma ф.п.}\varphi_0(x,x_0)\frac{\partial\theta_1^i}{\partial n}ds-$$
$$-\int\limits_{\Gamma_1\cup\Gamma ф.п.}\theta_1^i\frac{\partial\varphi_0(x,x_0)}{\partial n}ds+\int\limits_{D_1}\varphi_0(x,x_0)\frac{\partial\theta_1^{i-1}}{\partial\tau}dx, \quad (14)$$

$$C(x_0)\theta_2^i(x_0)=\int\limits_{\Gamma_2\cup\Gamma ф.п.}\varphi_0(x,x_0)\frac{\partial\theta_2^i}{\partial n}ds-$$
$$-\int\limits_{\Gamma_2\cup\Gamma ф.п.}\theta_2^i\frac{\partial\varphi_0(x,x_0)}{\partial n}ds+\int\limits_{D_2}\varphi_0(x,x_0)\frac{\partial\theta_2^{i-1}}{\partial\tau}dx, \quad (15)$$

где $\varphi_0$ – фундаментальные решения уравнения Лапласа, определяемое в плоском случае как $\varphi_0=\frac{1}{2\pi}\ln\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)$ и в пространственном случае как $\varphi_0=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$, $D_1, D_2$ – области, занятые фазами, соответственно, $C(x_0)$ – функция расположения точки наблюдения, равная 1, если эта точка лежит внутри рассматриваемой области, 1/2, если точка лежит на гладком участке границы области, и 0, если точка лежит вне области.

При решении соответствующей задачи для последовательности интегральных уравнений (12) – (15) возникают две трудности: Первая трудность это трактовка условия Стефана (11). Традиционно условие Стефана, дополненное заданием начального положения границы фазового перехода, рассматривается как задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, позволяющая определить движение границы фазового перехода. Однако в данном случае аналитическое решение этой задачи Коши невозможно, поэтому ее приходится решать численно. Поскольку на каждом шаге по времени приходится решать несколько краевых задач, то применение многошаговых методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений нецелесообразно, поэтому решать уравнения (11) приходиться по схеме Эйлера

$$\eta^{i(k+1)} = \eta^{ik} + \Delta\tau\left(\left(\frac{\partial\theta_1^0}{\partial n}\right)^k - f_\lambda\left(\frac{\partial\theta_2^0}{\partial n}\right)^k\right), \qquad (16)$$

где индекс $k$ указывает на номер шага по времени, $\Delta\tau$ – величина шага по времени.

Трудностью при рассмотрении уравнений (12) – (15) является вычисление объемных потенциалов по областям $D_1, D_2$. Рассмотрим величину $\dfrac{\partial\theta_1^{i-1}}{\partial\tau}$, исходя из (12). Введем функцию $\varphi_1$, такую, что $\Delta\varphi_1 = \varphi_0$, тогда

$$\begin{aligned}&\int_{D_1}\varphi_0(x,x_0)\frac{\partial\theta_1^{i-1}}{\partial\tau}dx = \int_{D_1}\Delta\varphi_1\frac{\partial\theta_1^{i-1}}{\partial\tau}dx = \\ &= \int_{\Gamma_1\cup\Gamma ф.п.}\frac{\partial\theta_1^{i-1}}{\partial\tau}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}ds - \int_{\Gamma_1\cup\Gamma ф.п.}\varphi_1\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\theta_1^{i-1}}{\partial\tau}\right)ds + \int_{D_1}\varphi_1\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\theta_1^{i-2}dx.\end{aligned} \qquad (17)$$

По аналогии построим фундаментальную последовательность $\Delta\varphi_n = \varphi_{n-1}$, что позволяет привести к чисто граничному виду в любое из представлений (12) – (15). Поскольку метод малого параметра предполагает использование только нескольких первых приближений, достаточно использовать только первые члены фундаментальной последовательности.

При проведении численных расчетов в настоящей работе использовался метод граничных элементов нулевого порядка точности, который предполагает аппроксимацию границы отрезками прямых и аппроксимацию известных и неизвестных граничных значений искомой функции и ее нормальной производной на граничных элементах постоянными. Новое положение граничного элемента в процессе движения границы фазового перехода определялось по смещению его концов, которое, в свою очередь, рассчитывалось как среднеарифметическое смещений в серединах смежных элементов и откладывалось по биссектрисе угла между указанными граничными элементами. Точность предложенного алгоритма была проверена на тестовых задачах для симметричных случаев системы (7) – (11), допускающих построение аналитического решения.

**3. Результаты расчетов**

Предложенный подход был проиллюстрирован рядом численных расчетов. С целью упрощения задачи и экономии ресурсов ЭВМ иллюстрирующие расчеты проводились лишь для плоского случая. На рисунке 1 показаны формы границы фазового перехода при оплавлении тела, первоначально имевшего круглую форму при нагреве с боков второй фазы, занимающей квадратную область, а на рисунке 2 представлена эволюция того же тела при всестороннем нагреве.

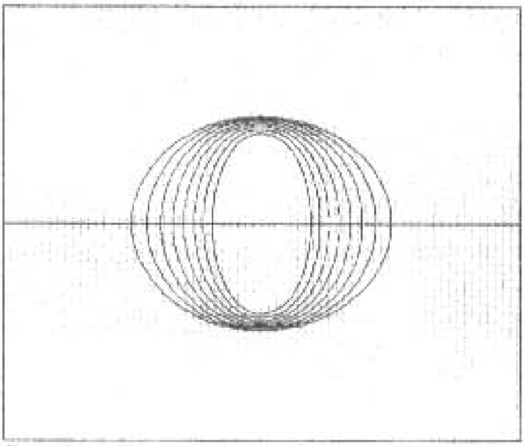

*Рис. 1. Последовательность положений границ фазового перехода при нагреве с боков*

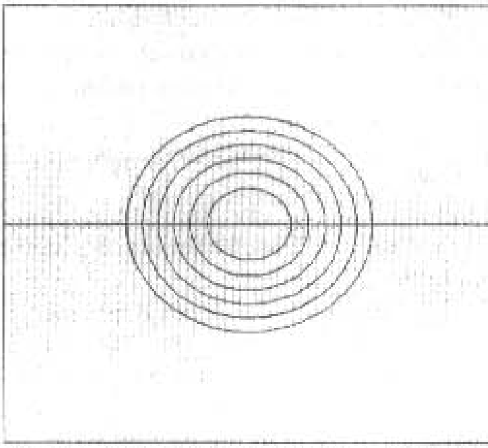

*Рис. 2. Последовательность положен границ фазового перехода п всестороннем нагреве*

**4. Выводы**

Предложенный выше подход обобщает ранее существовавшие методы расчета медленных фазовых переходов и дает возможность эффективно рассчитывать протекание процессов с медленными фазовыми переходами в более широком диапазоне чисел Стефана. Достаточно высокая точность предложенных алгоритмов подтверждена рядом тестовых расчетов. Результаты работы могут представлять интерес при проведении естественнонаучных исследований, связанных с процессами медленных фазовых переходов в окружающей среде и, в первую очередь, гидрометеорологическими процессами. Кроме того, результаты работы могут быть использованы при проведении расчетов в ходе проектирования ракетно-космической техники.

Естественным дальнейшим направлением исследования является применение разработанного подхода в различных предметных областях. Представляется также целесообразным создание алгоритма для сращивания рассмотренных выше асимптотических подходов с численными решениями для начальных стадий процесса фазового перехода, когда существенно влияние начальных условий, и предположение о малости скорости фазового перехода может не выполняться. Среди эффектов на начальной стадии процесса особый интерес представляет зарождение фазы, для которого было бы желательно провести специальный асимптотический анализ.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Рубинштейн Д.И. Проблема Стефана. – Рига: изд. Звайгзне, 1967. – 412 с.
2. Рядно А.А., Миносян Я.П. Сопряженные задачи теплопереноса в системах тел с подвижными границами. – Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1983. – 116 с.
3. Саломатов В. В. Методы нелинейных процессов переноса тепла. ч.1. – Томск: Изд-во ТГУ, – 1976. – 245 с.
4. Саломатов В. В. Методы нелинейных процессов переноса тепла. ч.2. – Томск.: Изд-во ТГУ, – 1978. – 181 с.
5. Lock G. S. H., Gunderson J. R., Quon D., Donnelly J. K. A study of onedimensional ice formation with particular reference to periodic growth and decay. // Int. J. Heat and Mass Transfer, 1969, v.12, N11.
6. Беляев Н. М., Рядно А. А. Методы теории теплопроводности. – М.: "Высшая школа", – 1982. – т. 1. – 327 с., т. 2. – 304 с.
7. Бевза Э.К., Евдокимов Д.В., Кочубей А.А. Обобщенное приближение Лейбензона для медленных фазовых переходов // Сб. тез. Міждержавної науково-методичної конференції "Проблеми математичного моделювання", 29 травня - 31 травня 2002, – Дніпродзержинськ. – с. 11-12