Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 622.455: 541.183.5+17.968.519.6 № 590, 2003, с. 37-43

Конвективный перенос примеси в канале с пористыми стенками

Л. С. Беляева, В. А. Щербина
НИИ горноспасательного дела, г. Донецк
ХНУ им. В.Н. Каразина, г. Харьков.

The pointwise source of fixed efficiency produces the admixture which moves with a steady flow of air in the semi-infinite channel with porous walls. We study the boundary value problem with initial conditions for the concentration of the admixture as a function of the distance from the source and time.

Математическое моделирование процессов переноса примесей вентиляционным потоком воздуха в горных выработках – актуальная с точки зрения технических приложений и математически содержательная задача, привлекающая внимание многих исследователей ([1]-[4]).

Авторы предлагают свой вариант математического моделирования процесса массопереноса, позволивший получить явное аналитическое выражение для искомых величин.

В канал с пористыми стенками, диаметр которого пренебрежимо мал по сравнению с его длиной, из точечного источника с заданным дебитом поступает примесь (в виде газа). Воздух, заполняющий канал, движется так, что v - осреднённое по времени и поперечному сечению постоянное значение скорости вдоль оси канала. Турбулизация воздушного потока обеспечивает постоянное в каждом поперечном сечении в момент времени значение плотности примеси, так что эта плотность будет рассматриваться далее как функция двух переменных – продольной координаты (вдоль оси канала) и времени. Поры твёрдых стенок канала могут быть заполнены воздухом (с примесями) или водой. Проникающая из полости канала в его стенки примесь будет аккумулироваться в них за счёт двух механизмов – повышения концентрации в газе (жидкости), заполняющей поры, и перехода в связанное состояние за счёт химических реакций или оседания на стенках пор, подобно тому, как это происходит в активированном древесном угле.

Для концентрации $u(x,t)$ выполняется уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{L}{S} j(x,t) + q(x,t), \quad x > 0, t > 0 \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = 0. \tag{2}$$

Здесь $j(x,t)$ – плотность потока газа – примеси в стенку канала, $q(x,t)$ - объёмная плотность источников примеси, S - площадь поперечного сечения канала, L - длина периметра этого сечения.

Для полноты описания математической модели добавим к равенствам (1) и (2) требование: $u(x,t) \to 0$ при $x \to \infty$.

Изменение концентрации примеси в стенках $a(x,y,t)$ описывается уравнением вида

$$\frac{\partial a}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2}\right) - \delta a \tag{3*}$$

причём следует считать все производные по x пренебрежимо малыми величинами, так что уравнение (3*) можно переписать в форме

$$\frac{\partial a}{\partial t} = D\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} - \delta a \tag{3}$$

Действительно, как показывает эксперимент, $u(x,t)$ и $a(x,0,t)$ убывают вдвое на расстояниях порядка нескольких сот метров, тогда как $a(x,y,t)$ убывает в разы по мере роста переменной y на интервалах длиной в несколько сантиметров.

На стенке канала происходит массообмен, который можно описать соотношениями

$$j(x,t) = -D\frac{\partial a(x,0,t)}{\partial y} \tag{4*}$$

и

$$j(x,t) = k\left[u(x,t) - \gamma a(x,0,t)\right] \tag{4}$$

Для отыскания неизвестной $u(x,t)$ у нас имеется пара уравнений – (1) и (3), пара условий стыковки – (4*) и (4), и начальное условие (2) для $u(x,t)$ вместе с таким же условием для $a(x,t)$:

$$a(x,t) = 0, \quad x, y > 0. \tag{5}$$

Решение уравнения (3) мы будем искать в виде «потенциала простого слоя», т.е. контурного интеграла по границе первого квадранта в плоскости $(y,t): L_1 \cup L_2$, где L_1 и L_2 – положительные полуоси $L_1 = \{(y,t): t = 0,\ y > 0\}$, $L_2 = \{(y,t): t > 0,\ y = 0\}$. Чтобы выписать этот потенциал, нам потребуется фундаментальное решение $K(y,t)$ для уравнения (3):

$$\frac{\partial K}{\partial t} = D\frac{\partial^2 K}{\partial y^2} - \delta K + \delta(y)\delta(t), \quad (y,t) \in R^2. \tag{6}$$

Если обозначить через $\widetilde{K}(t;\lambda)$ преобразование Фурье по переменной y для искомой $K(y,t)$, то из (6) получается уравнение

$$\frac{\partial \widetilde{K}(t;\lambda)}{\partial t} + (D\lambda^2 + \delta)\widetilde{K}(t;\lambda) = \delta(t)$$

Отсюда получаем: $\widetilde{K}(t;\lambda) = \theta(t)e^{-\delta t}e^{-Dt\lambda^2}$, т.е.

$$K(t,y)=\frac{\theta(t)\,e^{-\delta t}}{2\sqrt{\pi D t}}e^{-\frac{y^2}{4Dt}}$$

Теперь будем искать $a(x,y;t)$ в виде

$$a=\int_0^\infty K(t-\tau,y)f_1(\tau)d\tau+\int_0^\infty K(t,y-\xi)f_2(\xi)d\xi,$$

где $f_1(\tau)$ и $f_2(\xi)$ подлежат определению из начального и краевого условия для $a(x,y,t)$.

Поскольку $\lim\limits_{t\downarrow 0}K(t,y-\xi)=\delta(y-\xi)$ и

$$\int_0^\infty K(t-\tau,y)f_1(\tau)d\tau=\int_0^t\frac{\exp\left(-\delta\cdot(t-\tau)-\frac{y^2}{4D.(t-\tau)}\right)}{2\sqrt{\pi D(t-\tau)}}f_1(\tau)d\tau\underset{t\downarrow 0}{\to}0,$$

из условия $a(x,y,0)=0$ сразу получаем

$f_2(y)\equiv 0.$

Таким образом, для $a(x,y,t)$ получается представление вида

$$a(x,y,t)=\int_0^t\frac{\exp\left(.-\delta\cdot(t-\tau)-\frac{y^2}{4D(t-\tau)}.\right)}{2\sqrt{\pi D(t-\tau)}}f_1(\tau)d\tau \qquad (7)$$

Отсюда

$$-D\frac{\partial a(x,y,t)}{\partial y}=\frac{1}{4\sqrt{\pi D}}\int_0^t\frac{\exp\left(-\delta\cdot(t-\tau)-\frac{y^2}{4D(t-\tau)}\right)}{\left(\sqrt{t-\tau}\right)^3}\;y\;\;f_1(\tau)d\tau=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{y}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty}\exp\left(-\delta\frac{y^2}{4DS^2}-S^2\right)f_1\left(t-\frac{y^2}{4DS^2}\right)dS\underset{y\to 0}{\to} \qquad (8)$$

$$\underset{y\to 0}{\to}\frac{f_1(t)}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-S^2}dS=\tfrac{1}{2}f_1(t)$$

Здесь была сделана замена:

$$\frac{y}{2\sqrt{D(t-\tau)}}=S,\quad dS=\frac{y}{4\sqrt{D}(\sqrt{t-\tau})^3}d\tau,\quad t-\tau=\frac{y^2}{4DS^2},\quad \tau=t-\frac{y^2}{4DS^2}.$$

Если в (4) выразить $j(x,t)$ из (4') и воспользоваться (7), (8), то для неизвестной $f_1(t)$ получится интегральное уравнение вида

$$\frac{1}{2k} f_1(t) + \frac{\gamma}{2\sqrt{\pi D}} \int_0^t \frac{e^{-\delta(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}} f_1(\tau)\,d\tau = u(x,t)$$

Перейдём к преобразованию Лапласа от обеих частей этого равенства. Поскольку

$$\int_0^\infty e^{-pt} \frac{e^{-\delta t}}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{p+\delta}} \int_0^\infty e^{-S} S^{\frac{1}{2}-1}\,dS = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p+\delta}},$$

то $\frac{1}{2k}\left(1+\frac{k\gamma}{\sqrt{D(p+\delta)}}\right)F(p) = U(x,p)$, и, на основании (4'), преобразование Лапласа для j

$$J(x,p) = \frac{2k\sqrt{D(p+\delta)}}{k\gamma+\sqrt{D(p+\delta)}}U(x,p). \tag{9}$$

Будем считать, что $q(x,t) = q(t)\delta(x)$, и, переходя в (1) с учётом начального условия (2) к преобразованию Лапласа, получаем для $U(x,p)$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$pU + v\frac{dU}{dx} + \frac{L}{S}J = Q(p)\delta(x)\frac{1}{lS}, \quad x>0, \tag{10}$$

где $Q(p)$ – преобразование Лапласа $q(t)$. В простейшем случае $q(t) = q\,\theta(t)$ и $Q(p) = q\,{}^{1}\!/_{p}$.

Уравнение (10) удобно рассматривать на всей оси $-\infty < x < \infty$, решая его в классе функций, быстро убывающих при $x \to -\infty$.

Подставив (9) в (10), мы получим для $U(x,p)$ выражение

$$U(x,p) = \frac{1}{Sv}\int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{v}\left(p+\frac{L}{S}\frac{2k\sqrt{D(p+\delta)}}{k\gamma+\sqrt{D(p+\delta)}}\right)\right)(x-y)\frac{\delta(y)}{l}\,dy\,Q(p) =$$

$$= \frac{1}{Sv}\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x-y)\times\exp\left(-\frac{1}{v}\left(p+\frac{L}{S}\frac{2k\sqrt{D(p+\delta)}}{k\gamma+\sqrt{D(p+\delta)}}\right)\right)(x-y)\frac{\delta(y)}{l}\,dy\,Q(p) =$$

$$= \frac{\theta(x)}{vS}Q(p)\times\exp\left(-\frac{x}{v}\left(p+\frac{L}{S}\frac{2k\sqrt{D(p+\delta)}}{k\gamma+\sqrt{D(p+\delta)}}\right)\right).$$

Для получения решения нашей задачи – плотности распределения примеси $u(x,t)$ необходимо найти оригинал найденного преобразования Лапласа - $U(x,p)$.

Итак, если $Q(p)=\dfrac{q}{p}$, то

$$u(x,t)=\frac{q\theta(x)}{vS}\frac{1}{2\pi i}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty}\exp\left(tp-\frac{x}{v}\left(p+\frac{L}{S}\frac{2k\sqrt{D(p+\delta}}{k\gamma+\sqrt{D(p+\delta)}}\right)\right)\frac{dp}{p} \quad (11)$$

Здесь C>0 любое. Подынтегральная функция в комплексной плоскости p имеет в точке p=0 полюс первого порядка, точку ветвления при $p=-\delta$ и экспоненциально быстро убывает, если $t>\dfrac{x}{v}$, а $\operatorname{Re} p\to-\infty$.

По этим причинам

$$u(x,t)=\frac{q\theta(x)}{vS}\left\{\exp\left(-\frac{x}{v}\frac{L}{S}\frac{2k\sqrt{D\delta}}{k\gamma+\sqrt{D\delta}}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\exp\left(tp-\frac{x}{v}\left(p+\frac{L}{S}\frac{2k\sqrt{D(p+\delta}}{k\gamma+\sqrt{D(p+\delta)}}\right)\right)\frac{dp}{p}\right\}, \quad (12)$$

где контур интегрирования состоит из двух берегов разреза, идущего от точки $-\delta$ до $-\infty$ вдоль отрицательной полуоси:

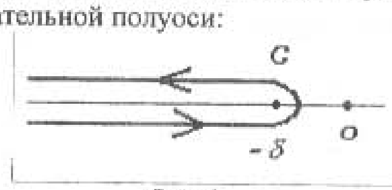

Рис. 1.

В интеграле по контуру C сделаем замены:

$p+\delta=z$, где $z\in C'$ – пробегает берега разреза вдоль отрицательной полуоси,

$z=(i\sigma)^2$, где σ пробегает вещественную ось.

Нетрудно видеть, что

$$J=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\exp\left(\left(t-\frac{x}{v}\right)p-\frac{x}{v}\frac{L}{S}\frac{2k\sqrt{D(p+\delta}}{k\gamma+\sqrt{D(p+\delta)}}\right)\frac{dp}{p}=$$
$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\sigma^2\left(t-\frac{x}{v}\right)-\frac{x}{v}\frac{2kDL}{S}\frac{\sigma^2}{(k\gamma)^2+D\sigma^2}\right)\sin\left(\frac{xL}{vS}\frac{2k^2\gamma\sqrt{D}\sigma}{(k\gamma)^2+D\sigma^2}\right)\frac{\sigma\,d\sigma}{\sigma^2+\delta}$$

Сделаем новые замены:

1) $\sigma=\dfrac{k\gamma}{\sqrt{D}}\xi,\quad -\infty<\xi<\infty,$

2)

$$\frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}=\varsigma,\quad 0<\varsigma<1,\quad \xi=\frac{\varsigma}{\sqrt{1-\varsigma^2}},\quad 1+\xi^2=\frac{1}{1-\varsigma^2},\quad \xi\,d\xi=\frac{\varsigma\,d\varsigma}{(1-\varsigma^2)^2}.$$

Отсюда, после простых вычислений, получим

$$J = -\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\exp\left(-\frac{(k\gamma)^2}{D}\left(t - x/v\right)\frac{\varsigma^2}{1-\varsigma^2} - 2\frac{xL}{vS}k\varsigma^2\right)\frac{\sin\left(\frac{xL}{vS}2k\varsigma\sqrt{1-\varsigma^2}\right)}{1-\varsigma^2}\times$$

$$\times\frac{\varsigma\, d\varsigma}{\varsigma^2 + \frac{D\delta}{(k\gamma)^2}(1-\varsigma^2)}.$$

После замены $\varsigma = \sin\frac{\varphi}{2}$ интеграл J примет окончательно вид

$$J = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left(-a\,tg^2\frac{\varphi}{2} - b\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{b}{2}\sin\varphi\right) tg\frac{\varphi}{2}\frac{d\varphi}{\alpha\cos^2\frac{\varphi}{2}+\sin^2\frac{\varphi}{2}}, \quad (13)$$

где $a = \frac{(k\gamma)^2}{D}\left(t - \frac{x}{v}\right)$, $b = 2\frac{xL}{vS}k$, $\alpha = \frac{D\delta}{(k\gamma)^2}$.

Все эти константы, как легко видеть, безразмерные и положительные, что обеспечивает гладкость и ограниченность подинтегральной функции. Интеграл J с высокой точностью табулируется с помощью простейшей квадратурной «формулы прямоугольников»:

$$J \cong \sum_{k=0}^{2N} F\left(k\frac{2\pi}{2N+1}\right)\frac{2\pi}{2N+1}$$

Из формулы (11) легко заключить, что $u(x,t)$ обращается в нуль не только при отрицательных x, но и при $\frac{x}{v} > t$, т.е. в формуле (12) вместо множителя $\theta(x)$ можно написать $\chi_{(0,vt)}(x)$ – функцию, равную единице для $x \in (0,vt)$ и нулю при $x \notin (0,vt)$.

С учётом проделанных вычислений для $u(x,t)$ получаем окончательное выражение

$$u(x,t) = \frac{q}{vS}\chi_{(0,vt)}(x)\left\{\exp\left(-\frac{xL}{vS}\frac{2k\sqrt{D\delta}}{k\gamma+\sqrt{D\delta}}\right) + J\right\}, \quad (14)$$

где J даётся формулой (13).

При $\delta = 0$ выражение для $u(x,t)$ несколько упрощается:

$$u(x,t) = \frac{q}{vS}\chi_{(0,vt)}(x)\left\{1 - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left(-a\,tg^2\frac{\varphi}{2} - b\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\frac{\sin\left(b/2\,\sin\varphi\right)}{\sin\varphi}d\varphi\right\}$$

Подынтегральная функция, очевидно, положительна, так что интеграл описывает ту часть примеси, которая поглощается пористой стенкой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.С. Беляева, А.А.Березовский, С.П. Греков Математическая модель переноса компонентов вредных веществ по горным выработкам с учётом абсорбции и химических реакций.
2. С.П. Греков, Б.П .Лясецкий, А.Е. Калюсский, Н.А. Родимова Решение сопряжённой задачи переноса примеси ограниченным потоком при наличии диффузии в пористую стенку канала, адсорбции и химической реакции 1 порядка. // Дифференциальные уравнения с частными производными в прикладных задачах. Ин-т математики АН УССР, Киев, 1982.
3. К.З. Ушаков, А.С. Бурчаков, И.И. Медведев Рудничная аэрология, Москва: Недра, 1987, 44 с.
4. Дж Астарита. Массопередача с химической реакцией. Москва: Химия, 1971, 224 с.