Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 519.853.7
№ 833, 2008, с.247-257

# Аналитическое описание взаимного расположения прямых параллелепипедов в задаче покрытия компактного многогранного множества

Е. С. Сосюрка
*Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАНУ, Украина*

Within the field of covering problem of the placement or mutual allocation of 3D objects is of great importance. In order to develop efficient solution the interaction of given placed objects has to be modeled in a suitable manner. A comprehensive investigation of all mutual positions of given objects is given and corresponding linear inequality systems are built.

## 1. Общая постановка задачи и её актуальность

Задачи покрытия возникают в различных сферах человеческой деятельности, областях науки и техники и состоят в том, что нужно покрыть заданную область некоторым набором геометрических объектов. В общей постановке задача заключается в покрытии заданной области некоторым набором геометрических объектов. Построение математических моделей задач покрытия основано на аналитическом описании отношений включения (принадлежности объекта области, образованной заданным набором). Задача построения аналитических методов для определения взаимного расположения геометрических объектов чрезвычайно сложна и требует тщательного и полного исследования взаимного расположения разнообразных пар геометрических объектов.

## 2. Истоки исследования автора

Задачи покрытия имеются в большом количестве в литературе.

Работы Стояна Ю.Г., Кривули А.В. [1-4] посвящены задаче, в которой заданную многоугольную область нужно покрыть набором прямоугольников различного размера. Цель – найти вектора переноса, на которые нужно параллельно перенести прямоугольники, чтобы они покрыли заданную область.

В работе [5] рассматривается следующая задача покрытия: задан конечный набор многоугольников и целевое точечное множество (или набор многоугольников). Цель – найти вектора трансляции, если таковые существуют, на которые нужно параллельно перенести многоугольники так, чтобы они покрыли целевое множество.

Работа [6] дает апроксимационный алгоритм нахождения покрытия одномерного точечного множества конгруэнтными кольцами.

Тот Г.Ф. в [7] провел обзор многочисленной литературы, посвященной задачам, в которых целевые объекты являются подмножеством объединения совокупности покрывающих объектов. Большинство из этих работ требуют, чтобы покрывающие объекты были идентичными. Целью же является покрыть целевой объект (иногда объекты), минимизируя при этом область наложения покрывающих объектов. Было найдено решение такой задачи для случая выпуклых объектов, таких как круги, прямоугольники и многоугольники с некоторыми свойствами симметрии. Были получены некоторые результаты для покрытия кругов конгруэнтными кругами. Некоторые не Евклидовы задачи покрытия в основном касаются шаров. Известны несколько работ посвященных решению такой задачи: можно ли параллельно перенести заданный набор выпуклых объектов так, чтобы они покрыли заданное выпуклое множество. Результаты в этой области ограничены случаем дисков.

Таким образом, в настоящее время известны работы, посвященные двумерным задачам покрытия, как набором идентичных объектов, так и набором объектов, метрические характеристики которых различны, и трехмерным задачам покрытия, в которых покрывающие объекты являются шарами. Прогресс в исследовании таких задач в двумерном пространстве делает актуальным распространение их и на случай трехмерного пространства и расширения класса покрывающих объектов.

### 3. Постановка задачи и цели работы

Задано семейство прямых параллелепипедов:

$\Lambda = \{P_i, i \in I = \{1,2,..,n\}\}$:

$P_i = \{(x,y,z) \in R^3 : -a_i \le x \le a_i, -b_i \le y \le b_i, -c_i \le z \le c_i\}, i \in I$, где $R^3$ – Евклидово арифметическое трехмерное пространство. Положение $P_i$ в $R^3$ определяется вектором трансляции $u_i = (x_i, y_i, z_i)$ (полагаем, что параллелепипеды не вращаются). Обозначим $P_i(u_i)$ параллелепипед $P_i$, транслированный на вектор $u_i = (x_i, y_i, z_i)$. Вектору $u = (u_1, u_2, .., u_n) \in R^{3n}$ соответствует семейство параллельно перенесенных параллелепипедов $\Lambda(u) = \{P_1(u_1), P_2(u_2), .., P_n(u_n)\}$.

**Задача.** Аналитически описать взаимное расположение параллелепипедов семейства $\Lambda(u)$, то есть теоретико-множественные отношения непересечения, принадлежности, пересечения представить в виде систем и совокупностей линейных неравенств.

### 4. Аналитическое описание взаимного расположения параллелепипедов

Рассмотрим два параллелепипеда $P_i(u_i)$ и $P_j(u_j)$. Пусть параллелепипеду $P_k(u_k), k = i, j$ соответствует набор вершин $\{v_p^k, p = 1,2,..,8\}$, набор ребер $\{e_p^k, p = 1,2,..,12\}$, набор граней $\{f_p^k, i = 1,2,..,6\}$.

Зафиксируем векторы $u_i = u_i^0$ и $u_j = u_j^0$. Тогда взаимное размещение параллелепипедов $P_i(u_i^0)$ и $P_j(u_j^0)$ может быть одним из следующих типов:

- параллелепипед $P_i(u_i^0)$ не имеет общих точек с параллелепипедом

$P_j(u_j^0)$, то есть $clP_i(u_i^0) \bigcap clP_j(u_j^0) = \varnothing$. (Рис.4.1.)

- параллелепипед $P_i(u_i^0)$ содержит вершину параллелепипеда $P_j(u_j^0)$, а параллелепипед $P_j(u_j^0)$ содержит вершину $P_i(u_i^0)$, то есть $\exists p : v_p^j \in clP_i(u_i^0)$ и $\exists h : v_h^i \in clP_j(u_j^0)$. Возможно восемь вариантов. (Рис.4.2.);
- параллелепипед $P_i(u_i^0)$ содержит ребро параллелепипеда $P_j(u_j^0)$, то есть $\exists p : e_p^j \subset P_i(u_i^0)$ и для $\forall h$ верно, что $f_h^j \not\subset P_i(u_i^0)$. Возможно двенадцать вариантов. (Рис.4.3.);
- параллелепипед $P_i(u_i^0)$ содержит грань параллелепипеда $P_j(u_j^0)$, то есть $\exists p : f_p^j \subset P_i(u_i^0)$. Возможно шесть вариантов. (Рис.4.4.);
- параллелепипед $P_i(u_i^0)$ содержит параллелепипед $P_j(u_j^0)$, или его часть (при этом не содержит его вершин, ребер и граней полностью), то есть для $\forall h, p, g$ верно, что $v_h^j, e_p^j, f_g^j \notin P_i(u_i^0)$, а $\operatorname{int} P_i(u_i^0) \bigcap \operatorname{int} P_j(u_j^0) \neq \varnothing$, где под $\operatorname{int}(T)$ понимаем внутренность множества $T$, под $cl(T)$ - его замыкание.

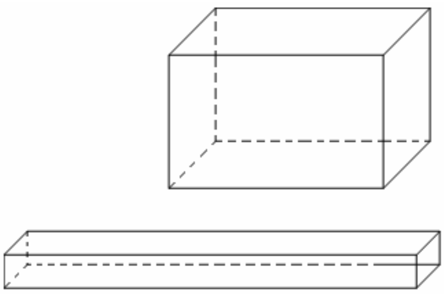

*Рис.4.1. 1-й тип взаимного размещения.*

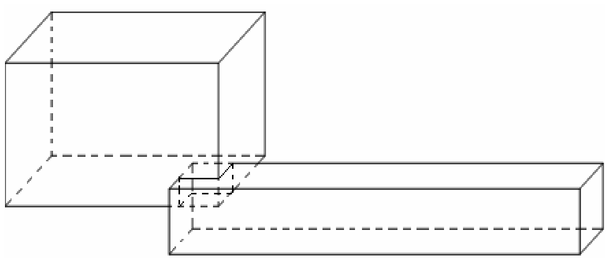

*Рис.4.2. 2-й тип взаимного размещения.*

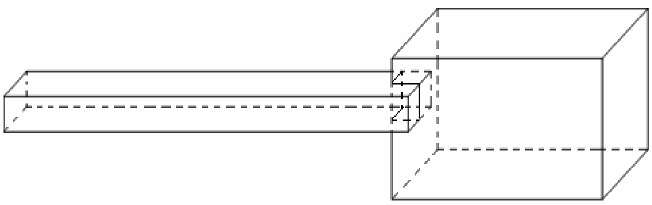

*Рис.4.3. 3-й тип взаимного размещения.*

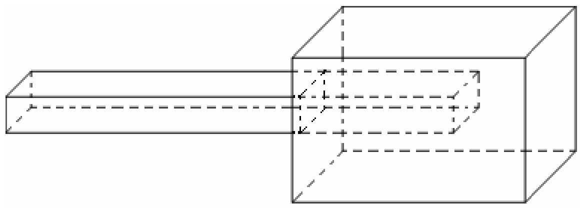

*Рис.4.4. 4-й тип взаимного размещения.*

Возможно четыре варианта. (Рис.4.5.);

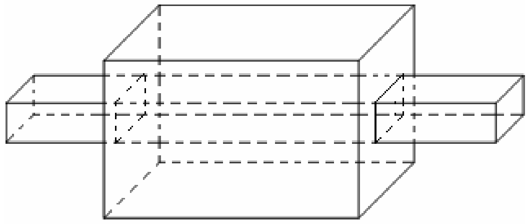

*Рис.4.5. 5-й тип взаимного размещения.*

Таким образом, возможен 31 вариант взаимного расположения параллелепипедов $P_i(u_i^0)$ и $P_j(u_j^0)$.

Пусть теперь параметры размещения $u_i$ и $u_j$ произвольные. Построим системы неравенств, задающие перечисленные типы взаимодействия параллелепипедов $P_i(u_i)$ и $P_j(u_j)$. То есть, опишем условия на параметры размещения параллелепипедов и на их метрические характеристики, при выполнении которых они будут находиться в одном из типов взаимного положения. Иными словами, построим множества $S_{ij}^k$, где $k \in I = \{1,2,..,31\}$, такие что, если $(u_i, u_j) \in S_{ij}^k$, то взаимное расположение параллелепипедов $P_i(u_i)$ и $P_j(u_j)$ будет $k$-го типа.

Множество $S_{ij}^1$ задается неравенством

$\Phi_{ij}(u_i, u_j) = \max\{\varphi_1(x_i, x_j), \varphi_2(x_i, x_j), \varphi_3(y_i y_j), \varphi_4(y_i, y_j), \varphi_5(z_i, z_j), \varphi_6(z_i, z_j)\} \geq 0$,

где $\varphi_1(x_i, x_j) = x_i - x_j - (a_i + a_j)$, $\varphi_2(x_i, x_j) = x_j - x_i - (a_i + a_j)$,

$\varphi_3(y_i, y_j) = y_i - y_j - (b_i + b_j)$, $\varphi_4(y_i, y_j) = y_j - y_i - (b_i + b_j)$,

$\varphi_5(z_i, z_j) = z_i - z_j - (c_i + c_j)$, $\varphi_6(z_i, z_j) = z_j - z_i - (c_i + c_j)$, $\Phi_{ij}(u_i, u_j)$ - $\Phi$-функция для параллелепипедов $P_i$ и $P_j$ [8]. Обозначим такое неравенство так:

$$\left\langle K_{ij}^1(u_i, u_j) + D_{ij}^1 \geq 0 \right. \qquad (4.1)$$

Таким образом, если, по крайней мере, одно из неравенств $x_i - x_j - (a_i + a_j) \geq 0$, $x_j - x_i - (a_i + a_j) \geq 0$, $y_i - y_j - (b_i + b_j) \geq 0$, $y_j - y_i - (b_i + b_j) \geq 0$, $z_i - z_j - (c_i + c_j) \geq 0$, $z_j - z_i - (c_i + c_j) \geq 0$ выполнено, то $(u_i, u_j) \in S_{ij}^1$.

Нетрудно показать, что множества $S_{ij}^k, k = 2,3,..,31$ можно задать следующими системами неравенств:

$$K_{ij}^l(u_i,u_j)+D_{ij}^l=\begin{cases}\Delta_x^3 \le x_i - x_j \le \Delta_x^4\\ \Delta_y^{l-1} \le y_i - y_j \le \Delta_y^l, l = 2,3,4;\\ \Delta_z^1 \le z_i - z_j \le \Delta_z^2\end{cases}$$

$$K_{ij}^l(u_i,u_j)+D_{ij}^l=\begin{cases}\Delta_x^2 \le x_i - x_j \le \Delta_x^3\\ \Delta_y^{l-4} \le y_i - y_j \le \Delta_y^{l-3}, l = 5,6,7;\\ \Delta_z^1 \le z_i - z_j \le \Delta_z^2\end{cases}$$

$$K_{ij}^l(u_i,u_j)+D_{ij}^l=\begin{cases}\Delta_x^1 \le x_i - x_j \le \Delta_x^2\\ \Delta_y^{l-7} \le y_i - y_j \le \Delta_y^{l-6}, l = 8,9,10;\\ \Delta_z^1 \le z_i - z_j \le \Delta_z^2\end{cases}$$

$$K_{ij}^l(u_i,u_j)+D_{ij}^l=\begin{cases}\Delta_x^3 \le x_i - x_j \le \Delta_x^4\\ \Delta_y^{l-10} \le y_i - y_j \le \Delta_y^{l-9}, l = 11,12,13;\\ \Delta_z^2 \le z_i - z_j \le \Delta_z^3\end{cases}$$

$$K_{ij}^l(u_i,u_j)+D_{ij}^l=\begin{cases}\Delta_x^2 \le x_i - x_j \le \Delta_x^3\\ \Delta_y^{l-13} \le y_i - y_j \le \Delta_y^{l-12}, l = 14,15,16;\\ \Delta_z^2 \le z_i - z_j \le \Delta_z^3\end{cases}$$

$$K_{ij}^l(u_i,u_j)+D_{ij}^l=\begin{cases}\Delta_x^1 \le x_i - x_j \le \Delta_x^2\\ \Delta_y^{l-16} \le y_i - y_j \le \Delta_y^{l-15}, l = 17,18,19;\\ \Delta_z^2 \le z_i - z_j \le \Delta_z^3\end{cases}$$

$$K_{ij}^l(u_i,u_j)+D_{ij}^l=\begin{cases}\Delta_x^3 \le x_i - x_j \le \Delta_x^4\\ \Delta_y^{l-19} \le y_i - y_j \le \Delta_y^{l-18}, l = 20,21,22;\\ \Delta_z^3 \le z_i - z_j \le \Delta_z^4\end{cases}$$

$$K_{ij}^l(u_i,u_j)+D_{ij}^l=\begin{cases}\Delta_x^2 \le x_i - x_j \le \Delta_x^3\\ \Delta_y^{l-22} \le y_i - y_j \le \Delta_y^{l-21}, l = 23,24,25;\\ \Delta_z^3 \le z_i - z_j \le \Delta_z^4\end{cases}$$

$$K_{ij}^l(u_i,u_j)+D_{ij}^l=\begin{cases}\Delta_x^1 \le x_i - x_j \le \Delta_x^2\\ \Delta_y^{l-25} \le y_i - y_j \le \Delta_y^{l-24}, l = 26,27,28;\\ \Delta_z^3 \le z_i - z_j \le \Delta_z^4\end{cases}$$

$$K_{ij}^{29}(u_i,u_j)+D_{ij}^{l}=\begin{cases}\Delta_x^2\le x_i-x_j\le\Delta_x^3\\ \Delta_y^2\le y_i-y_j\le\Delta_y^3\\ \Delta_z^2\le z_i-z_j\le\Delta_z^3\\ a_i>a_j, b_i>b_j, c_i<c_j\end{cases},$$

$$K_{ij}^{30}(u_i,u_j)+D_{ij}^{l}=\begin{cases}\Delta_x^2\le x_i-x_j\le\Delta_x^3\\ \Delta_y^2\le y_i-y_j\le\Delta_y^3\\ \Delta_z^2\le z_i-z_j\le\Delta_z^3\\ a_i>a_j, b_i<b_j, c_i>c_j\end{cases},$$

$$K_{ij}^{31}(u_i,u_j)+D_{ij}^{l}=\begin{cases}\Delta_x^2\le x_i-x_j\le\Delta_x^3\\ \Delta_y^2\le y_i-y_j\le\Delta_y^3\\ \Delta_z^2\le z_i-z_j\le\Delta_z^3\\ a_i<a_j, b_i>b_j, c_i>c_j\end{cases},$$

где $\Delta_x^1=-(a_i+a_j), \Delta_x^2=-|a_i-a_j|, \Delta_x^3=|a_i-a_j|, \Delta_x^4=(a_i+a_j)$,

$$\Delta_y^1=-(b_i+b_j), \Delta_y^2=-|b_i-b_j|, \Delta_y^3=|b_i-b_j|, \Delta_y^4=(b_i+b_j),$$
$$\Delta_z^1=-(c_i+c_j), \Delta_z^2=-|c_i-c_j|, \Delta_z^3=|c_i-c_j|, \Delta_z^4=(c_i+c_j). \tag{4.2}$$

При $l=15$, полагаем, что на метрические характеристики параллелепипедов наложены следующие ограничения: $\{a_i>a_j, b_i>b_j, c_i>c_j\}$.

Таким образом:

$$R^6=\bigcup_{k=1}^{28}S_{ij}^k \text{ или } R^6=\bigcup_{k=1,k\ne15}^{29}S_{ij}^k, \text{ или } R^6=\bigcup_{k=1,k\ne15,29}^{30}S_{ij}^k, \text{ или } R^6=\bigcup_{k=1,k\ne15,29,30}^{31}S_{ij}^k. \tag{4.3}$$

Однако, такое представление не является разбиением пространства $R^6$, хотя $\operatorname{int}S_{ij}^t\bigcap\operatorname{int}S_{ij}^r=\varnothing$ при $t\ne r\in I=\{1,2,..,31\}$, поскольку $\exists t,r: S_{ij}^t\bigcap S_{ij}^r\ne\varnothing$.

Пусть $H_{ij}(u_i,u_j)$ - семейство множеств вида $cl\left(\left(R^3\setminus P_i(u_i)\right)\bigcap\left(R^3\setminus P_j(u_j)\right)\right)$, порожденных параметрами $(u_i,u_j)$. Тогда, в зависимости от взаимного расположения параллелепипедов $P_i(u_i)$ и $P_j(u_j)$, $\forall h(u_i,u_j)\subset H_{ij}(u_i,u_j)$ может быть одного из 31 типов.

Таким образом, семейство $H_{ij}(u_i,u_j)$ может быть представлено в виде объединения подсемейств: $H_{ij}(u_i,u_j)=\bigcup_{k=1}^{31}G_{ij}^k$, где подсемейство $G_{ij}^k=\{h(u_i,u_j):(u_i,u_j)\in S_{ij}^k\}$, а множество $h(u_i,u_j)$ определяется так: $h(u_i,u_j)=cl((R^3\setminus P_i(u_i))\bigcap(R^3\setminus P_j(u_j)))$.

Любое $h(u_i, u_j) \in G_{ij}^k$ называется граничным множеством подсемейства $G_{ij}^k(u_i, u_j)$, если хотя бы одно неравенство соответствующей системы $K_{ij}^k(u_i, u_j) + D_{ij}^k$ активно, то есть неравенство обращается в равенство. Граничные множества подсемейства $G_{ij}^k(u_i, u_j)$ называются граничным подсемейством семейства $G_{ij}^k(u_i, u_j)$ и обозначаются $L_{ij}^k(u_i, u_j), k \in I \setminus \{1\}$.

Построим множества $R_{ij}^k, k \in I$, которые описываются системами неравенств $A_{ij}^k(u_i, u_j) + B_{ij}^k$, аналогичными системам $K_{ij}^k(u_i, u_j) + D_{ij}^k$ (4.2), но исключим общие точки на границах множеств $S_{ij}^k, k \in I = \{1,2,..,31\}$, то есть, заменим некоторые нестрогие неравенства в системах $K_{ij}^k(u_i, u_j)$ на строгие, а именно:

$$A_{ij}^1(u_i, u_j) + B_{ij}^1 = (K_{ij}^1(u_i, u_j) + D_{ij}^1) \setminus$$
$$((u_i, u_j) : x_i - x_j = \Delta_x^1 \vee x_i - x_j = \Delta_x^2 \vee y_i - y_j = \Delta_y^1 \vee y_i - y_j = \Delta_y^2 \vee$$
$$z_i - z_j = \Delta_z^1 \vee z_i - z_j = \Delta_z^2);$$
$$A_{ij}^l(u_i, u_j) + B_{ij}^l = K_{ij}^l(u_i, u_j) + D_{ij}^l, l = 2,4,8,10,20,22,26,28;$$
$$A_{ij}^l(u_i, u_j) + B_{ij}^l =$$
$$(K_{ij}^l(u_i, u_j) + D_{ij}^l) \setminus ((u_i, u_j) : y_i - y_j = \Delta_y^2 \vee y_i - y_j = \Delta_y^3), l = 3,9,31,27;$$
$$A_{ij}^l(u_i, u_j) + B_{ij}^l =$$
$$(K_{ij}^l(u_i, u_j) + D_{ij}^l) \setminus ((u_i, u_j) : x_i - x_j = \Delta_x^2 \vee x_i - x_j = \Delta_x^3), l = 5,7,23,25;$$
$$A_{ij}^l(u_i, u_j) + B_{ij}^l = (K_{ij}^l(u_i, u_j) + D_{ij}^l) \setminus$$
$$((u_i, u_j) : x_i - x_j = \Delta_x^2 \vee x_i - x_j = \Delta_x^3 \vee y_i - y_j = \Delta_y^2 \vee y_i - y_j = \Delta_y^3), l = 6,24;$$
$$A_{ij}^l(u_i, u_j) + B_{ij}^l =$$
$$(K_{ij}^l(u_i, u_j) + D_{ij}^l) \setminus ((u_i, u_j) : z_i - z_j = \Delta_z^2 \vee z_i - z_j = \Delta_z^3), l = 11,13,17,19;$$
$$A_{ij}^l(u_i, u_j) + B_{ij}^l = (K_{ij}^l(u_i, u_j) + D_{ij}^l) \setminus$$
$$((u_i, u_j) : y_i - y_j = \Delta_y^2 \vee y_i - y_j = \Delta_y^3 \vee z_i - z_j = \Delta_z^2 \vee z_i - z_j = \Delta_z^3), l = 12,18;$$
$$A_{ij}^l(u_i, u_j) + B_{ij}^l = (K_{ij}^l(u_i, u_j) + D_{ij}^l) \setminus$$
$$((u_i, u_j) : x_i - x_j = \Delta_x^2 \vee x_i - x_j = \Delta_x^3 \vee z_i - z_j = \Delta_z^2 \vee z_i - z_j = \Delta_z^3), l = 14,16;$$
$$A_{ij}^l(u_i, u_j) + B_{ij}^l = (K_{ij}^l(u_i, u_j) + D_{ij}^l) \setminus$$
$$((u_i, u_j) : x_i - x_j = \Delta_x^2 \vee x_i - x_j = \Delta_x^3 \vee y_i - y_j = \Delta_y^2 \vee y_i - y_j = \Delta_y^3 \vee \tag{4.3}$$
$$z_i - z_j = \Delta_z^2 \vee z_i - z_j = \Delta_z^3), l = 15,29,30,31.$$

Тогда, в зависимости от метрических характеристик параллелепипедов $P_i(u_i)$ и $P_j(u_j)$ получим:

**Теорема.**

$$R^6 = \bigcup_{k=1}^{28} R_{ij}^k \text{, если } \begin{cases} a_i < a_j \\ b_i < b_j \\ c_i < c_j \end{cases}; \quad R^6 = \bigcup_{k=1, k\neq 15}^{29} R_{ij}^k \text{, если } \begin{cases} a_i < a_j \\ b_i < b_j \\ c_i > c_j \end{cases};$$

$$R^6 = \bigcup_{k=1, k\neq 15,29}^{30} R_{ij}^k \text{, если } \begin{cases} a_i > a_j \\ b_i < b_j \\ c_i > c_j \end{cases}; \quad R^6 = \bigcup_{k=1, k\neq 15,29,30}^{31} R_{ij}^k \text{, если } \begin{cases} a_i < a_j \\ b_i > b_j \\ c_i > c_j \end{cases}. \tag{4.4}$$

где $R_{ij}^t \bigcap R_{ij}^r = \varnothing$ при $t \neq r \in I$, то есть это разбиение пространства $R^6$. Более того, $R_{ij}^k = \operatorname{int} R_{ij}^k$ при $k = 1,15,29,30,31$, $R_{ij}^k = clR_{ij}^k$ при $k = 2,4,8,10,20,22,26,28$ и $R_{ij}^k$ при $k = 3,5,6,7,9,11,12,13,14,16,17,18,19,21,23,24,25,27$ ни открыто, ни замкнуто.

Обозначим $x = (x_i - x_j), y = (y_i - y_j)$ и $z = (z_i - z_j)$. Тогда соотношения (4.2) и (4.4) можно проиллюстрировать в $R^3$ (Рис.4.6.).

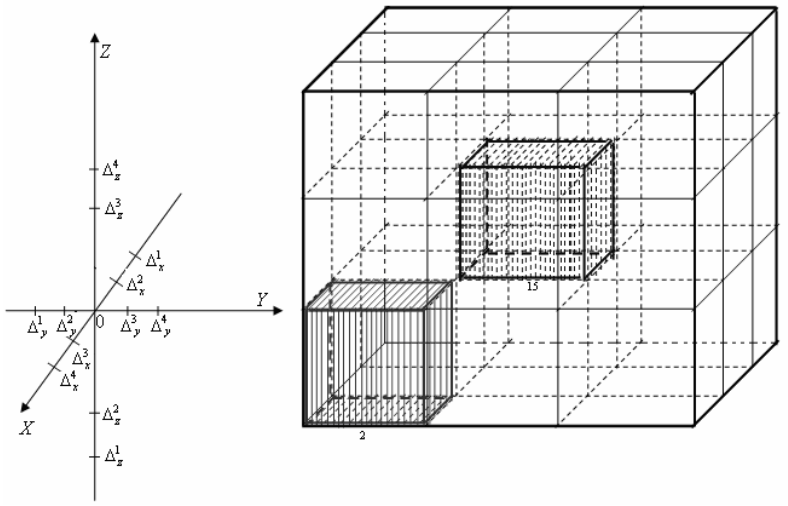


*Рис.4.6. Проекция разбиения* $R^6$.

Пусть $H_{ij}^k(u_i, u_j), k \in I$ - подсемейства семейства $H_{ij}(u_i, u_j)$, при параметрах размещения $(u_i, u_j) \in R_{ij}^k$, то есть,

$$H_{ij}^k(u_i, u_j) = G_{ij}^k(u_i, u_j) \setminus L_{ij}^k(u_i, u_j), k = 1,15,29,30,31,$$

$$H_{ij}^k(u_i, u_j) = G_{ij}^k(u_i, u_j), k = 2,4,8,10,20,22,26,28.$$

**Замечание.** Если $a_i = a_j$, то мы можем получить только подсемейства $G_{ij}^k(u_i, u_j)$, $k = 1,2,..,4,8,9,..,13,17,18,..,22,26,27,..,28$. То есть разбиение пространства $R^6$ при таком условии на метрические характеристики параллелепипедов $P_i$ и $P_j$ будет иметь следующий вид:

$R^6 = \bigcup R_{ij}^k, k = 1,2,..,4,8,9,..,13,17,18,..,22,26,27,..,28.$

Если $b_i = b_j$, то $R^6 = \bigcup R_{ij}^k, k = 1,2,4,5,7,8,10,11,13,14,16,17,19,20,22,23,25,26,28.$

Если $c_i = c_j$, то $R^6 = \bigcup R_{ij}^k, k = 1,2,..,10,20,21,..,28.$

Если $a_i = a_j$ и $b_i = b_j$, то $R^6 = \bigcup R_{ij}^k, k = 1,2,4,8,10,11,13,17,19,20,22,26,28.$

Если $a_i = a_j$ и $c_i = c_j$, то $R^6 = \bigcup R_{ij}^k, k = 1,2,3,4,8,9,10,20,21,22,26,27,28.$

Если $b_i = b_j$ и $c_i = c_j$, то $R^6 = \bigcup R_{ij}^k, k = 1,2,4,5,7,8,10,20,22,23,25,26,28.$

Если $a_i = a_j$ и $b_i = b_j$, $c_i = c_j$, то $R^6 = \bigcup R_{ij}^k, k = 1,2,4,8,10,20,22,26,28.$

**Определение.** Если $h(u_i^1, u_j^1)$ и $h(u_i^2, u_j^2)$ принадлежат одному и тому же семейству $H_{ij}^k(u_i, u_j)$, то говорим, что $h(u_i^1, u_j^1)$ и $h(u_i^2, u_j^2)$ имеют одинаковую пространственную форму $k$ -го типа.

Перейдем теперь к общему случаю, когда число параллелепипедов больше двух.

Обозначим через $H(u)$ семейство множеств вида $cl(R^3 \setminus \bigcup_{i=1}^{n} P(u_i)) = cl\bigcap_{i=1}^{n}\left(R^3 \setminus P_i(u_i)\right)$, порожденных параметрами $u = (u_1, u_2, .., u_n)$.

По аналогии со случаем двух параллелепипедов, любое множество $h(u) \in H(u)$ может быть представлено в терминах множеств $H_{ij}^k(u_i, u_j), i \neq j \in \{1,2,..n\}, k \in I = \{1,2,..,31\}$. Это означает, что каждому множеству $h(u) \in H(u)$ может быть поставлена в соответствие следующая матрица:

$$M = \begin{pmatrix} m_{12} & m_{13} & \dots & m_{1n} \\ 0 & m_{23} & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_{n-1,n} \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

где $m_{ij}$ - пространственная форма множества $h(u_i, u_j) = cl\left(\left(R^3 \setminus P_i(u_i)\right) \cap \left(R^3 \setminus P_j(u_j)\right)\right)$.

Таким образом, мы можем построить элемент $h(u) \in H(u)$, если задана матрица $M$, и обратно: если известны параметры размещения $u_i, i = 1,2,..,n$ и метрические характеристики параллелепипедов, тогда матрица $M$ может быть построена.

Поскольку $a_i > 0, b_i > 0, c_i > 0, i \in I = \{1,2,..,n\}$, то с помощью соотношений (4.3) и матрицы типа (4.5) построим непустое множество $R_q^{3n} \subset R^{3n}$ и соответствующую систему неравенств:

$$R_q^{3n} = \{(u_1, u_2, .., u_n) : (u_1, u_2) \in R_{12}^{k_1}, (u_1, u_3) \in R_{13}^{k_2}, .., (u_1, u_n) \in R_{1n}^{k_{n-1}},$$
$$(u_2, u_3) \in R_{23}^{k_n}, .., (u_{n-1}, u_n) \in R_{(n-1)n}^{k_\mu}, \mu = n(n-1)/2\}$$

$$(A_q u + B_q \geq 0) = \begin{cases} A_{12}^{k_1}(u_1, u_2) + B_{12}^{k_1} \geq 0 \\ A_{13}^{k_2}(u_1, u_2) + B_{13}^{k_2} \geq 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{1n}^{k_n}(u_1, u_n) + B_{1n}^{k_{n-1}} \geq 0 \\ A_{23}^{k_{n+1}}(u_2, u_3) + B_{23}^{k_1} \geq 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{(n-1)n}^{k_\sigma}(u_{n-1}, u_n) + B_{(n-1)n}^{k_\mu} \geq 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

Принимая во внимание все вышеизложенное, на каждом таком подмножестве $R_q^{3n} \subset R^{3n}, q = 1,2,..,\eta$, где $\eta \leq 31^{\sigma-1}, \sigma = \frac{1}{2}n(n-1)$ при $n > 2$, $\eta \leq 31$, при $n = 2$. ($R^{3n} = \bigcup_{q=1}^{\eta} R_q^{3n}$) определено подсемейство $H_q(u) \subset H(u)$. То есть, семейство $H(u)$ может быть разбито на конечное число подсемейств $H_q(u), q = 1,2,..,\eta$, каждое из которых состоит из множеств, имеющих один и тот же тип пространственной формы.

**5. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований**

Получено аналитическое описание взаимного расположения прямых параллелепипедов для трехмерной задачи покрытия. Введено понятие пространственной формы. В дальнейшем становится возможным обобщить стратегию решения двумерной задачи покрытия на трехмерный случай с использованием введенных пространственных форм и провести численное моделирование.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stoyan Yu. Covering a polygonal region by a collection of various rectangles // Проблемы машиностроения. – 2007.т.10, №2 – С.67-82.
2. Кривуля А.В. Математическая модель задачи покрытия многоугольной области прямоугольными объектами // Системи обробки інформації. – 2007.т.66, №8 – С.143-145.
3. Романова Т.Е., Злотник М.В., Панкратов А.В., Кривуля А.В. Стратегия решения задачи покрытия многосвязной многоугольной области // Бионика интеллекта. – 2007.т.67, №2 – С.51-55.

4. Романова Т.Е., Злотник М.В., Кривуля А.В. Аналитическое описание условия покрытия прямоугольной области прямоугольными объектами // Искусственный интеллект. – 2006.№4 – С.175-183.
5. Daniels K., Inkulu R. An incremental algorithm for translational polygon covering //University of Massachusetts at Lowell Computer Science Technical Report // 2001.№1
6. Hochbaum D Fast approximation algorithms for a nonconvex covering problem //Journal of algorithms // 1987.vol.8 – P.305-323.
7. Toth G. F. Packing and covering //Handbook of discrete and computational geometry //CRC Press New York // 1997.
8. Stoyan Yu., Scheithauer G., Pridatko D., Romanova T. $\Phi$-function for primary 3D-objcts //Technische Universität Dresden // MATH-NM – 2002.№15 – P.7-11.