Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
№ 590, 2003, с. 44-48

УДК 532.546

Краевая задача об отжиме пресных вод солеными в подземной гидродинамике

Э. Н. Береславский, Т. В. Соловьева
Академия гражданской авиации, Россия

Within the frameworks of the two-dimensional theory of steady filtration, we studied the mathematical model of fresh subsoil waters running through a horizontal water-bearing layer under pressure to the sea (a basin, ditch or reservoir) with salty water. We stated the combined edge multiparameter problem from the analytical functions theory and solved it with the help of P.J.Polubarinova-Kochina's method. On the basis of this model we elaborated an algorithm of calculation of intrusion (introductions of salty water into water- bearing layers) in such cases when streams of subsoil water unload in the sea at lateral inflow. With the help of received exact analytical dependencies and numerical calculations we analyzed the impact of physical parameters of the model on the character and the pressings degree. The hydrodynamical structure is described and prominent features of the modeled current are revealed.

В рамках двухмерной теории установившейся фильтрации рассматривается математическая модель течения пресных грунтовых вод из водохранилища через горизонтальный напорный водоносный пласт к морю (бассейну, котловану, резервуару, траншее и пр.) с соленой водой. Для ее изучения формулируется и с применением метода П. Я. Полубариновой-Кочиной решается смешанная многопараметрическая краевая задача теории аналитических функций. На базе этой модели разработан алгоритм расчета отжима в ситуации, когда потоки грунтовых вод разгружаются в море сбоку. С помощью полученных точных аналитических зависимостей и числовых расчетов приводится анализ структуры и характерных особенностей моделируемого течения.

1. Введение.

Интрузия соленых вод (т.е. процесс внедрения в земную сушь или пласт соленых вод и вытеснения ими фильтрирующихся пресных грунтовых вод) широко распространена в прибрежных морских районах как в естественных условиях, так и при нарушении режима грунтовых вод вследствие значительного отбора их подземными водозаборами. При интенсивной эксплуатации, когда может нарушиться динамическое равновесие между пресными и солеными водами, возникает реальная угроза внедрения морской соленой воды в пресноводный пласт и его последующее загрязнение.

Обычно при расчете интрузии соленых вод в пласт с потоком грунтовых вод предполагается, что морское дно, а, значит, и граница раздела между пресной и соленой жидкостями, являются горизонтальными [1] и разгрузка грунтовых вод в море происходит всегда снизу. Г. К. Михайлов [2] обратил внимание на возможность и необходимость рассмотрения боковой разгрузки, когда первоначальное положение контакта жидкостей является вертикальным. В работах авторов [3-5] изучаются предельный случай задачи – течение в полубесконечном пласте, а также случай, когда над поверхностью моря находится слой пресной воды. В настоящей работе рассматривается течение из водохранилища через горизонтальный напорный водоносный пласт конечных размеров, вдоль правой вертикальной границы которого происходит высачивание в море. Математическое моделирование подобных течений на базе гидродинамической теории приводит к смешанным многопараметрическим краевым задачам теории аналитических функций с неизвестной свободной границей. Для решения применяется метод П. Я. Полубариновой-Кочиной [6,7], сводящий дело к исследованию и интегрированию уравнений класса Фукса с регулярными особыми точками [8]. Общее решение, как обычно, представлено в параметрическом виде в форме интегралов от полных эллиптических интегралов первого рода и иррациональных множителей.

С помощью полученных точных аналитических зависимостей и численных расчетов проанализировано влияние всех физических параметров модели на степень и характер отжима.

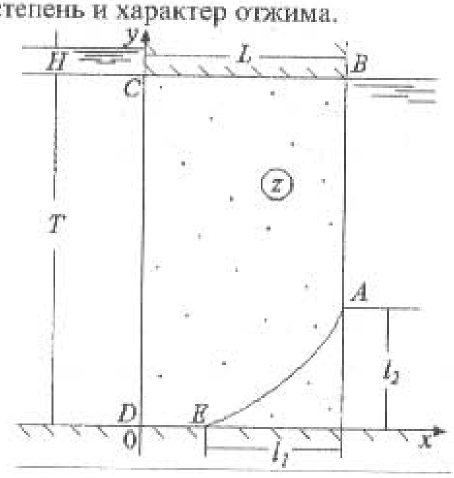

Рис. 1. Область течения

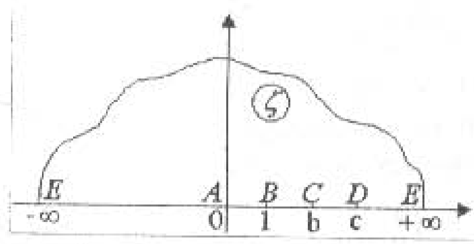

Рис. 2. Область параметрической переменной

2. Постановка задачи и ее решение.

На рис. 1 схематично представлена область течения. Пресная вода плотности ρ_1, движущаяся из водохранилища через горизонтальный напорный водоносный пласт длиной L, поступает в море с соленой водой плотности ρ_2 $(\rho_2 > \rho_1)$. При этом в правой нижней части пласта происходит отжим движущейся пресной жидкости более тяжелой покоящейся соленой, в результате чего первоначально вертикальная граница раздела между жидкостями начинает деформироваться и смещается в сторону водохранилища, образуя так называемый язык соленой воды. При интрузии языка в пресноводный пласт подземные воды загрязняются и теряют свою ценность. Поэтому определение размеров отжима представляет большой практический интерес.

Будем полагать, что движение грунтовых вод подчиняется закону Дарси с известным коэффициентом фильтрации $\kappa = const$ и происходит в однородном изотропном грунте, который считается несжимаемым, как и фильтрующаяся через него жидкость. Мощность T и длина L пласта, действующий напор H и параметр $\rho = \rho_2/\rho_1 - 1$ считаются заданными. Как это принято в задачах подобного рода [1,2,6,7], влиянием капиллярных и диффузионных явлений на границе жидкостей мы пренебрегаем.

Введем комплексный потенциал течения $\omega = \varphi + i\phi$ и комплексную координату $z = x + iy$, отнесенные соответственно к κT и T. Требуется определить положение границы раздела AE области фильтрации Z и пару гармонических функций φ и ϕ, сопряженных внутри этой области так, чтобы вдоль участков ее границы выполнялись следующие краевые условия:

$$\begin{aligned} &AB: x = L,\ \varphi - \rho y = const; \quad &&BC: y = T,\ \phi = Q; \\ &CD: x = 0,\ \varphi = -H; &&DE: y = 0,\ \phi = 0; \\ &AE: \phi = 0,\ \varphi - \rho y = const. \end{aligned} \tag{1}$$

Для решения задачи вводится вспомогательная параметрическая переменная ζ и функции: $z(\zeta)$, конформно отображающая верхнюю полуплоскость ζ на область z (соответствие точек указано на рис. 2) и производные $Z = dz/d\zeta$ и $F = d\omega/d\zeta$.

Определяя показатели функций Z и F в особых точках $\zeta = 0, 1, b, c$ и ∞, найдем, что функции Z и F являются линейными комбинациями двух линейно независимых ветвей следующей функции Римана [8]:

$$P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & b & c & \infty & \\ 0 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & 2 & \zeta \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 2 & \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(1-\zeta)(b-\zeta)(c-\zeta)}} P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & 1/2 & \zeta \\ 0 & 0 & 1/2 & \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{Y}{\sqrt{(1-\zeta)(b-\zeta)(c-\zeta)}}. \tag{2}$$

Соответствующее (2) линейное дифференциальное уравнение класса Фукса $\zeta(1-\zeta)Y'' + (1-2\zeta)Y' - \frac{1}{4}Y = 0$ имеет два линейно независимых интеграла $Y_1 = K(\zeta)$, $Y_2(\zeta) = K'(\zeta)$. Поэтому, в качестве искомых функций можно взять

$$F = A\rho \frac{K'(\zeta) + iK(\zeta)}{\sqrt{(1-\zeta)(b-\zeta)(c-\zeta)}}, \quad Z = Ai\frac{K'(\zeta)}{\sqrt{(1-\zeta)(b-\zeta)(c-\zeta)}} \tag{3}$$

Здесь $K(\zeta)$ - полный эллиптический интеграл первого рода. Отметим, что $K'(\zeta)$ имеет логарифмическую особенность в точке $\zeta = 0$, вблизи которой асимптотическое представление имеет вид $K'(\zeta) = -\frac{1}{2}\ln\zeta$.

Параметрическое решение задачи (1) содержит три неизвестные постоянные A, b и c, для определения которых служат физические характеристики T, L и H:

$$T = A\int_b^c \frac{K\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)d\zeta}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)(\zeta-b)(c-\zeta)}},\ L = A\int_1^b \frac{K\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)d\zeta}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)(b-\zeta)(c-\zeta)}}, \quad (4)$$

$$H = \rho A\int_1^b \frac{K\left(\frac{1}{\zeta}\right)d\zeta}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)(b-\zeta)(c-\zeta)}}$$

После их нахождения рассчитываются координаты точек линии раздела

$$x(\zeta) = l_1 - A\int_{-\infty}^{\zeta} \frac{K\left(\frac{\zeta}{\zeta-1}\right)d\zeta}{(1-\zeta)\sqrt{(b-\zeta)(c-\zeta)}},\ y(\zeta) = A\int_{-\infty}^{\zeta} \frac{K\left(\frac{1}{1-\zeta}\right)d\zeta}{(1-\zeta)\sqrt{(b-\zeta)(c-\zeta)}} \quad (5)$$

Полагая в уравнениях (5) $\zeta = 0$, найдем искомые величины отжима $l_1 = L - x(0)$, $l_2 = y(0)$, а также фильтрационный расход

$$Q = \rho A\int_0^1 \frac{K(\zeta)d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta)(b-\zeta)(c-\zeta)}}$$

При слиянии точек C и D, что соответствует случаю $L = \infty$, имеем $b = c$ и получаются результаты работ [3,4].

3. Численные результаты.

На рис. 3-5 представлены зависимости размеров отжима l_1 (кривые 1) и l_2 (кривые 2) от параметров ρ, Q и T, рассчитанные при $T = 1$, $Q = 0{,}01$ и $\rho = 0{,}01$, в предельном случае, когда $L = \infty$, и вместо действующего напора задается фильтрационный расход.

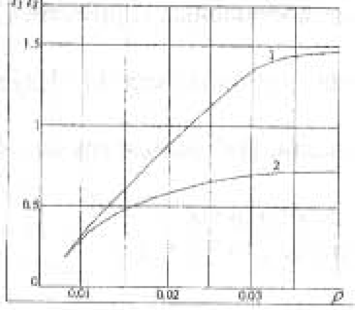

Рис. 3. Зависимости от ρ

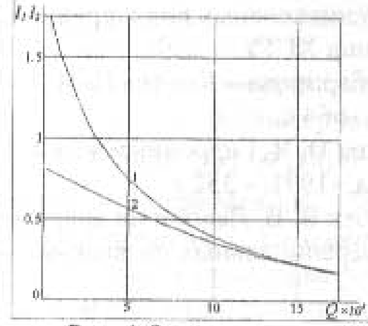

Рис. 4. Зависимости от Q

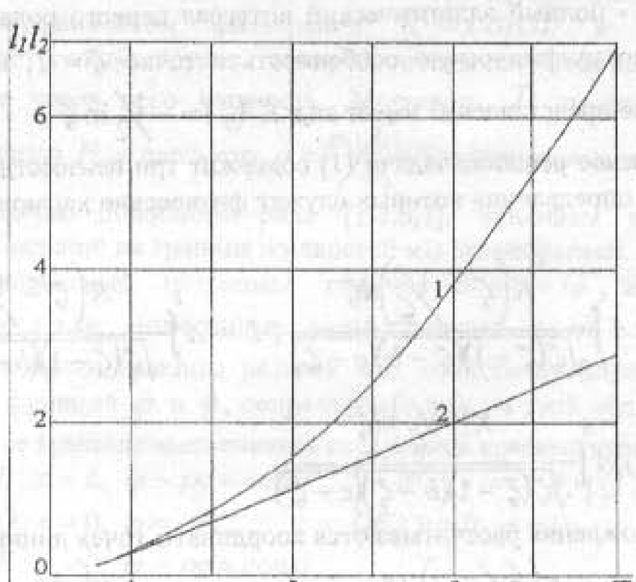

Рис. 5. Зависимости от T

ЛИТЕРАТУРА

1. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. - М.: Мир. 1971. - 452 с.
2. Михайлов Г. К. Строгое решение задачи об истечении грунтовых вод из горизонтального пласта в бассейн с более тяжелой жидкостью // Докл. АН СССР. 1956. Т. 110. № 6. - С. 945-948.
3. Береславский Э. Н., Соловьева Т. В. О течении пресных вод в бассейн с соленой водой // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: Межвуз. темат. сб. тр. / СПбГАСУ, СПб., - 2001. - №7. - С. 138-143.
4. Береславский Э. Н., Соловьева Т. В. Математическое моделирование процессов отжима при напорных течениях в прибрежных водоносных пластах // Изв. РАН, Водные ресурсы. - 2002. - Т. 29 № 6. - С. 692-697.
5. Береславский Э. Н., Соловьева Т. В. Математическое моделирование интрузии соленых вод в прибрежных напорных водоносных горизонтах // Вестник ХГТУ. – 2002. – № 2 (15). – С. 75-78.
6. Полубаринова – Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука. 1977. -664 с.
7. Кочина П. Я. Гидродинамика и теория фильтрации. Избранные труды. - М.: Наука, -1991. - 352 с.
8. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории линейных дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 436 с

УДК 539.3

Приме
к расчету вын

Днепроп

The problems of
forced vibrations c
analysis of calcula
executed.

Во многих случаях
развитие трещин пр
актуальным является
При решении данно
ограничивается задача
[1]. Для расчета выну
применяются числен
прямоугольной плас
полученное на основе
МКЭ возникает пробл
вершины трещины. По
граничных элементов
Граничные интеграль
получены в монографи
размеров с трещинам
вопросы практическо
граничных элементов
конечных размеров с
поверхности тела и
эффективности испол
решения.

Пусть невесомое уп
область Ω с границей
двусторонней кривой
понимать соответстве
деформаций и напряже
деформации считаются
состоянии отсутствуют