Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 519.65
№ 833, 2008, с.110-120

Об одном способе представления кусочных полиномов в системах символьной математики

П. Г. Доля

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

The paper presents analytical formulas for producing equations of continuous piecewise polynomial functions and curves. In the equations monomials containing the absolute value function correspond to the nodes. Uniqueness of such representation is proved. The equations of a broken-line and interpolating cubic spline are constructed. The general equation of a Bernstein-Bezier curve composed of various sections with the given Bezier polygons is constructed.

1. Введение

Кусочные полиномы широко используются в приложениях и являются важной частью компьютерных систем символьной математики. Они конструируются из сегментов обычных полиномов и определяются различными выражениями на различных участках. В такой форме они обычно хранятся и в памяти компьютера. В работе [1] показано, что для сплайн-функций существует представление, использующее функцию абсолютного значения. Например, кубический сплайн, проходящий через точки (0,2), (1,0), (2,4), (3,0), в Maple представляется в виде специальной *piecewise* функции, но его уравнение можно записать и в виде $y=-2-x+x^2+x^3-4\,|x-1|^3+|x-2|^3$. В настоящей работе излагается общий способ приведения уравнения кусочно заданного полинома к виду, содержащему функцию абсолютного значения. Этот способ сформулирован в виде теоремы 1. Для непрерывной кусочно-линейной функции, теорема дает уравнение $y=A\,x+B+\sum_{k=1}^{n-1} a_k\,|x-x_k\,|$, где A, B, a_k некоторые константы. Оно было известно еще С. Н. Бернштейну, который в 1905г. в работе [2] привел его аналог для случая равномерного распределения узлов.

Для систем символьной математики важным является построение параметрических уравнений кусочно полиномиальных кривых. Применение теоремы 1 для этого случая приводит к векторному представлению кусочно полиномиальных кривых (Теорема 2). Также рассмотрен важный частный случай – построено общее уравнение составной кривой Бернштейна–Безье, когда вершины многоугольников Безье всех сегментов заданы.

2. Кусочно-полиномиальные функции

Пусть дано разбиение вещественной оси $\Delta=\{x_k\}_{k=1}^{n-1}$, $x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}$ и последовательность $\{p_k(x)\}_{k=1}^{n}$ вещественных полиномов $p_k(x)=\sum_{j=0}^{l_k} a_{kj}x^j$. Функция $P_\Delta(x)$ называется кусочным полиномом, если она может быть задана в виде

$$P_\Delta(x) = \begin{cases} p_1(x) & , x \le x_1 \\ p_2(x) & , x_1 < x \le x_2 \\ & \cdots \\ p_{n-1}(x) & , x_{n-2} < x \le x_{n-1} \\ p_n(x) & , x > x_{n-1} \end{cases} \tag{1}$$

Если выполняется условие $p_k(x_k) = p_{k+1}(x_k)$ $(k = 1,\ldots,n-1)$, то $P_\Delta(x)$ будет непрерывной кусочно-полиномиальной функцией. Для определенности в (1) мы положили, что все участки являются полуоткрытыми интервалами $x_{k-1} < x \le x_k$, но это непринципиально. Имеет место

Лемма 1. *Для кусочного полинома $P_\Delta(x)$ в точках непрерывности выполняется равенство*

$$P_\Delta(x) = \frac{1}{2}\left(p_1(x) + p_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} sign(x - x_k)\big(p_{k+1}(x) - p_k(x)\big)\right). \tag{2}$$

Доказательство. Обозначим правую часть формулы (2) через $F_\Delta(x)$.

Пусть $x < x_1$. Тогда $sign(x - x_k) = -1$ для всех $k = 1,\ldots,n-1$, и мы имеем

$$F_\Delta(x) = \frac{1}{2}\left(p_1(x) + p_n(x) - \sum_{k=1}^{n-1}\big(p_{k+1}(x) - p_k(x)\big)\right) = p_1(x).$$

Пусть $x_{q-1} < x < x_q$ $(q = 2,\ldots,n-1)$. Тогда $sign(x - x_k) = 1$ для $k = 1,\ldots,q-1$ и $sign(x - x_k) = -1$ для $k = q,\ldots,n-1$. Поэтому

$$F_\Delta(x) = \frac{1}{2}\left(p_1(x) + p_n(x) + \sum_{k=1}^{q-1}\big(p_{k+1}(x) - p_k(x)\big) - \sum_{k=q}^{n-1}\big(p_{k+1}(x) - p_k(x)\big)\right) = p_q(x).$$

Аналогично, для $x > x_{n-1}$ имеем

$$F_\Delta(x) = \frac{1}{2}\left(p_1(x) + p_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1}\big(p_{k+1}(x) - p_k(x)\big)\right) = p_n(x).$$

Пусть x теперь совпадает с одной из точек разбиения Δ, например, $x = x_q$ $(q = 1,\ldots,n-1)$. Тогда $sign(x_q - x_k) = 1$ для $k = 1,\ldots,q-1$ и $sign(x_q - x_k) = -1$ для $k = q+1,\ldots,n-1$. Слагаемое с $k = q$ обращается в ноль. Поэтому

$$F_\Delta(x_q) = \frac{1}{2}\left(p_1(x_q) + p_n(x_q) + \sum_{k=1}^{q-1}\big(p_{k+1}(x_q) - p_k(x_q)\big) - \sum_{k=q+1}^{n-1}\big(p_{k+1}(x_q) - p_k(x_q)\big)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\big(p_q(x_q) + p_{q+1}(x_q)\big)$$

Если в точке x_q кусочный полином $P_\Delta(x)$ непрерывен, т.е. $p_q(x_q) = p_{q+1}(x_q)$, то $F_\Delta(x_q) = p_q(x_q) = P_\Delta(x_q)$. Т.о. во всех точках непрерывности кусочного полинома (1) правая часть $F_\Delta(x)$ выражения (2) совпадает с $P_\Delta(x)$. Лемма доказана.

Замечание. Утверждение леммы справедливо для любой кусочно-непрерывной функции, если ее сегменты на участках $x_{k-1} < x \le x_k$ задаются выражениями $f_k(x)$, которые представляют однозначные непрерывные функции при всех значениях аргумента, а не только при $x_{k-1} < x \le x_k$.

Для непрерывного кусочного полинома равенство (2) выполняется для всех *x*. Более того, имеет место

Теорема 1. *Существует единственное представление непрерывного кусочного полинома* $P_\Delta(x)$ *такое, что*

$$P_\Delta(x) = P(x) + \sum_{k=1}^{n-1} P_k(x)|x - x_k|, \tag{3}$$

где $P(x)$ *и* $P_k(x)$ *некоторые полиномы. Для* $P(x)$ *имеет место представление*

$$P(x) = \frac{1}{2}\big(p_1(x) + p_n(x)\big). \tag{4}$$

Если в точках $x = x_k$ $(k = 1, \dots, n-1)$ *выполняется гладкая стыковка сегментов до порядка* m_k $\big(0 \le m_k < h_k = \max\{l_k, l_{k+1}\}\big)$, *т.е. имеют место равенства* $p_k^{(q)}(x_k) = p_{k+1}^{(q)}(x_k)$ $\big(q = 0, 1, \dots, m_k\big)$, *то*

$$P_k(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{q=m_k+1}^{h_k} \frac{p_{k+1}^{(q)}(x_k) - p_k^{(q)}(x_k)}{q!}(x - x_k)^{q-m_k-1}\right)(x - x_k)^{m_k}. \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с леммой 1 непрерывный кусочный полином $P_\Delta(x)$ можно представить в виде (2). Но имеет место равенство

$$p_{k+1}(x) - p_k(x) = \sum_{q=1}^{h_k} d_{kq}(x - x_k)^q = (x - x_k)\sum_{q=1}^{h_k} d_{kq}(x - x_k)^{q-1},$$

где $h_k = \max\{l_k, l_{k+1}\}$, l_k - степень полинома $p_k(x)$, $d_{kq} = \dfrac{p_{k+1}^{(q)}(x_k) - p_k^{(q)}(x_k)}{q!}$ и $d_{k0} = 0$ в силу условия непрерывности $p_k(x_k) = p_{k+1}(x_k)$. Из (2) получаем

$$P_\Delta(x) = \frac{1}{2}\left(p_1(x) + p_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} sign(x - x_k)(x - x_k)\sum_{q=1}^{h_k} d_{kq}(x - x_k)^{q-1}\right) =$$

$$= P(x) + \sum_{k=1}^{n-1} P_k(x)|x - x_k|,$$

где

$$P(x) = \frac{1}{2}\big(p_1(x) + p_n(x)\big)$$

некоторый полином, и

$$P_k(x) = \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{h_k} d_{kq}(x - x_k)^{q-1} = \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{h_k} \frac{p_{k+1}^{(q)}(x_k) - p_k^{(q)}(x_k)}{q!}(x - x_k)^{q-1}$$

полиномы степени не выше, чем $h_k - 1$. Если в точках x_k имеет место гладкая стыковка до порядка m_k, т.е. $p_k^{(q)}(x_k) = p_{k+1}^{(q)}(x_k)$ $\big(q = 0, 1, \dots, m_k\big)$, то в последней формуле суммирование будет начинаться с номера $q = m_k + 1$ и все слагаемые будут содержать общий множитель $(x - x_k)^{m_k}$. В результате мы приходим к (5).

Покажем, что если $P(x)$ и $P_k(x)$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ являются полиномами, то представление (3) единственно.

Предположим, что в (3) есть слагаемое вида $P_s(x)|x - x_s|$, где $P_s(x)$ полином и точка x_s не входит в разбиение Δ. Кусочный полином $P_\Delta(x)$, стоящий в левой части (3), в некоторой окрестности $I_\varepsilon = (x_s - \varepsilon, x_s + \varepsilon)$ точки $x_s \notin \Delta$ является обычным полиномом (точка x_s и ее окрестность I_ε целиком принадлежит некоторому интервалу (x_{k-1}, x_k)). В окрестности I_ε модули всех слагаемых $P_k(x)|x - x_k|$, $x_k \in \Delta, x_k \neq x_s$, в правой части (3) можно раскрыть и они становятся обычными полиномами. Но тогда в окрестности I_ε полиномом должно быть слагаемое $P_s(x)|x - x_s|$ и поэтому в точке x_s оно должно иметь непрерывные производные любого порядка q. Это возможно только, когда $P_s(x)$ имеет в точке x_s ноль порядка q или выше. Отсюда следует, что полином $P_s(x)$ равен нулю. Т.о. суммирование в (3) выполняется только по точкам x_k, входящими в разбиение $\Delta = \{x_k\}_{k=1}^{n-1}$.

Допустим теперь, что существует два разных представления кусочного полинома $P_\Delta(x)$

$$P_\Delta(x) = P^r(x) + \sum_{k=1}^{n-1} P_k^r(x)|x - x_k| \quad (r=1,2),$$

где $P^r(x)$ и $P_k^r(x)$ некоторые полиномы, и суммирование выполняется по точкам x_k, входящим в разбиение Δ. Вычитая одно представление из другого, получаем

$$0 = P^2(x) - P^1(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(P_k^2(x) - P_k^1(x)\right)|x - x_k|. \tag{6}$$

Рассматривая (6) на участке $x > x_{n-1}$, можно раскрыть все модули и получить равенство

$$0 = P^2(x) - P^1(x) + \sum_{k=1}^{n-2} \left(P_k^2(x) - P_k^1(x)\right)(x - x_k) + \left(P_{n-1}^2(x) - P_{n-1}^1(x)\right)(x - x_{n-1}).$$

Здесь правая часть является некоторым полиномом, который равен нулю для всех $x > x_{n-1}$. Но тогда, он равен нулю тождественно. Рассматривая (6) на участке $x_{n-2} < x \le x_{n-1}$, и раскрывая модули, получаем

$$0 = P^2(x) - P^1(x) + \sum_{k=1}^{n-2} \left(P_k^2(x) - P_k^1(x)\right)(x - x_k) - \left(P_{n-1}^2(x) - P_{n-1}^1(x)\right)(x - x_{n-1}).$$

Это равенство также является тождеством. Из двух последних тождеств следует $P_{n-1}^2(x) \equiv P_{n-1}^1(x)$. Т.о. в (6) суммирование выполняется до номера $n-2$. Рассматривая (6) на участках $x_{n-2} < x \le x_{n-1}$ и $x_{n-3} < x \le x_{n-2}$, аналогично предыдущему, получаем $P_{n-2}^2(x) \equiv P_{n-2}^1(x)$ и т.д. В результате мы получаем, что выражение (6) не содержит ни одного слагаемого с функцией абсолютного значения. Но тогда $P^2(x) - P^1(x) = 0$ для всех x и, следовательно, $P_\Delta^2(x) \equiv P_\Delta^1(x)$. Теорема доказана.

Пусть дано разбиение вещественной оси $\Delta = \{x_k\}_{k=0}^n$, $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n$. Сплайном $S_\Delta^{N,m}(x)$ обычно называют кусочный полином (1) все сегменты $p_k(x)$ которого являются полиномами одинаковой степени $l_k = N$ и для всех точек $\{x_k\}_{k=1}^{n-1}$ стыковки звеньев порядок гладкости одинаков $m_k = m$ $(0 \le m < N)$. Для однозначного определения сплайнов требуются граничные условия, которые обычно задаются в крайних точках x_0, x_n. Они не являются точками соединения звеньев, поэтому полиномы $p_1(x)$ и $p_n(x)$ можно рассматривать на участках $-\infty < x \le x_1$ и $x_{n-1} < x < \infty$. Из теоремы 1 получаем

Следствие 1. *Полиномиальный сплайн $S_\Delta^{N,m}(x)$ степени N гладкости m $(0 \le m < N)$, заданный на сетке $\Delta = \{x_k\}_{k=0}^n$ $(x_0 < x_1 < \ldots < x_n)$, может быть представлен в виде*

$$S_\Delta^{N,m}(x) = P^N(x) + \sum_{k=1}^{n-1} P_k^{N-m-1}(x)(x - x_k)^m \left| x - x_k \right|, \tag{7}$$

где $P^N(x)$ полином степени не выше чем N и $P_k^{N-m-1}(x)$ некоторые полиномы степени $N - m - 1$.

В частности для сплайна $S_\Delta^N(x) \equiv S_\Delta^{N,N-1}(x)$ степени N гладкости $m = N - 1$ имеем $P_k^0(x) = Const$. Формула (5) дает

$$P_k(x) = \frac{1}{2}\frac{p_{k+1}^{(N)}(x_k) - p_k^{(N)}(x_k)}{N!}(x - x_k)^{N-1} = \frac{a_{k+1\,N} - a_{k\,N}}{2}(x - x_k)^{N-1}.$$

Отсюда, $P_k^0(x) = \left(a_{k+1\,N} - a_{k\,N}\right)/2$. Подставляя в (7), получаем

Следствие 2. *Представление сплайна $S_\Delta^N(x)$ степени N гладкости $m = N - 1$ имеет вид*

$$S_\Delta^N(x) = P^N(x) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1\,N} - a_{k\,N})(x - x_k)^{N-1} \left| x - x_k \right|, \tag{8}$$

где $a_{k\,N}$ коэффициенты при старших степенях полиномов $p_k(x) = \sum_{j=0}^N a_{kj} x^j$.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Уравнение кусочно-линейной функции. Дан набор точек $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^n$, $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. При этом точки $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ определяют для всех $x < x_1$ левый луч ломаной, а отрезок, соединяющий точки $(x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)$, определяет для $x > x_{n-1}$ правый луч ломаной. Требуется построить уравнение кусочно-линейной функции, проходящей через заданные точки.

Формулы (4) и (8) при *N=1* дают

$$S_\Delta^1(x) = \frac{1}{2}\big(p_1(x) + p_n(x)\big) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+11} - a_{k1})|\, x - x_k\,| \,.$$

Уравнение прямой, походящей через два соседних узла (x_{k-1}, y_{k-1}) и (x_k, y_k), имеет вид $p_k(x) = y_{k-1} + \dfrac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\big(x - x_{k-1}\big)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда

$$S_\Delta^1(x) = \frac{1}{2}\left(y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\big(x - x_0\big) + y_{n-1} + \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}\big(x - x_{n-1}\big)\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} - \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \right) |\, x - x_k\,| \,. \tag{9}$$

Подобная формула была известна еще С.Н.Бернштейну. В работе [2] для непрерывной функции, заданной на отрезке [0,1], он приводит уравнение интерполяционной ломаной, когда узлы интерполяции равномерно распределены по отрезку.

Интерполяционный кубический сплайн это кусочный кубический полином, который проходит через точки $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^{n}$ и во всех внутренних узлах $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{n-1}$ имеет непрерывную первую и вторую производные. Точки x_0 и x_n не являются точками стыка кубических сегментов и используются для задания граничных условий. Для такого кубического сплайна формула (7) принимает вид

$$S_\Delta^3(x) = P^3(x) + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \,|\, x - x_k\,|^3 \,, \tag{10}$$

где $c_k = P_k^0 = Const$. Продифференцируем это выражение 2 раза по x

$$L(x) = \frac{d^2}{dx^2} S_\Delta^3(x) = \frac{d^2}{dx^2} P^3(x) + 6\sum_{k=1}^{n-1} c_k \,|\, x - x_k\,| \,.$$

Напомним, что $|\, x - a\,|^3 \in C^2$ и $(|x-a|^3)'' = 6\,|x - a|$. Поскольку кубический сплайн $S_\Delta^3(x)$ имеет непрерывные вторые производные во всех точках, то функция *L(x)* является непрерывной кусочно-линейной и ее значения в точках x_k совпадают со значениями s_k вторых производных сплайна $S_\Delta^3(x)$ в этих точках. Предположим, что эти значения s_k известны. Уравнение ломаной, проходящей через узлы (x_k, s_k), определяется формулой (9)

$$L(x) = L_1(x) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{s_{k+1} - s_k}{x_{k+1} - x_k} - \frac{s_k - s_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \right) |\, x - x_k\,| \,,$$

где $L_1(x)$ линейная функция. В силу теоремы 1 такое представление ломаной единственно. Сравнивая два выражения для *L(x)*, получаем

$$c_k = \frac{1}{12}\left(\frac{s_{k+1} - s_k}{x_{k+1} - x_k} - \frac{s_k - s_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \right).$$

Многочлен $P^3(x)$, стоящий в (10), может быть вычислен по формуле (4). В результате для интерполяционного кубического сплайна получаем

$$S_{\Delta}^3(x) = \frac{1}{2}\left(p_1(x) + p_n(x)\right) + \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{s_{k+1} - s_k}{x_{k+1} - x_k} - \frac{s_k - s_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\right)\left| x - x_k \right|^3 . \qquad (11)$$

Граничные значения в точках x_0, x_n и значения вторых производных s_1, s_{n-1} в точках x_1, x_{n-1} позволяют определить кубические полиномы $p_1(x)$ и $p_n(x)$. В результате для построения уравнения интерполяционного кубического сплайна мы приходим к задаче определения его вторых производных s_k во всех внутренних узлах $\{x_k\}_{k=1}^{n-1}$. Это можно сделать известным способом [3] путем построения системы уравнений относительно s_k.

3. Кусочно-полиномиальные кривые

Пусть непрерывная кривая γ составлена из последовательности криволинейных отрезков γ_k $(k = 1,2,\ldots,n)$, которые определяются полиномиальными вектор – функциями

$$\mathbf{p}_k(\tau) = x_k(\tau)\mathbf{i} + y_k(\tau)\mathbf{j} + z_k(\tau)\mathbf{k} = \sum\nolimits_{j=0}^{l_k} \boldsymbol{a}_{k\,j}\tau^j$$

степени l_k, и диапазоном изменения параметра $\tau \in [\tau_k^0, \tau_k^1]$:

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_1 : \ \mathbf{p}_1(\tau), & \tau_1^0 \le \tau \le \tau_1^1 \\ \qquad \cdots & \\ \gamma_n : \ \mathbf{p}_n(\tau), & \tau_n^0 \le \tau \le \tau_n^1 \end{cases} \qquad (12)$$

Для непрерывности кривой должно выполняться условие $\mathbf{p}_k(\tau_k^1) = \mathbf{p}_{k+1}(\tau_{k+1}^0)$ $(k = 1,2,\ldots,n-1)$. Требуется написать параметрическое уравнение кривой γ.

Назначим начальной точке, каждому внутреннему узлу и конечной точке кривой последовательно возрастающие значения параметра $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ и в $\mathbf{p}_k(\tau)$ сделаем замену

$$\tilde{\mathbf{p}}_k(t) = \mathbf{p}_k\left(\tau_k^0 + (\tau_k^1 - \tau_k^0)\frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}\right), \qquad (13)$$

где $\tilde{\mathbf{p}}_k(t) = \tilde{x}_k(t)\mathbf{i} + \tilde{y}_k(t)\mathbf{j} + \tilde{z}_k(t)\mathbf{k}$. $\tilde{x}_k(t)$

Набор функций $\tilde{x}_k(t) = x_k\left(\tau_k^0 + (\tau_k^1 - \tau_k^0)\dfrac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}\right)$ определяет некоторую непрерывную кусочно-полиномиальную функцию $\tilde{x}(t)$. Действительно, функции $\tilde{x}_k(t)$ являются полиномами степени l_k, используются на последовательных участках $[t_{k-1}, t_k]$ изменения аргумента *t*, и выполняется условие непрерывной стыковки соседних сегментов $\tilde{x}_k(t_k) = x_k(\tau_k^1) = x_{k+1}(\tau_{k+1}^0) = \tilde{x}_{k+1}(t_k)$. Для $t < t_0$ и $t > t_n$ функция $\tilde{x}(t)$ может быть продолжена полиномами $\tilde{x}_1(t)$ и $\tilde{x}_n(t)$. Поэтому, для $\tilde{x}(t)$ справедливо представление (3)

$$\tilde{x}(t)=\frac{1}{2}\left(\tilde{x}_1(t)+\tilde{x}_n(t)\right)+\sum_{k=1}^{n-1}X_k(t)\,|t-t_k|\,,$$

где $X_k(t)$ некоторые полиномы. Точно также, функции $\tilde{y}_k(t)$ и $\tilde{z}_k(t)$ определяют непрерывные кусочно-полиномиальные функции $\tilde{y}(t)$ и $\tilde{z}(t)$, для которых имеются аналогичные представления. Поэтому для вектор-функции $\mathbf{p}(t)=\tilde{x}(t)\,\mathbf{i}+\tilde{y}(t)\,\mathbf{j}+\tilde{z}(t)\,\mathbf{k}$ можно записать

$$\mathbf{p}(t)=\frac{1}{2}\left(\tilde{\mathbf{p}}_1(t)+\tilde{\mathbf{p}}_n(t)\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\mathbf{P}_k(t)|t-t_k|\,,$$

где $\tilde{\mathbf{p}}_1(t), \tilde{\mathbf{p}}_n(t)$ определяются в соответствии с (13), а $\mathbf{P}_k(t)=X_k(t)\,\mathbf{i}+Y_k(t)\,\mathbf{j}+Z_k(t)\,\mathbf{k}$ являются векторными полиномами степени $N_k=h_k-1$ $(h_k=\max\{l_k,l_{k+1}\})$. Для скалярных полиномов $X_k(t), Y_k(t), Z_k(t)$ имеют место представления (5). Объединяя их в одно векторное, получаем

$$\mathbf{P}_k(t)=\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{h_k}\frac{1}{q!}\left(\tilde{\mathbf{p}}_{k+1}^{(q)}(t_k)-\tilde{\mathbf{p}}_k^{(q)}(t_k)\right)(t-t_k)^{q-1}.$$

Но из (13) имеем $\tilde{\mathbf{p}}_k^{(q)}(t)=\mathbf{p}_k^{(q)}(\tau)\cdot\dfrac{(\tau_k^1-\tau_k^0)^q}{(t_k-t_{k-1})^q}$ (слева стоит производная по параметру *t*, а справа – по параметру τ). Тогда

$$\tilde{\mathbf{p}}_k^{(q)}(t_k)=\mathbf{p}_k^{(q)}(\tau_k^1)\cdot\frac{(\tau_k^1-\tau_k^0)^q}{(t_k-t_{k-1})^q} \quad \text{и} \quad \tilde{\mathbf{p}}_{k+1}^{(q)}(t_k)=\mathbf{p}_{k+1}^{(q)}(\tau_{k+1}^0)\cdot\frac{(\tau_{k+1}^1-\tau_{k+1}^0)^q}{(t_{k+1}-t_k)^q}\,.$$

В результате получаем

Теорема 2. *Если узлам непрерывной кусочно полиномиальной кривой* (12) *назначить произвольные монотонно возрастающие значения* $t_0<t_1<\ldots<t_n$ *параметра t, то ее уравнение можно записать в виде*

$$\mathbf{p}(t)=\frac{1}{2}\left(\tilde{\mathbf{p}}_1(t)+\tilde{\mathbf{p}}_n(t)\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\mathbf{P}_k(t)|t-t_k|\,, \tag{14}$$

где $\mathbf{P}_k(t)$ *являются векторными полиномами степени* h_k-1 *вида*

$$\mathbf{P}_k(t)=\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{h_k}\frac{1}{q!}\left(\mathbf{p}_{k+1}^{(q)}(\tau_{k+1}^0)\cdot\frac{(\tau_{k+1}^1-\tau_{k+1}^0)^q}{(t_{k+1}-t_k)^q}-\mathbf{p}_k^{(q)}(\tau_k^1)\cdot\frac{(\tau_k^1-\tau_k^0)^q}{(t_k-t_{k-1})^q}\right)(t-t_k)^{q-1}, \tag{15}$$

и $\tilde{\mathbf{p}}_1(t), \tilde{\mathbf{p}}_n(t)$ *определяются в соответствии с* (13). *Здесь* $h_k=\max\{l_k,l_{k+1}\}$, *и* l_k *представляют степени полиномиальных вектор-функций* $\mathbf{p}_k(\tau)$.

Следствие 3. *При выборе последовательности* $\{t_k\}$ *можно взять произвольное значение* t_0, *а остальные значения можно взять так, чтобы выполнялись равенства* $t_k-t_{k-1}=\tau_k^1-\tau_k^0$ $(k=1,2,\ldots,n)$. *Тогда* (13) *и* (15) *принимают вид*

$$\tilde{\mathbf{p}}_k(t)=\mathbf{p}_k\left(t+\tau_k^0-t_{k-1}\right) \text{ и } \mathbf{P}_k(t)=\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{h_k}\frac{1}{q!}\left(\mathbf{p}_{k+1}^{(q)}(\tau_{k+1}^0)-\mathbf{p}_k^{(q)}(\tau_k^1)\right)(t-t_k)^{q-1}. \tag{16}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Параметрическое уравнение ломаной. Пусть ломаная проходит через точки $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{r}_n$, направления ее крайних лучей определяется векторами $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n-1}$ и в точках $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}_n$ нет изломов.

Отрезок прямой, проходящий через точки $\mathbf{r}_{k-1}$, $\mathbf{r}_k$, имеет уравнение $\mathbf{p}_k(\tau) = \mathbf{r}_{k-1} + (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1})\tau$, $\tau \in [0,1]$. Назначим точкам $\mathbf{r}_k$ возрастающие значения $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ параметра *t*. В соответствии с (13), имеем $\tilde{\mathbf{p}}_k(t) = \mathbf{p}_k\left(\dfrac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}\right)$. Кроме того, поскольку $\mathbf{p}'_k(\tau) = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1}$ и все $h_k = 1$, то из (15) имеем

$$\mathbf{P}_k(t) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{p}'_{k+1}(0)\frac{1}{t_{k+1} - t_k} - \mathbf{p}'_k(1)\frac{1}{t_k - t_{k-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k}{t_{k+1} - t_k} - \frac{\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}\right).$$

Тогда, в соответствии с (14), получаем

$$\mathbf{p}(t) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{r}_0 + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)\frac{t - t_0}{t_1 - t_0} + \mathbf{r}_{n-1} + (\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n-1})\frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k}{t_{k+1} - t_k} - \frac{\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}\right)|t - t_k|. \tag{17}$$

Кривые Бернштейна-Безье. Составная кривая Бернштейна-Безье N – го порядка $(N \geq 1)$ является кусочно полиномиальной кривой (12), каждый сегмент которой γ_k является полиномом $\mathbf{p}_k(\tau)$ степени *N*, и полиномы $\mathbf{p}_k(\tau)$ определяются набором $\mathbf{r}_0^k, \mathbf{r}_1^k, \ldots, \mathbf{r}_N^k$ вершин многоугольников Безье [3, 4]

$$\mathbf{p}_k(\tau) = \sum_{i=0}^{N}\mathbf{r}_i^k \Phi_{N,i}(\tau), \; 0 \leq \tau \leq 1,$$

где $\Phi_{N,i}(\tau) = C_N^i \tau^i (1-\tau)^{N-i}$ и $C_N^i = N!/i!(N-i)!$. Предполагается непрерывность составной кривой, т.е. $\mathbf{r}_N^k = \mathbf{r}_0^{k+1}$ $(k = 1, \ldots, n-1)$.

Можно вычислить [4], что производные $\mathbf{p}_k^{(q)}(\tau)$ в конечных точках сегмента Безье (при $\tau = 0$ и $\tau = 1$) равны

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_k^{(q)}(0) &= \frac{N!}{(N-q)!}\sum_{i=0}^{q}(-1)^{q-i} C_q^i \mathbf{r}_i^k \\ \mathbf{p}_k^{(q)}(1) &= \frac{N!}{(N-q)!}\sum_{i=0}^{q}(-1)^{i} C_q^i \mathbf{r}_{N-i}^k \end{aligned} \tag{18}$$

Назначим узлам $\mathbf{r}_0^1, \{\mathbf{r}_N^k\}_{k=1}^n$, через которые проходит составная кривая Бернштейна–Безье, натуральные значения параметра $t = 0,1,\ldots,n$. Кривая является непрерывным кусочным полиномом и для нее выполняются теорема 2 и следствие 3. Кроме того, все $h_k = N$. Тогда, подставляя (18) в (16), получаем

$$\mathbf{P}_k(t) = \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{N}\frac{N!}{(N-q)!q!}\left(\sum_{i=0}^{q}(-1)^{q-i} C_q^i \mathbf{r}_i^{k+1} - \sum_{i=0}^{q}(-1)^{i} C_q^i \mathbf{r}_{N-i}^k\right)(t-k)^{q-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{N} C_N^q \left(\sum_{i=0}^{q} C_q^i \left((-1)^{q-i}\mathbf{r}_i^{k+1} - (-1)^i \mathbf{r}_{N-i}^k \right) \right) (t-k)^{q-1}.$$

Из (16) также имеем $\tilde{\mathbf{p}}_1(t) = \mathbf{p}_1(t)$ и $\tilde{\mathbf{p}}_n(t) = \mathbf{p}_n(t-(n-1))$. Поэтому (14) дает

$$\mathbf{p}(t) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{N} \mathbf{r}_i^1 \Phi_{N,i}(t) + \sum_{i=0}^{N} \mathbf{r}_i^n \Phi_{N,i}(t+1-n) \right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{q=1}^{N} C_N^q \left(\sum_{i=0}^{q} C_q^i \left((-1)^{q-i}\mathbf{r}_i^{k+1} - (-1)^i \mathbf{r}_{N-i}^k \right) \right) (t-k)^{q-1} \right) |t-k|. \tag{19}$$

Легко видеть, что слагаемое внутренней суммы, соответствующее *q=1*, равно $N \cdot \left((\mathbf{r}_1^{k+1} - \mathbf{r}_0^{k+1}) - (\mathbf{r}_N^k - \mathbf{r}_{N-1}^k) \right)$. Оно исчезает, если $\mathbf{r}_1^{k+1} - \mathbf{r}_0^{k+1} = \mathbf{r}_N^k - \mathbf{r}_{N-1}^k$. Множитель $t-k$ остальных слагаемых может быть вынесен за знак суммы, и (19) примет вид

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{P}(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}_k^{N-2}(t)(t-k)|t-k|,$$

где $\mathbf{P}_k^{N-2}(t)$ некоторые векторные полиномы степени не выше чем $N-2$. Поскольку $(t-k)|t-k| \in C^1$, то в этом случае составная кривая Бернштейна–Безье имеет непрерывную производную в узлах стыка сегментов.

Слагаемое в (19), соответствующее *q=2*, обращается в ноль, если $\mathbf{r}_0^{k+1} - 2\mathbf{r}_1^{k+1} + \mathbf{r}_2^{k+1} = \mathbf{r}_N^k - 2\mathbf{r}_{N-1}^k + \mathbf{r}_{N-2}^k$. В этом случае мы будем иметь непрерывные вторые производные во всех точках составной кривой. Аналогично, при достаточной степени *N*, подбирая внутренние вершины $\mathbf{r}_1^k, \ldots, \mathbf{r}_{N-1}^k$ многоугольников Безье, можно добиться желаемой гладкости составной кривой Бернштейна – Безье.

Кубические сплайны. Требуется построить кубический сплайн, проходящий через точки $\mathbf{r}_k = (x_k, y_k, z_k)$ $(k = 0,1,\ldots,n)$. Точки $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}_n$ используются для задания граничных условий и не являются узлами стыка сегментов сплайна. Назначим точкам $\mathbf{r}_k$ возрастающую последовательность $\{t_k\}_{k=0}^n$ значений параметра *t*. Возьмем последовательность точек $\{(t_k, x_k)\}_{k=0}^n$ и построим по (10) (или (11)) кубическую сплайн-функцию $x(t) = P_x^3(t) + \sum_{k=1}^{n-1} c_k^x |t-t_k|^3$. Аналогично, по узлам $\{(t_k, y_k)\}_{k=0}^n$ и $\{(t_k, z_k)\}_{k=0}^n$ строим кубические сплайн функции $y(t)$ и $z(t)$. Объединяя уравнения в одно векторное, получаем

$$\mathbf{p}(t) = x(t)\cdot\mathbf{i} + y(t)\cdot\mathbf{j} + z(t)\cdot\mathbf{k} = \mathbf{P}^3(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{c}_k\, |t-t_k|^3,$$

где $\mathbf{P}^3(t)$ некоторый векторный кубический полином, а $\mathbf{c}_k$ – векторные константы. Вспоминая (11), заключаем

$$\mathbf{p}(t) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{p}_1(t) + \mathbf{p}_n(t) \right) + \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\mathbf{r}_{k+1}'' - \mathbf{r}_k''}{t_{k+1} - t_k} - \frac{\mathbf{r}_k'' - \mathbf{r}_{k-1}''}{t_k - t_{k-1}} \right) |t-t_k|^3, \tag{20}$$

где $\mathbf{p}_1(t)$ и $\mathbf{p}_n(t)$ являются первым и последним кубическими полиномами в кусочном представлении сплайна, а $\mathbf{r}_k''$ – значения вторых производных кубического параметрического сплайна в узлах.

Заметим, что вектора, стоящие в (20), могут быть двумерными, трехмерными или даже n – мерными.

4. Заключение.

Формулы (3) – (5) настоящей работы позволяют получать "аналитические" уравнения любых непрерывных кусочно-полиномиальных функций. При этом в выражении используются только уравнения первого и последнего сегментов кусочного полинома, а также разности правой и левой производных требуемых порядков во внутренних узлах.

Уравнение ломаной, когда координаты ее вершин заданы, имеет вид (9). Формулы (7), (8) дают способ построения общих уравнений сплайнов. Уравнение интерполяционного кубического сплайна (11) может быть получено, если знать значения его вторых производных во всех внутренних узлах.

Формулы (14), (15) дают способ построения параметрических уравнений непрерывных кусочно-полиномиальных кривых. В частности получено важное для приложений уравнение (19) составной кривой Бернштейна – Безье, когда вершины многоугольников Безье всех звеньев заданы.

Полученные в работе формулы могут найти свое применение во многих областях прикладной математики и геометрического моделирования. Их использование в системах символьной математики позволяет генерировать параметрические уравнения непрерывных кусочных полиномов практически любой формы. Многие чертежи в системах инженерной компьютерной графики также могут описываться с использованием параметрических уравнений кусочных полиномов, а не с помощью последовательности графических примитивов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Доля П.Г. Об одном способе представления полиномиальных сплайнов в системах символьной математики.// Вестник Харьк. нац. ун-та., – 2007.– № 775. Сер. ”Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления”, вып.7. – С.130-139
2. Бернштейн С.Н. Об интерполировании. В кн. Собрание сочинений. Конструктивная теория функций. Т.1 . – М.: АН СССР, 1952, – С.5 – 7.
3. Фокс Ф., Пратт М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве. – М.: Мир, 1982.
4. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. – М.: Мир, 2001.