Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
№ 833, 2008, с.17-26

УДК 519.6

Про один метод розв'язання задачі адсорбційного масопереносу в неоднорідному обмеженому середовищі

О. А. Баляснікова, М. П. Ленюк
Чернівецький факультет Національного технічного університету „Харківський політехнічний інститут", Україна

Using a Fourier finite integral transform for segment and segment with one point of conjugation the integral image of the exact analytical solution of the adsorptive mass transfer problem in the limited medium have been obtained when modeling the transfer function by constant (point 2) and by piecewise constant quantity (point 3).

1. Вступ

Розвиток сучасних технологій та створення новітніх матеріалів ставить нові завдання до дослідження механізму кінетики та інтенсифікації дифузійно-адсорбційного масопереносу в каналах різної конструкції. Що стосується прямолінійних і циліндрично-кругових каналів, то такі дослідження виконано в роботі [1] в припущенні, що середовище кусково-однорідне з м'якими межами. Математичному моделюванню технологічних й адсорбційних процесів в неоднорідних середовищах присвячені роботи [2, 3]. В даній роботі ми розглянемо один клас задач адсорбційного масопереносу, для якого можна одержати інтегральне зображення розв'язку.

2. Загальна постановка задачі

Розглянемо процес адсорбційного масопереносу, який протікає в обмеженому прямолінійному каналі. При відповідних припущеннях математично це приводить до побудови обмеженого в області $Д = \{(t,z) : t \in (0,\infty),\, z \in (0,l)\}$ розв'язку системи рівнянь [1]

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial t} + \eta^2 C - D^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(g(z)\frac{\partial C}{\partial z}\right) = f(t,z)\,,\ \ \frac{\partial a}{\partial t} = \beta(C - \gamma a) \tag{1}$$

за початковими умовами

$$C(t,z)\big|_{t=0} = C_0(z)\,,\ a(t,z)\big|_{t=0} = a_0(z) \tag{2}$$

та крайовими умовами

$$\left(-h_{11}\frac{\partial}{\partial z} + h_{12}\right)C(t,z)\Bigg|_{z=0} = \omega_1(t),\ \left(h_{21}\frac{\partial}{\partial z} + h_{22}\right)C(t,z)\Bigg|_{z=l} = \omega_2(t), \tag{3}$$

З другого рівняння системи (1) отримуємо зв'язок між $C(t,z)$ та $a(t,z)$:

$$a(t,z) = e^{-\beta\gamma t}a_0(z) + \beta\int_0^t e^{-\beta\gamma(t-\tau)}C(\tau,z)d\tau \tag{4}$$

Це дає можливість знайти, наприклад, вираз

$$\left(-h_{11}\frac{\partial}{\partial z}+h_{12}\right)a(t,z)\Big|_{z=0}=e^{-\beta\gamma t}\left(-h_{11}a_0'(z)+h_{12}a_0(z)\right)\Big|_{z=0}+\beta\int_0^t e^{-\beta\gamma(t-\tau)}\omega_1(\tau)d\tau$$

або інший вираз від $a(t,z)$ на межі $z=0$ чи $z=l$. Тому крайову умову стосовно $a(t,z)$ при $z=0$ та $z=l$ ставити немає сенсу.

З другого боку, згідно другого рівняння системи (1)

$$C(t,z)=\left(\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial t}+\gamma\right)a(t,z) \tag{5}$$

Якби ми вимагали, наприклад, щоб $\left(-h_{11}\frac{\partial}{\partial z}+h_{12}\right)a(t,z)\Big|_{z=0}=\omega_{11}(t)$, то мали б, що $\left(-h_{11}\frac{\partial}{\partial z}+h_{12}\right)C(t,z)\Big|_{z=0}=\left(\frac{1}{\beta}\frac{d}{dt}+\gamma\right)\omega_{11}(t)$.

Отже, формули (4), (5) показують, що за відомою $C(t,z)$ або $a(t,z)$ можна знайти значення на межі $z=0$ та $z=l$ як самої іншої функції, так і будь-якого диференціального виразу від неї.

Ми вважаємо, що коефіцієнти $D, \eta, \beta, \gamma, h_{j1}, h_{j2}$ невід’ємні, $h_{j1}+h_{j2}\neq 0$, функції $g(z), f(t,z), C_0(z), a_0(z), \omega_1(t), \omega_2(t)$ неперервно диференційовані та обмежені.

Розглянемо задачу адсорбції в залежності від функції $g(z)$.

3. Функція переносу стала

Функція $g(z)=g_0\equiv const$. Не зменшуючи загальності задачі, можна вважати $g_0=1$. Треба побудувати обмежений в області $Д$ розв’язок системи рівнянь

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{\partial a}{\partial t}+\eta^2 C-D^2\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}=f(t,z),\quad \frac{\partial a}{\partial t}=\beta(C-\gamma a) \tag{6}$$

за початковими умовами (2) та крайовими умовами

$$\left(-h_{11}\frac{\partial}{\partial z}+h_{12}\right)a(t,z)\Big|_{z=0}=\omega_{11}(t),\quad \left(h_{21}\frac{\partial}{\partial z}+h_{22}\right)a(t,z)\Big|_{z=l}=\omega_{21}(t), \tag{7}$$

З другого рівняння системи (6) функцію

$$C(t,z)=\left(\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial t}+\gamma\right)a(t,z) \tag{8}$$

підставимо в перше рівняння цієї ж системи:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}+\left[(1+\gamma)\beta+\eta^2\right]\frac{\partial a}{\partial t}+\beta\gamma\eta^2 a-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\beta\gamma\right)D^2\frac{\partial^2 a}{\partial z^2}=\beta f(t,z) \tag{9}$$

Ми одержали задачу побудови обмеженого в області $Д$ розв’язку рівняння (9) за початковими умовами

$$\left\{\frac{d^2}{dt^2}+\left[(1+\gamma)\beta+\eta^2+\beta_n^2D^2\right]\frac{d}{dt}+\beta\gamma\left(\eta^2+\beta_n^2D^2\right)\right\}H(t,\beta_n^2)=0 \quad ; \qquad (16)$$

2) початкові умови

$$H(t,\beta_n^2)\Big|_{t=0}=0\,,\quad \frac{dH(t,\beta_n^2)}{dt}\Big|_{t=0}=1\ . \qquad (17)$$

Однорідному рівнянню (16) відповідає характеристичне рівняння:

$$p^2+[(1+\gamma)\beta+\eta^2+\beta_n^2D^2]p+\gamma\beta\left(\eta^2+\beta_n^2D^2\right)=0\,. \qquad (18)$$

Коренями цього квадратного рівняння є функції

$$p_{1,2}\left(\beta_n^2\right)=-\frac{1}{2}\left\{q_1\left(\beta_n^2\right)\pm\sqrt{q_2\left(\beta_n^2\right)}\right\} \qquad (19)$$

Тут прийняті позначення:

$$q_1\left(\beta_n^2\right)=(1+\gamma)\beta+\eta^2+\beta_n^2D^2>0\,,$$

$$q_2\left(\beta_n^2\right)=\left(\eta^2+\beta_n^2D^2-\gamma\beta\right)^2+\beta\left[\beta+2\left(\eta^2+\beta_n^2D^2+\gamma\beta\right)\right]>0\,.$$

Оскільки $\left[q_1\left(\beta_n^2\right)\pm\sqrt{q_2\left(\beta_n^2\right)}\right]>0$, то $p_{1,2}\left(\beta_n^2\right)<0$.

Якщо покласти $H(t,\beta_n^2)=Ae^{p_1(\beta_n^2)t}+Be^{p_2(\beta_n^2)t}$, то початкові умови (17) для визначення *A, B* дають алгебраїчну систему $A+B=0$, $Ap_1+Bp_2=1$.

Звідси одержуємо: $A=\dfrac{1}{p_1-p_2}$, $B=-\dfrac{1}{p_1-p_2}$, $p_1-p_2=-\sqrt{q_2(\beta_n^2)}$.

Таким чином, функція Коші

$$H(t,\beta_n^2)=e^{-\frac{1}{2}q_1(\beta_n^2)t}\,\frac{sh\left(\frac{1}{2}\sqrt{q_2(\beta_n^2)}t\right)}{\frac{1}{2}\sqrt{q_2(\beta_n^2)}}\,. \qquad (20)$$

Безпосередньо перевіряється, що розв’язком задачі Коші (14), (15) є функція

$$\begin{aligned}\widetilde{a}_n&=H(t,\beta_n^2)\left(\widetilde{f}_{1n}+q_1(\beta_n^2)\widetilde{a}_{0,n}\right)+\frac{dH(t,\beta_n^2)}{dt}\widetilde{a}_{0,n}+\int_0^t H(t-\tau,\beta_n^2)\widetilde{F}_n(\tau)d\tau\equiv\\&\equiv H(t,\beta_n^2)\left(\beta\widetilde{C}_{0,n}+\left[\beta+\eta^2+D^2\beta_n^2\right]\widetilde{a}_{0,n}\right)+\frac{dH}{dt}\widetilde{a}_{0,n}+\\&+\int_0^t\beta H(t-\tau,\beta_n^2)\widetilde{f}_n(\tau)d\tau+\frac{\beta_n}{\sqrt{h_{11}^2\beta_n^2+h_{12}^2}}\int_0^t H(t-\tau,\beta_n^2)\varphi_1(\tau)d\tau+\\&+\frac{\beta_n}{\sqrt{h_{21}^2\beta_n^2+h_{22}^2}}\int_0^t H(t-\tau,\beta_n^2)\varphi_2(\tau)d\tau;\quad \varphi_j(\tau)=D^2\left(\frac{d}{d\tau}+\beta\gamma\right)\omega_{j1}(\tau)\end{aligned} \qquad (21)$$

$$a(t,z)\big|_{t=0} = a_0(z),\ \left.\frac{\partial a(t,z)}{\partial t}\right|_{t=0} = \beta\left[C_0(z) - \gamma a_0(z)\right] \equiv f_1(z) \tag{10}$$

та крайовими умовами (7).

До одержаної задачі (9), (10), (7) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур’є на сегменті $[0,l]$ [4]:

$$\Lambda_n\left[g(z)\right] = \int_0^l g(z)\upsilon(z,\beta_n)dz \equiv \tilde{g}_n\,; \tag{11}$$

$$\Lambda_n^{-1}\left[\tilde{g}_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n \frac{\upsilon(z,\beta_n)}{\left\|\upsilon(z,\beta_n)\right\|^2} \equiv g(z)\,; \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_n\left[\frac{d^2 g}{dz^2}\right] = -\beta_n^2\tilde{g}_n + h_{11}^{-1}\upsilon(0,\beta_n)\left[\left(-h_{11}\frac{d}{dz} + h_{12}\right)g(z)\right]\Bigg|_{z=0} + \\ + h_{21}^{-1}\upsilon(l,\beta_n)\left[\left(h_{21}\frac{d}{dz} + h_{22}\right)g(z)\right]\Bigg|_{z=l}.\end{aligned} \tag{13}$$

У рівностях (11)-(13) бере участь спектральна функція

$$\upsilon(z,\beta_n) = \left(h_{11}\beta_n \cos\beta_n z + h_{12}\sin\beta_n z\right)\left(h_{11}^2\beta_n^2 + h_{12}^2\right)^{-1/2}$$

та її квадрат норми

$$\left\|\upsilon(z,\beta_n)\right\|^2 = \int_0^l \left[\upsilon(z,\beta_n)\right]^2 dz = \frac{1}{2}\left[l + \frac{h_3\left(h_{11}h_{21}\beta_n^2 + h_{12}h_{22}\right)}{\left(h_{11}^2\beta_n^2 + h_{12}^2\right)\left(h_{21}^2\beta_n^2 + h_{22}^2\right)}\right],$$

де $h_3 = h_{11}h_{22} + h_{12}h_{21}$, а β_n – корені трансцендентного рівняння

$$ctg\beta l = k_1\beta - k_2\beta^{-1},\ k_1 = h_3^{-1}h_{11}h_{21},\ k_2 = h_3^{-1}h_{12}h_{22}.$$

Застосуємо до задачі (9), (10), (7) оператор Λ_n згідно правила (11). Внаслідок основної тотожності (13) маємо задачу Коші [5]: побудувати розв’язок лінійного диференціального рівняння другого порядку

$$\begin{aligned}\frac{d^2\tilde{a}_n}{dt^2} + \left[(1+\gamma)\beta + \eta^2 + \beta_n^2 D^2\right]\frac{d\tilde{a}_n}{dt} + \beta\gamma\left(\eta^2 + \beta_n^2 D^2\right)\tilde{a}_n = \\ = \beta\tilde{f}_n(t) + D^2\left(\frac{d}{dt} + \beta\gamma\right)\left[h_{11}^{-1}\upsilon(0,\beta_n)\omega_{11}(t) + h_{21}^{-1}\upsilon(l,\beta_n)\omega_{21}(t)\right] \equiv \tilde{F}_n(t)\end{aligned} \tag{14}$$

за початковими умовами

$$\tilde{a}_n(t)\big|_{t=0} = \tilde{a}_{0,n},\ \left.\frac{d\tilde{a}_n(t)}{dt}\right|_{t=0} = \tilde{f}_{1n} \equiv \beta\left[\tilde{C}_{0,n} - \gamma\tilde{a}_{0,n}\right]. \tag{15}$$

Розв’язок задачі Коші (14), (15) побудуємо методом функції Коші [5].

Означення. Функцією Коші задачі (14), (15) назвемо функцію $H(t,\beta_n^2)$ з такими властивостями:

1) функція $H(t,\beta_n^2)$ задовольняє однорідне рівняння

Застосувавши до функції $\widetilde{a}_n(t)$, визначеної формулою (21) оператор Λ_n^{-1} за правилом (12), маємо інтегральне зображення єдиного розв’язку задачі адсорбційного масопереносу (6)-(8):

$$a(t,z) = \int_0^l E(t,z,\zeta)\beta C_0(\zeta)d\zeta + \int_0^l E(t,z,\zeta)\left(\beta+\eta^2\right)a_0(\zeta)d\zeta +$$

$$+\left(-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\int_0^l E(t,z,\zeta)D^2 a_0(\zeta)d\zeta + \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l E(t,z,\zeta)a_0(\zeta)d\zeta + \tag{22}$$

$$+\int_0^t\int_0^l E(t-\tau,z,\zeta)\beta f(\tau,\zeta)d\zeta d\tau + \int_0^t \left[W_1(t-\tau,z)\varphi_1(\tau) + W_2(t-\tau,z)\varphi_2(\tau)\right]d\tau;$$

$$C(t,z) = \left(\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial t} + \gamma\right)a(t,z) \tag{23}$$

У формулі (22) бере участь функція Коші задачі (6)-(8)

$$E(t,z,\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} H(t,\beta_n^2)\frac{\upsilon(z,\beta_n)\upsilon(\zeta,\beta_n)}{\left\|\upsilon(z,\beta_n)\right\|^2} \tag{24}$$

та функції Гріна

$$W_j(t,z) = \sum_{n=1}^{\infty} H(t,\beta_n^2)\frac{\beta_n\upsilon(z,\beta_n)}{\left\|\upsilon(z,\beta_n)\right\|^2\sqrt{h_{j1}^2\beta_n^2 + h_{j2}^2}}, \; j = 1,2 \tag{25}$$

Зауважимо, що при $t > 0$ головні розв’язки задачі $E(t,z,\zeta)$ та $W_j(t,z)$ мають похідні будь-якого порядку.

За самим змістом головних розв’язків маємо [6]:

$$E(t,z,\zeta)\big|_{t=0} = 0, \; \frac{\partial E}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \delta(z-\zeta), \; W_j\big|_{t=0} = 0,$$

$$\left(-h_{11}\frac{\partial}{\partial z} + h_{12}\right)W_1\bigg|_{z=0} = \delta(t-\tau), \; \left(h_{21}\frac{\partial}{\partial z} + h_{22}\right)W_2\bigg|_{z=l} = \delta(t-\tau).$$

Тут $\delta(s-\xi)$ – дельта-функція, зосереджена в точці $s = \xi$ [6].

Якщо $a_0(l) = 0$, $a_0'(l) = 0$, $a_0(0) = 0$, $a_0'(0) = 0$ та $a_0''(z)$ обмежена й неперервна, то

$$-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\int_0^l E(t,z,\zeta)D^2 a_0(\zeta)d\zeta = -D^2\int_0^l E(t,z,\zeta)a_0''(\zeta)d\zeta.$$

В протилежному випадку з’являється вираз

$$R = \int_0^l \left\{\sum_{n=1}^{\infty} D^2 H(t,\beta_n^2)\frac{\upsilon(z,\beta_n)}{\left\|\upsilon(z,\beta_n)\right\|^2}\left(\upsilon(\zeta,\beta_n)a_0'(\zeta) - a_0(\zeta)\frac{d\upsilon}{d\zeta}\right)\bigg|_0^l\right\}d\zeta.$$

За відомою функцією $a_0(z)$ вираз R стає відомим.

4. Функція переносу кусково-стала

Функція $g(z)=\Theta(z)\Theta(l_1-z)g_1+\Theta(z-l_1)\Theta(l-z)g_2$, де g_j – додатні сталі величини , $\Theta(x)$ – одинична функція Гевісайда [6].

Природно покласти $C(t,z)=u_1(t,z)$ для $z\in(0,l_1)$ та $C(t,z)\equiv u_2(t,z)$ для $z\in(l_1,l_2)$; $a(t,z)=\upsilon_1(t,z)$ для $z\in(0,l_1)$ та $a(t,z)=\upsilon_2(t,z)$ для $z\in(l_1,l_2)$, де $l_2\equiv l$, $D^2g_j\equiv d_j^2$.

Система (1) в цьому випадку переходить в сепаратну систему двох диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}+\frac{\partial \upsilon_j}{\partial t}+\eta^2u_j-d_j^2\frac{\partial^2u_j}{\partial z^2}=f_j(t,z);\ \frac{\partial\upsilon_j}{\partial t}=\beta\left(u_j-\gamma\upsilon_j\right),\ j=1,2. \quad (26)$$

При цьому мають місце початкові умови

$$u_j(t,z)\big|_{t=0}=\varphi_j(t),\ \upsilon_j(t,z)\big|_{t=0}=\psi_j(t,z), \quad (27)$$

крайові умови

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^0\right)\upsilon_1(t,z)\Big|_{z=0}=\omega_1(t),\ \left(\alpha_{22}^2\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{22}^2\right)\upsilon_2(t,z)\Big|_{z=l}=\omega_2(t) \quad (28)$$

та умови спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j1}^1\right)\upsilon_1(t,z)-\left(\alpha_{j2}^1\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j2}^1\right)\upsilon_2(t,z)\right]\Bigg|_{z=l_1}=\omega_{j1}(t),\ \ j=1,2 \quad (29)$$

Виключивши із системи (26) $u_j(t,z)$, одержимо для вектор-функції $\upsilon(t,z)=\{\upsilon_1(t,z);\upsilon_2(t,z)\}$ систему диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2\upsilon_j}{\partial t^2}+\left[(1+\gamma)\beta+\eta^2\right]\frac{\partial\upsilon_j}{\partial t}+\beta\gamma\eta^2\upsilon_j-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\beta\gamma\right)d_j^2\frac{\partial^2\upsilon_j}{\partial z^2}=\beta f_j(t,z),\ j=1,2 \quad (30)$$

При цьому початкові умови набудуть вигляду:

$$\upsilon_j(t,z)\big|_{t=0}=\psi_j(z),\ \frac{\partial\upsilon_j}{\partial t}\Big|_{t=0}=\beta\left(\varphi_j(z)-\gamma\psi_j(z)\right)\equiv g_j(z). \quad (31)$$

Задачу на спряження (28)-(31) розв’яжемо методом скінченного інтегрального перетворення Фур’є на двоскладовому інтервалі з одною точкою спряження [7]:

$$\Lambda_{1,n}\left[f(z)\right]=\int_0^l f(z)V^*(z,\beta_n)\sigma(z)dz\equiv\tilde f_n; \quad (32)$$

$$\Lambda_{1,n}^{-1}\left[\tilde f_n\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde f_nV^*(z,\beta_n)\equiv f(z);\ V^*=\frac{V(z,\beta_n)}{\|V(z,\beta_n)\|} \quad (33)$$

У рівностях (32), (33) беруть участь вагова функція

$$\sigma(z)=\sigma_1\Theta(z)\Theta(l_1-z)+\sigma_2\Theta(z-l_1)\Theta(l_2-z),\ \sigma_1=c_{11}:c_{21}d_1^2,\ ,\sigma_2=d_2^{-2},$$

$$c_{11}=\alpha_{21}^1\beta_{11}^1-\alpha_{11}^1\beta_{21}^1,\ c_{21}=\alpha_{22}^1\beta_{12}^1-\alpha_{12}^1\beta_{22}^1,\ c_{11}c_{21}>0,$$

спектральна функція

$$V(z,\beta_n)=\Theta(z)\Theta(l_1-z)V_1(z,\beta_n)+\Theta(z-l_1)\Theta(l_2-z)V_2(z,\beta_n)$$

з квадратом норми

$$\|V(z,\beta_n)\|^2=\int_0^{l_1}[V_1(z,\beta_n)]^2\sigma_1 dz+\int_{l_1}^{l_2}[V_2(z,\beta_n)]^2\sigma_2 dz$$

та функції

$$V_1(z,\beta_n)=c_{21}b_{2n}\left[\alpha_{11}^0 b_{1n}\cos b_{1n}z-\beta_{11}^0\sin b_{1n}z\right],\ b_{jn}=d_j^{-1}\beta_n,$$

$$V_2(z,\beta_n)=\left[\beta_{11}^0\upsilon_{21}^{12}(b_{1n}l_1)-\alpha_{11}^0 b_{1n}\upsilon_{21}^{11}(b_{1n}l_1)\right]\varphi_{12}^1(b_{2n}l_1,b_{2n}z)-$$

$$-\left[\beta_{11}^0\upsilon_{11}^{12}(b_{1n}l_1)\upsilon_{11}^{12}(b_{1n}l_1)-\alpha_{11}^0 b_{1n}\upsilon_{11}^{11}(b_{1n}l_1)\right]\varphi_{22}^1(b_{2n}l_1,b_{2n}z),$$

$$\varphi_{j2}^1(b_{2n}l_1,b_{2n}z)=\upsilon_{j2}^{12}(b_{2n}l_1)\cos b_{2n}z-\upsilon_{j2}^{11}(b_{2n}l_1)\sin b_{2n}z.$$

Тут прийняті позначення:

$$\upsilon_{jk}^{m1}(b_s l_m)=\left(\alpha_{jk}^m \,{}^{d}\!/_{dz}+\beta_{jk}^m\right)\cos(b_s z)\Big|_{z=l_m},$$

$$\upsilon_{jk}^{m2}(b_s l_m)=\left(\alpha_{jk}^m \,{}^{d}\!/_{dz}+\beta_{jk}^m\right)\sin(b_s z)\Big|_{z=l_m}.$$

Власні числа β_n є коренями трансцендентного рівняння

$$\delta_1(\beta)\equiv\delta_{21}(b_1l_0,b_1l_1)\delta_{12}(b_2l_1,b_2l_2)-\delta_{11}(b_1l_0,b_1l_1)\delta_{22}(b_2l_1,b_2l_2)=0.$$

Тут прийняті позначення:

$$\delta_{j1}(b_1l_0,b_1l_1)=\upsilon_{11}^{01}(b_1l_0)\upsilon_{j1}^{12}(b_1l_1)-\upsilon_{11}^{02}(b_1l_0)\upsilon_{j1}^{11}(b_1l_1),$$

$$\delta_{j2}(b_2l_1,b_2l_2)=\upsilon_{j2}^{11}(b_2l_1)\upsilon_{22}^{22}(b_2l_2)-\upsilon_{j2}^{12}(b_2l_1)\upsilon_{22}^{21}(b_2l_2),$$

$$l_0=0,\ l_2=l,\ b_j=d_j^{-1}\beta,\ j=1,2.$$

В основі застосувань запровадженого формулами (32), (33) інтегрального перетворення лежить основна тотожність інтегрального перетворення диференціального оператора Фур’є

$$F=\Theta(z)\Theta(l_1-z)d_1^2\frac{d^2}{dz^2}+\Theta(z-l_1)\Theta(l_2-z)d_2^2\frac{d^2}{dz^2}.$$

Якщо вектор-функція $g(z)=\{f_1''(z);f_2''(z)\}$ неперервна на множині $I_{11}=\{z:z\in(0,l_1)\cup(l_1,l_2);\,l_2\equiv l<\infty\}$, а функції $f_j(z)$ задовольняють крайові умови

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{d}{dz}+\beta_{11}^0\right)f_1(z)\Big|_{z=0}=\omega_1,\ \left(\alpha_{22}^2\frac{d}{dz}+\beta_{22}^2\right)f_2(z)\Big|_{z=l_2}=\omega_2$$

та умови спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1\frac{d}{dz}+\beta_{j1}^1\right)f_1(z)-\left(\alpha_{j2}^1\frac{d}{dz}+\beta_{j2}^1\right)f_2(z)\right]\Big|_{z=l_1}=\omega_{j1},\ j=1,2,$$

то справджується основна тотожність інтегрального перетворення диференціального оператора Фур'є F :

$$\Lambda_{1,n}\left[F[f(z)]\right] = -\beta_n^2 \tilde{f}_n + a_1^2\sigma_1\left(-\alpha_{11}^0\right)^{-1} V_1^*(l_0,\beta_n)\omega_1 + \\ + a_2^2\sigma_2\left(\alpha_{22}^2\right)^{-1} V_2^*(l_2,\beta_n)\omega_2 + c_{21}^{-1}\left[Z_{12}^1(\beta_n)\omega_{21} - Z_{22}^1(\beta_n)\omega_{11}\right] \quad (34)$$

Запишемо систему (30) в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left[\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + \left[(1+\gamma)\beta + \eta^2\right]\dfrac{\partial}{\partial t} + \beta\gamma\eta^2 - \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \beta\gamma\right) d_1^2 \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\upsilon_1 \\ \left[\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + \left[(1+\gamma)\beta + \eta^2\right]\dfrac{\partial}{\partial t} + \beta\gamma\eta^2 - \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \beta\gamma\right) d_2^2 \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\upsilon_2 \end{bmatrix} = \beta\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}. \quad (35)$$

Інтегральний оператор $\Lambda_{1,n}$ згідно правила (32) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$\Lambda_{1,n}[\ldots] = \begin{bmatrix} \int\limits_0^{l_1} \ldots V_1^*(z,\beta_n)\sigma_1 dz & \int\limits_{l_1}^{l_2} \ldots V_2^*(z,\beta_n)\sigma_2 dz \end{bmatrix} \quad (36)$$

Застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю-рядок (36) до системи (35). Внаслідок тотожності (34) маємо звичайне диференціальне рівняння

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \left[(1+\gamma)\beta + \eta^2\right]\frac{d}{dt} + \beta\gamma\eta^2 + \left(\frac{d}{dt} + \beta\gamma\right)\beta_n^2\right]\tilde{\upsilon}_n = \beta\tilde{f}_n + \\ + a_1^2\sigma_1(-\alpha_{11}^0)^{-1}V_1^*(l_0,\beta_n)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta\gamma\right)\omega_1(t) + a_2^2\sigma_2(\alpha_{22}^2)^{-1}V_2^*(l_2,\beta_n)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta\gamma\right)\omega_2(t) + \\ + c_{21}^{-1}\left[Z_{12}^1(\beta_n)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta\gamma\right)\omega_{21}(t) - Z_{22}^1(\beta_n)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta\gamma\right)\omega_{11}(t)\right] \equiv \tilde{F}_n(t) \quad (37)$$

і початкові умови

$$\tilde{\upsilon}_n(t)\big|_{t=0} = \tilde{\psi}_n, \; \frac{d\tilde{\upsilon}_n}{dt}\bigg|_{t=0} = \tilde{g}_n. \quad (38)$$

Одержана задача Коші ідентична задачі (14), (15). Згідно формули (21) маємо

$$\tilde{\upsilon}_n(t) = H(t,\beta_n^2)\left[\tilde{g}_n + q_1(\beta_n^2)\tilde{\psi}_n\right] + \frac{dH(t,\beta_n^2)}{dt}\tilde{\psi}_n + \int\limits_0^t H(t-\tau,\beta_n^2)\tilde{F}(\tau)d\tau \quad (39)$$

Інтегральний оператор $\Lambda_{1,n}^{-1}$ згідно правила (33) як обернений до (36) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$\Lambda_{1,n}^{-1}[\ldots] = \begin{bmatrix} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ldots V_1^*(z,\beta_n) \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ldots V_2^*(z,\beta_n) \end{bmatrix} \quad (40)$$

Застосувавши операторну матрицю-стовпець (40) за правилом множення матриць до матриці-елементу $\left[\widetilde{\upsilon}_n\right]$, де функція $\widetilde{\upsilon}_n(t)$ визначена формулою (39), одержуємо єдиний розв’язок задачі (28)-(31):

$$\begin{aligned}
\upsilon_j(t,z) &= \sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{\upsilon}_n(t)V_j^*(z,\beta_n) = \int_0^{l_1} E_{j1}(t,z,\zeta)\beta\varphi_1(\zeta)\sigma_1 d\zeta + \\
&+ \int_{l_1}^{l_2} E_{j2}(t,z,\zeta)\beta\varphi_2(\zeta)\sigma_2 d\zeta + \left(\beta+\eta^2-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\times \\
&\times\left[\int_0^{l_1} E_{j1}(t,z,\zeta)\psi_1(\zeta)\sigma_1 d\zeta + \int_{l_1}^{l_2} E_{j2}(t,z,\zeta)\psi_2(\zeta)\sigma_2 d\zeta\right] + \\
&+ \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^{l_1} E_{j1}(t,z,\zeta)\psi_1(\zeta)\sigma_1 d\zeta + \int_{l_1}^{l} E_{j2}(t,z,\zeta)\psi_2(\zeta)\sigma_2 d\zeta\right] + \\
&+ \int_0^t\int_0^{l_1} E_{j1}(t-\tau,z,\zeta)\beta f_1(\tau,\zeta)\sigma_1 d\zeta d\tau + \int_0^t\int_{l_1}^{l} E_{j2}(t-\tau,z,\zeta)\beta f_2(\tau,\zeta)\sigma_2 d\zeta d\tau + \\
&+ \int_0^t W_{1j}(t-\tau,z)\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\beta\gamma\right)\omega_1(\tau)d\tau + \int_0^t W_{2j}(t-\tau,z)\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\beta\gamma\right)\omega_2(\tau)d\tau + \\
&+ \int_0^t\left[R_{12}^{1,j}(t-\tau,z)\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\beta\gamma\right)\omega_{21}(\tau) - R_{22}^{1,j}(t-\tau,z)\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\beta\gamma\right)\omega_{11}(\tau)\right]d\tau.
\end{aligned} \tag{42}$$

У формулі (42) беруть участь головні розв’язки даної задачі:

1) породжені неоднорідністю системи функції впливу

$$E_{jk}(t,z,\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} H\left(t,\beta_n^2\right)V_j^*(z,\beta_n)V_k^*(\zeta,\beta_n),\ j,k=1,2 \tag{43}$$

2) породжені крайовими умовами функції Гріна

$$W_{1j}(t,z) = \sum_{n=1}^{\infty} H\left(t,\beta_n^2\right)a_1^2\sigma_1\left(-\alpha_{11}^0\right)^{-1}V_1^*(l_0,\beta_n)V_j^*(z,\beta_n),\ j=1,2 \tag{44}$$

$$W_{2j}(t,z) = \sum_{n=1}^{\infty} H\left(t,\beta_n^2\right)a_2^2\sigma_2\left(\alpha_{22}^2\right)^{-1}V_2^*(l_2,\beta_n)V_j^*(z,\beta_n),\ j=1,2 \tag{45}$$

3) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R_{12}^{1,j}(t,z) = \sum_{n=1}^{\infty} H\left(t,\beta_n^2\right)c_{21}^{-1}Z_{i2}^1(\beta_n)V_j^*(z,\beta_n),\ i,j=1,2 \tag{46}$$

Нагадаємо, що

$$u_j(t,z) = \frac{1}{\beta}\frac{\partial\upsilon_j}{\partial t} + \gamma\upsilon_j(t,z),\ j=1,2 \tag{47}$$

5. Висновки

Формули (42) та (47) дають інтегральне зображення точного аналітичного розв’язку поставленої в цьому випадку задачі адсорбційного масопереносу. Вони зручні як для аналітичного дослідження, так і для інженерних розрахунків. Зауважимо, що без залучення нових ідей можна побудувати розв’язок задачі адсорбційного масопереносу для випадку $g(z)=\sum_{i=1}^{m}\Theta(l_i - z)\Theta(z - l_{i-1})g_i$, $g_i = const$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ленюк М.П., Петрик М.Р. Інтегральні перетворення Фур’є, Бесселя із спектральним параметром в задачах математичного моделювання масопереносу в неоднорідних середовищах. – Київ: Наук. думка, 2000. – 371с.
2. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К.: Наук. думка, 1991. – 432 с.
3. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – К.: Наук. думка, 1998. – 614 с.
4. Ленюк М.П. Интегральные преобразования с разделенными переменными (Фурье, Ханкеля). – Киев, 1983. – 60 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.4).
5. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
6. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
7. Комаров Г.М., Ленюк М.П., Мороз В.В. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку. – Чернівці: Прут, 2001. – 228 с.