

Численное решение задачи Коши для одной полулинейной системы дифференциально-алгебраических уравнений

И. Г. Худошин

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

Numerical method for solution of Cauchy problem for semilinear system of differential-algebraic equations is obtained with an estimate for the resolvent of the spectral family containing coefficients of the system. The obtained method is used to analysis of one electric circuit.

1 Постановка задачи

Рассматривается полулинейная система дифференциально-алгебраических уравнений

$$\frac{d}{dt}(Ax(t)) + Bx(t) = f(t, x(t)), \quad (1.1)$$

где A, B -- вырожденные матрицы $n \times n$, $f(t, u) : [t_0, T] \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ -- непрерывная функция, Для уравнения (1.1) ставится задача Коши с начальным условием

$$x(t_0) = x_0. \quad (1.2)$$

Пример такой задачи мы получаем при моделировании переходных режимов передающего четырёхполосника, изображенного на рисунке 1.1.

Электрические режимы элементов четырёхполосника описываются следующими уравнениями относительно токов i_k и напряжений u_k :

$$i_1 = C_1 \frac{du_1}{dt} + F_1(t, u_1), \quad (1.3)$$

$$i_2 = C_2 \frac{du_2}{dt} + F_2(t, u_2), \quad (1.4)$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} + F_L(t, i_L), \quad (1.5)$$

$$u_R = Ri_R. \quad (1.6)$$

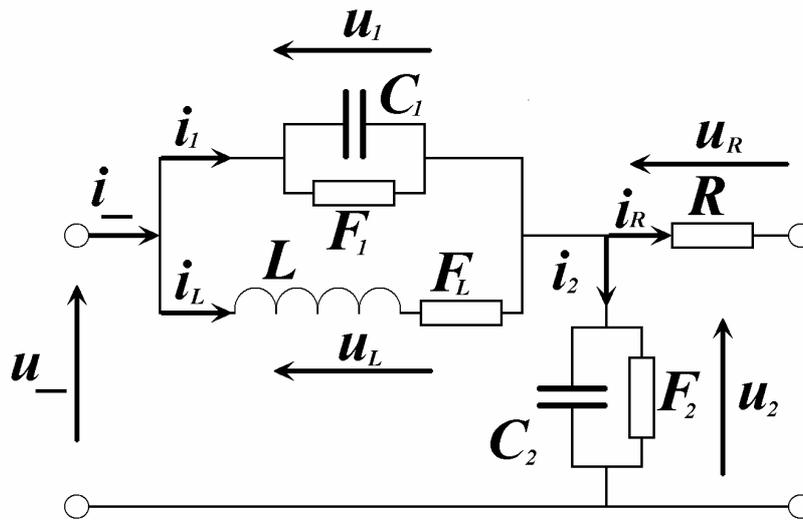


Рис.1.1. Схема электрического передающего четырёхполюсника.

Здесь функции F_1 и F_2 характеризуют нелинейную утечку тока в емкостях, а функция F_L -- омические потери в индуктивности. Для данной схемы токи и напряжения удовлетворяют следующим уравнениям Кирхгофа:

$$i_1 + i_L = i_-, i_2 + i_R = i_-, u_1 + u_2 = u_-, u_L - u_1 = 0. \quad (1.7)$$

Подставив значения переменных i_1, i_2, u_3, i_R из уравнений элементов (1.3), (1.4), (1.5), (1.6) в уравнения Кирхгофа (1.7), получим следующую систему дифференциально-алгебраических уравнений, описывающую токи и напряжения в четырёхполюснике:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{du_1}{dt} + i_L &= i_-(t) - F_1(t, u_1), \\ C_2 \frac{du_2}{dt} + i_R &= i_-(t) - F_2(t, u_2), \\ L \frac{di_L}{dt} - u_1 &= -F_L(t, i_L), \\ u_1(t) + u_2(t) &= u_-(t). \end{aligned} \quad (1.8)$$

В задаче прохождения сигналов через передающий четырёхполюсник входной ток $i_-(t)$ и входное напряжение $u_-(t)$ считаются известными функциями. Система (1.8) записывается в векторной форме (1.1), где

$$x = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_L \\ i_R \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(t, x(t)) = \begin{pmatrix} i_-(t) - F_1(t, u_1(t)) \\ i_-(t) - F_2(t, u_2(t)) \\ -F_L(t, i_L(t)) \\ u_-(t) \end{pmatrix}.$$

Решением задачи Коши (1.1), (1.2) на отрезке $[t_0, T]$ будем называть такую непрерывную функцию $x(t): [t_0, T] \rightarrow \mathbf{R}^n$, удовлетворяющую уравнению (1.1) при $t \in [t_0, T]$ и начальному условию (1.2), для которой функция $Ax(t)$ непрерывно дифференцируема на $[t_0, T]$.

Линейные и нелинейные дифференциально-алгебраические уравнения, имеющие векторную форму (1.1) в конечномерном пространстве, интенсивно изучаются, см., например, результаты и библиографию в [1-3].

Уравнение (1.1) в бесконечномерных банаховых пространствах называется иногда полулинейным уравнением Соболева. Разрешимость таких уравнений исследовалась в [4-8]. В монографии [9] получены различные результаты для абстрактных уравнений вида (1.1), включая более общий случай нестационарных операторов A, B , а так же для уравнений с запаздыванием и уравнений с импульсными воздействиями.

Важной характеристикой уравнения (1.1) является поведение резольвенты характеристического пучка $(\lambda A + B)^{-1}$ на бесконечности. С этой характеристикой непосредственно связана структура спектральных пространств характеристического пучка $\lambda A + B$, которая, в свою очередь, является одним из определяющих факторов, влияющих на разрешимость исследуемой задачи. Для приведенного примера резольвента равна

$$(\lambda A + B)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda L}{\lambda^2 C_1 L + 1} & 0 & -\frac{1}{\lambda^2 C_1 L + 1} & 0 \\ -\frac{\lambda L}{\lambda^2 C_1 L + 1} & C_2 & \frac{1}{\lambda^2 C_1 L + 1} & 1 \\ \frac{1}{\lambda^2 C_1 L + 1} & 0 & \frac{\lambda C_1}{\lambda^2 C_1 L + 1} & 0 \\ \frac{\lambda^2 C_2 L}{\lambda^2 C_1 L + 1} & 1 & -\frac{\lambda C_2}{\lambda^2 C_1 L + 1} & -\lambda C_2 \end{pmatrix}.$$

В данной работе предполагается, что пучок $\lambda A + B$ регулярен ($\exists \lambda \in \mathbb{C}, \det(\lambda A + B) \neq 0$), и выполняется оценка для резольвенты

$$\|(\lambda A + B)^{-1}\| \leq C |\lambda|, \lambda \rightarrow \infty. \quad (1.9)$$

2 Существование решения

Глобальная теорема существования и единственности решения задачи Коши (1.1), (1.2) в бесконечномерных банаховых пространствах доказана в [11]. Условия этой теоремы не выполняются в случае четырехполосника, изображенного на рисунке 1.1. Ниже будут приведены некоторые необходимые определения и построения из [11] и доказана теорема для случая конечномерных пространств, имеющая менее жёсткие ограничения, которым удовлетворяет указанный четырёхполосник.

Известно [4],[10], что в случае регулярного пучка $\lambda A + B$ и при условии (1.9) с помощью контурного интегрирования можно построить спектральные проекторы типа Рисса

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\lambda A + B)^{-1} A d\lambda, P_2 = I_X - P_1,$$

$$Q_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} A (\lambda A + B)^{-1} d\lambda, Q_2 = I_Y - Q_1.$$

Полученные таким образом проекторы порождают прямые разложения пространства \mathbf{R}^n , которые приводят пучок $\lambda A + B$:

$$\mathbf{R}^n = X_1 \dot{+} X_2, \mathbf{R}^n = Y_1 \dot{+} Y_2 \quad (X_k = P_k \mathbf{R}^n, Y_k = Q_k \mathbf{R}^n);$$

$$A(X_k) \subset Y_k, B(X_k) \subset Y_k, k = 1, 2.$$

Подпространства X_2, Y_2 в свою очередь раскладываются в прямые суммы подпространств

$$X_2 = X_{20} \dot{+} X_{21}, Y_2 = Y_{20} \dot{+} Y_{21}. \quad (2.1)$$

Подпространство X_{20} совпадает с аннулятором матрицы A и имеют место следующие соотношения

$$AX_{21} = Y_{20},$$

$$BX_{2i} = Y_{2i}, i = 1, 2.$$

Подробнее о разложении (2.1) см. [11].

Пусть $P_{2i} : X \rightarrow X_{2i}, Q_{2i} : Y \rightarrow Y_{2i}, i = 0, 1$ - проекторы, отвечающие разложению (2.1). Очевидно, что выполняются соотношения $P_2 = P_{20} + P_{21}, Q_2 = Q_{20} + Q_{21}$. О построении проекторов P_{2i}, Q_{2i} изложено в [12].

По определению функция $f(t, x) : [t_0, T] \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ и пучок $\lambda A + B$ *частично спектрально согласованы*, если для $\forall t \in [t_0, T] x \in \mathbf{R}^n$ выполняются условия

$$Q_{21}(f(t, x) - f(t, P_{21}x)) = 0. \quad (2.2)$$

Заметим, что данное условие является более слабым, чем условие спектральной согласованности в [11].

Пусть

$$G = Q_1 A + Q_2 B \quad (2.3)$$

- нормализующий оператор, введенный в [9]. У этого оператора существует обратный G^{-1} .

Будем говорить, что выполняется условие собственной фазовой согласованности начальных данных (t_0, x_0) с уравнением (1.1), если $x_0 \in \mathbf{R}^n$ и

$$Q_{21}(Gx_0 - f(t_0, x_0)) = 0. \quad (2.4)$$

Далее скажем, что выполняется условие корневой фазовой согласованности начальных данных (t_0, x_0) с уравнением (1.1), если $x_0 \in \mathbf{R}^n$, существуют

частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}(t_0, x_0)$ и $\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x_0)$, оператор

$[\frac{\partial Q_{21}f}{\partial x}(t_0, x_0)G^{-1} - Q_{21}] : Y_{21} \rightarrow Y_{21}$ обратим и выполняется равенство

$$Q_{20}(Gx_0 - f(t_0, x_0)) = AG^{-1}(\frac{\partial Q_{21}f}{\partial x}(t_0, x_0)G^{-1} - Q_{21})^{-1} \frac{\partial Q_{21}f}{\partial t}(t_0, x_0). \quad (2.5)$$

Теорема 2.1 *Предположим, пучок $\lambda A + B$ регулярен, частично спектрально согласован в смысле (2.2) с правой частью уравнения (1.1) $f(t, x) \in C([t_0, T] \times \mathbf{R}^n; \mathbf{R}^n)$ и выполняется оценка (1.9). Пусть далее выполняются условия (2.4), (2.5) фазовой согласованности начальных данных (t_0, x_0) с уравнением (1.1). Пусть, наконец, выполняются условия*

- 1⁰ $\|Q_1(f(t, G^{-1}x_1) - f(t, G^{-1}x_2))\| \leq L_1 \|x_1 - x_2\| \forall t \in [t_0, T] \forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n$,
- 2⁰ $\|Q_{20}(f(t, G^{-1}x_1) - f(t, G^{-1}x_2))\| \leq L_2 \|x_1 - x_2\| \forall t \in [t_0, T] \forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n$,
- 3⁰ $Q_{21}f(t, x) \in C^1([t_0, T] \times \mathbf{R}^n)$, $\|\frac{\partial Q_{21}f}{\partial x}(t, x)G^{-1}\| \leq L_3 \forall t \in [t_0, T] \forall x \in \mathbf{R}^n$,

с некоторыми постоянными $L_1, L_2 < 1, L_3 < 1$.

Тогда существует единственное решение $x(t)$ задачи (1.1), (1.2), определенное на всем отрезке $[t_0, T]$.

Доказательство

Сделаем в уравнении (1.1) замену

$$x = G^{-1}y \quad (2.6)$$

и подействуем на уравнение проекторами Q_1, Q_{20}, Q_{21} . Воспользовавшись свойством частичной спектральной согласованности и обозначив

$$y_1 = Q_1 y, y_{20} = Q_{20} y, y_{21} = Q_{21} y, \quad (2.7)$$

получим эквивалентную уравнению (1.1) систему уравнений:

$$\frac{dy_1(t)}{dt} + BG^{-1}y_1(t) = Q_1 f(t, G^{-1}y(t)), \quad (2.8)$$

$$\frac{d}{dt}(AG^{-1}y_{21}(t)) + y_{20}(t) = Q_{20}f(t, G^{-1}y(t)), \quad (2.9)$$

$$y_{21}(t) = Q_{21}f(t, G^{-1}y_{21}(t)). \quad (2.10)$$

С учетом замены (2.6) и обозначений (2.7) начальное условие (1.2) запишется в виде

$$y_1(t_0) = Q_1 Gx_0, \quad (2.11)$$

$$y_{20}(t_0) = Q_{20} Gx_0, \quad (2.12)$$

$$y_{21}(t_0) = Q_{21} Gx_0, \quad (2.13)$$

Полученная таким образом начальная задача (2.8), (2.9), (2.10), (2.11), (2.12), (2.13) будет эквивалентна исходной задаче Коши (1.1), (1.2). В силу условия 3^0 теоремы отображение $Q_{21}f(t, G^{-1}\bullet)$ является сжимающим в $C([t_0, T]; Y_{21})$. Значит для любого t из $[t_0, T]$ существует единственная точка $g(t)$ в подпространстве Y_{21} , для которой выполняется равенство

$$g(t) = Q_{21}f(t, G^{-1}g(t)), \quad (2.14)$$

причем функция $g(t)$ непрерывна на $[t_0, T]$. В силу условий собственной фазовой согласованности (2.4) и частичной спектральной согласованности (2.2) равенство (2.14) при $t = t_0$ должно выполняться для $Q_{21}Gx_0$. Следовательно, в силу единственности неподвижной точки отображения $Q_{21}f(t_0, G^{-1}\bullet)$ выполняется равенство $g(t_0) = Q_{21}Gx_0$.

В силу условия 3^0 теоремы функция

$$H(t, y_{21}) = y_{21} - Q_{21}f(y, G^{-1}y_{21})$$

является непрерывно дифференцируемой по совокупности переменных, а её производная

$$\frac{\partial H}{\partial y_{21}} = E_{Y_{21}} - Q_{21} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)G^{-1} : Y_{21} \rightarrow Y_{21}$$

- ограниченно обратимый на Y_{21} оператор. Полученная функция $g(t)$ - непрерывна и удовлетворяет условию $H(t, g(t)) \equiv 0$. Следовательно, по теореме о неявной функции (теорема 28,1⁰, [13], стр. 305), функция $g(t)$ - непрерывно дифференцируема на $[t_0, T]$. Функция $AG^{-1}g(t)$ также непрерывно дифференцируема. Таким образом $g(t)$ является единственным решением начальной задачи (2.10), (2.13).

Подставляя в уравнение (2.9) вместо y_{21} полученную функцию $g(t)$ и перенося первое слагаемое в правую часть, получим уравнение

$$y_{20}(t) = Q_{20}f(t, G^{-1}y(t)) - \frac{d}{dt}(AG^{-1}g(t)). \quad (2.15)$$

Проинтегрировав уравнение (2.8) по t , сложив полученное уравнение с уравнением (2.15), и подставляя $g(t)$ вместо $y_{21}(t)$ получим новое уравнение относительно $z = y_1 + y_{20}$:

$$z(t) = \Phi(z(t)) = Q_1 G x_0 + \int_{t_0}^t Q_1 f(t, G^{-1}(z(\tau) + g(\tau))) d\tau - \int_{t_0}^t B G^{-1} Q_1 z(\tau) d\tau + Q_{20} f(t, G^{-1}(z(t) + g(t))) - \frac{d}{dt} (A G^{-1} g(t)). \quad (2.16)$$

Определенное таким образом отображение $\Phi(z)$ переводит пространство функций $C([t_0, t_0 + \delta]; Y_1 \dot{+} Y_{20})$ в себя для $\delta \leq T - t_0$, при чем

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_C \leq (\delta(L_1 + \|B G^{-1} Q_1\|) + L_2) \|u - v\|_C.$$

Выберем такое δ , чтобы выполнялось неравенство $\delta < \frac{1 - L_2}{L_1 + \|B G^{-1} Q_1\|}$. В этом случае отображение $\Phi(z)$ является сжимающим на $C([t_0, t_0 + \delta]; Y_1 \dot{+} Y_{20})$. Тогда существует единственная функция $z(t)$, непрерывная на $[t_0, t_0 + \delta]$, такая, что $\Phi(z) = z$.

Если $t_0 + \delta < T$, то мы однозначно продолжаем полученную функцию $z(t)$ на интервал $[t_0 + \delta, t_0 + \delta_1]$, где $\delta_1 = \min(2\delta, T - t_0)$. Для этого, рассуждая, как и выше, мы находим неподвижную точку z_1 отображения

$$\Phi_1(z_1(t)) = Q_1 z(t_0 + \delta) + \int_{t_0 + \delta}^t Q_1 f(t, G^{-1}(z_1(\tau) + g(\tau))) d\tau - \int_{t_0 + \delta}^t B G^{-1} Q_1 z_1(\tau) d\tau + Q_{20} f(t, G^{-1}(z_1(t) + g(t))) - \frac{d}{dt} (A G^{-1} g(t)),$$

действующего в $C([t_0 + \delta, t_0 + \delta_1]; Y_1 \dot{+} Y_{20})$.

За конечное число шагов мы однозначно продолжим решение $z(t)$ уравнения (2.16) непрерывно на весь отрезок $[t_0, T]$. Подставляя полученное решение в (2.16) и действуя на полученное тождество проектором Q_1 , получим равенство

$$Q_1 z(t) = Q_1 G x_0 + \int_{t_0}^t Q_1 f(t, G^{-1}(z(\tau) + g(\tau))) d\tau - \int_{t_0}^t B G^{-1} Q_1 z(\tau) d\tau,$$

из которого следует, что проекция полученного решения $Q_1 z(t)$ непрерывно дифференцируема на $[t_0, T]$, при чем $Q_1 z(t_0) = Q_1 G x_0$.

Проекция $Q_{20} z(t)$ является единственной точкой в подпространстве Y_{20} , для которой при $t = t_0$ выполняется равенство

$$Q_{20} z(t_0) = Q_{20} f(t_0, G^{-1}(z(t_0) + g(t_0))) - \frac{d}{dt} (A G^{-1} g(t)) \Big|_{t_0} =$$

$$= Q_{20}f(t_0, G^{-1}(Q_1Gx_0 + Q_{20}z(t_0) + Q_{21}Gx_0)) - \\ - A(G^{-1} - \frac{\partial Q_{21}f}{\partial x}(t_0, x_0))^{-1}(Q_{21} \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x_0)).$$

Следовательно, принимая во внимание условие корневой фазовой согласованности (2.5) и начальное условие (2.12), делаем вывод, что выполняется равенство $Q_{20}z(t_0) = Q_{20}Gx_0$.

Функции $Q_1z(t)$, $Q_{20}z(t)$, $g(t)$ являются единственным решением начальной задачи (2.8), (2.9), (2.10), (2.11), (2.12), (2.13). Следовательно, функция $x(t) = G(z(t) + g(t))$ является единственным решением исходной задачи Коши (1.1), (1.2).

Теорема доказана.

3 Численный метод

Для уравнения, удовлетворяющего условиям теоремы 2.1, предлагается численный метод решения на отрезке $[t_0, T]$. Отрезок $[t_0, T]$ разобьем на N равных частей с шагом h точками $t_k = t_0 + hk, k = 0..N, t_N = T$. Решение задачи (1.1), (1.2) будем искать в точках t_k в следующем виде

$$x = G^{-1}y, y = y_1 + y_{20} + y_{21},$$

где компоненты $y_1, y_{20}, y_{21} \in \mathbf{R}^n$ определяются соотношениями (2.7), а G^{-1} -- матрица, обратная к G (2.3). Векторы y_1, y_{20}, y_{21} являются решением системы уравнений (2.8), (2.9), (2.10), (2.11), (2.12), (2.13).

Обозначим $y_{1,k} = y_1(t_k)$, $y_{20,k} = y_{20}(t_k)$, $y_{21,k} = y_{21}(t_k)$. Заметим, что $y_{1,0}$, $y_{20,0}$, $y_{21,0}$ определяются из условий (2.11), (2.12), (2.13). Из условия 3⁰ теоремы следует, что функция $Q_{21}f(t, G^{-1}y_{21})$ является сжимающей по y_{21} равномерно по t . По этому значения $y_{21,k}$ при $k = 1..N$ находятся с помощью метода простой итерации

$$y_{21,k}^{i+1} = Q_{21}f(t_0 + hk, G^{-1}y_{21,k}^i), \quad (3.1)$$

где i - номер итерации. В качестве начального приближения целесообразно брать значение y_{21} в предыдущей точке $y_{21,i}^0 = y_{21,i-1}$.

Заменив в (2.8) конечной разностью производную

$$\frac{d}{dt}y_1(t_0) \approx \frac{y_{1,1} - y_{1,0}}{h}, \quad (3.2)$$

$$\frac{d}{dt}y_1(t_k) \approx \frac{y_{1,k+1} - y_{1,k-1}}{2h}, k = 1..N, \quad (3.3)$$

получим соответственно соотношения для определения $y_{1,1}$ и $y_{1,k}$, $k = 2..N$:

$$y_{1,1} = y_{1,0} + h(Q_1f(t_0, G^{-1}(y_{1,0} + y_{20,0} + y_{21,0})) - \\ - Q_1BG^{-1}(y_{1,0} + y_{20,0} + y_{21,0})),$$

$$y_{1,k} = y_{1,k-2} + 2h(Q_1 f(t_0 + kh, G^{-1}(y_{1,k-1} + y_{20,k-1} + y_{21,k-1})) - Q_1 B G^{-1}(y_{1,k-1} + y_{20,k-1} + y_{21,k-1})).$$

Используем приближение (3.3) для определения $y_{1,k}$ при $k > 1$, так как оно имеет точность более высокого порядка $o(h^2)$, по сравнению с приближением (3.2), имеющим точность $o(h)$.

Сделав аналогичную замену в (2.10)

$$\frac{d}{dt} y_{21}(t_k) \approx \frac{y_{21,k+1} - y_{21,k-1}}{2h}, \quad k = 1..N-1,$$

$$\frac{d}{dt} y_{21}(T) \approx \frac{y_{21,T_N} - y_{21,T_N-1}}{h},$$

получим следующие соотношения для определения $y_{20,k}$, $k = 1..N-1$, и $y_{1,N}$:

$$y_{20,k} = Q_{20} f(t_0 + kh, G^{-1}(y_{1,k} + y_{20,k} + y_{21,k})) - Q_{20} A G^{-1} \frac{y_{21,k+1} - y_{21,k-1}}{2h}, \quad k = 1..N-1 \quad (3.4)$$

$$y_{20,N} = Q_{20} f(T, G^{-1}(y_{1,N} + y_{20,N} + y_{21,N})) - Q_{20} A G^{-1} \frac{y_{21,N} - y_{21,N-1}}{h}. \quad (3.5)$$

В силу условия 2^0 теоремы функция $Q_{20} f(t_0 + kh, G^{-1}(y_{1,k} + y_{20,k} + y_{21,k}))$, $k = 1..N$, является сжимающим по $y_{20,k}$ отображением. Следовательно, соотношения (3.4),(3.5) единственным образом определяют $y_{20,k}$, $k = 1..N$. В качестве начального приближения, как и в (3.1) целесообразно брать значение y_{20} в предыдущей точке $y_{20,i}^0 = y_{20,i-1}$.

Полученные таким образом значения $y_{1,k}$, $y_{20,k}$, $y_{21,k}$ определяют приближенное численное решение задачи (1.1),(1.2)

$$x(t_k) = G^{-1}(y_{1,k} + y_{20,k} + y_{21,k}), \quad k = 1..N.$$

4 Пример электрической цепи

Вернёмся к системе дифференциально-алгебраических уравнений (1.8), описывающей состояния элементов передающего электрического четырехполюсника, изображенного на рисунке 1.1, и построим для неё численное решение.

Проекторы P_{2k} , Q_{2k} ищутся в виде

$$P_{20}x = (x, f_0)\varphi_0, \quad P_{21}x = (x, f_1)\varphi_1,$$

$$Q_{20}y = (y, g_0)\psi_0, \quad Q_{21}y = (y, g_1)\psi_1,$$

где φ_k, g_k -- собственные и присоединенные векторы операторных пучков $\lambda A + B$, $\lambda A^* + B^*$ в точке $\lambda = \infty$ соответственно, $\psi_k = B\varphi_k$, $f_k = B^*g_k$, $k = 0, 1$, см. [12].

В данном случае указанные векторы имеют следующий вид:

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \varphi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{C_2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \psi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \psi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{C_2} \end{pmatrix},$$

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ C_2 \end{pmatrix}, g_0 = \begin{pmatrix} \frac{C_2}{C_1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f_1 = \begin{pmatrix} C_2 \\ C_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{C_2}{C_1} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Спектральные проекторы имеют следующий вид:

$$P_{20} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C_2}{C_1} & 1 \end{pmatrix}, P_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{C_2}{C_1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_{20} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{C_2}{C_1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{C_2}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нормализующая и обратная к ней матрицы имеют следующий вид:

$$G = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ -C_2 & 0 & \frac{C_2}{C_1} & 1 \\ 0 & 0 & L & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 \\ \frac{C_2}{C_1} & 1 & -\frac{C_2}{C_1 L} & 0 \end{pmatrix}.$$

Для данной системы уравнений выполняется условие частичной спектральной согласованности (2.2), так как вектор-функция $Q_{21}f(t, x) = (0, 0, 0, u_-(t))^T$ не зависит от x . Отметим, что условие полной спектральной согласованности из [11] в данном случае не выполняется и, следовательно, соответствующая теорема разрешимости не применима.

Условия собственной (2.4) и корневой (2.5) фазовой согласованности имеют вид

$$\begin{aligned} u_1(t_0) + u_2(t_0) &= u_-(t_0), \\ \frac{C_2}{C_1} i_L(t_0) + i_R(t_0) &= \frac{C_2}{C_1} (i_-(t_0) - F_1(t_0, u_1(t_0))) + \\ &+ i_-(t_0) - F_2(t_0, u_2(t_0)) - C_2 \dot{i}_-(t_0). \end{aligned}$$

Очевидно, что они представляют собой одно из уравнений Кирхгофа, записанное в начальный момент времени. Следовательно, собственная и корневая фазовые согласованности имеют физический смысл.

Примем

$$C_1 = 1 \text{ нФ}, C_2 = 1 \text{ пФ}, L = 10 \text{ нГн},$$

$$F_1(t, x) = 0.1x + 0.01 \sin(0.1x),$$

$$F_2(t, x) = 0.1x + 0.01 \sin(0.1x),$$

$$F_L(t, x) = 0.1x + 0.01 \sin(0.1x),$$

$$u_-(t) = \cos(2\pi\phi t), i_-(t) = \cos(2\pi\phi t), \phi = 100 \text{ кГц}.$$

Легко убедиться, что условия $1^0 - 3^0$ теоремы 2.1 выполнены. Построим численное решение на отрезке времени $t \in [0, 100]$ нс на сетке с шагом $h = 0.1$ нс. В качестве начальных данных примем

$$u_1(0) = 0.0000001,$$

$$u_2(0) = u_-(0) - u_1(0) = 0.9999999,$$

$$i_L(0) = i_-(0) - F_1(0, u_1(0)) = 0.9999999899,$$

$$i_R(0) = i_-(0) - F_2(0, u_2(0)) - C_2 \dot{i}_-(0) = 0.8990016759.$$

Ниже приведены графики полученных решений.

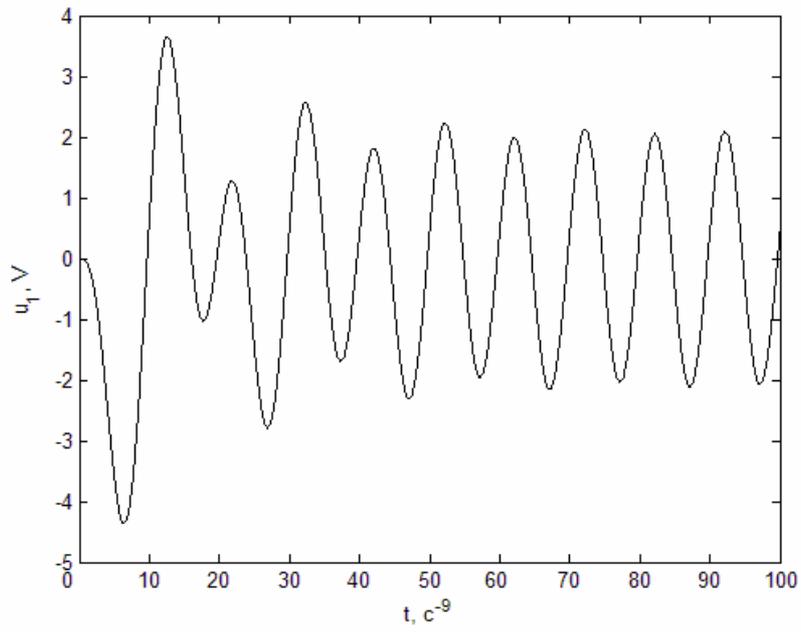


Рис.4.1.График $u_1(t)$.

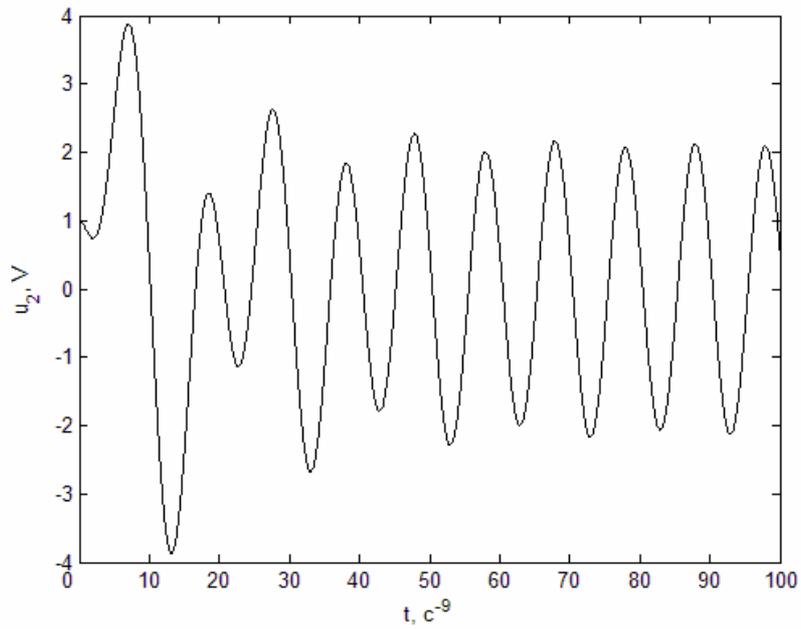


Рис.4.2.График $u_2(t)$.

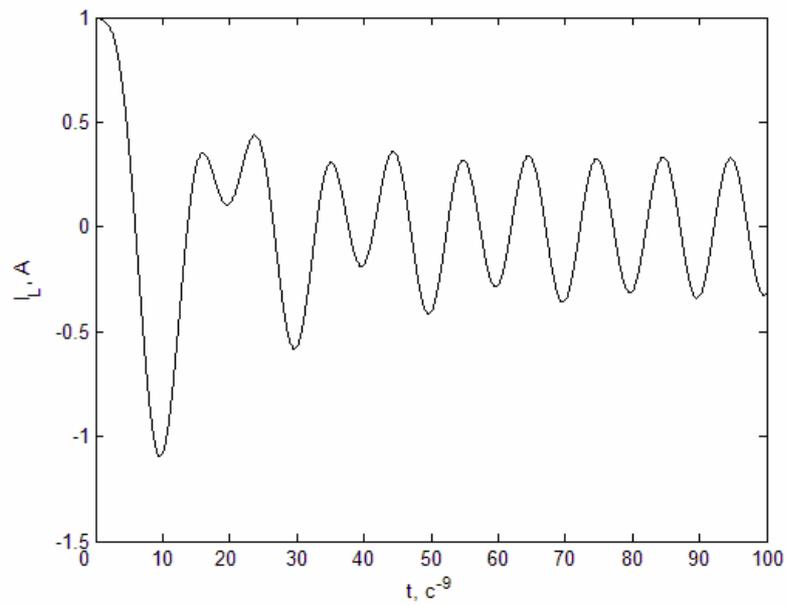


Рис.4.3.График $i_L(t)$.

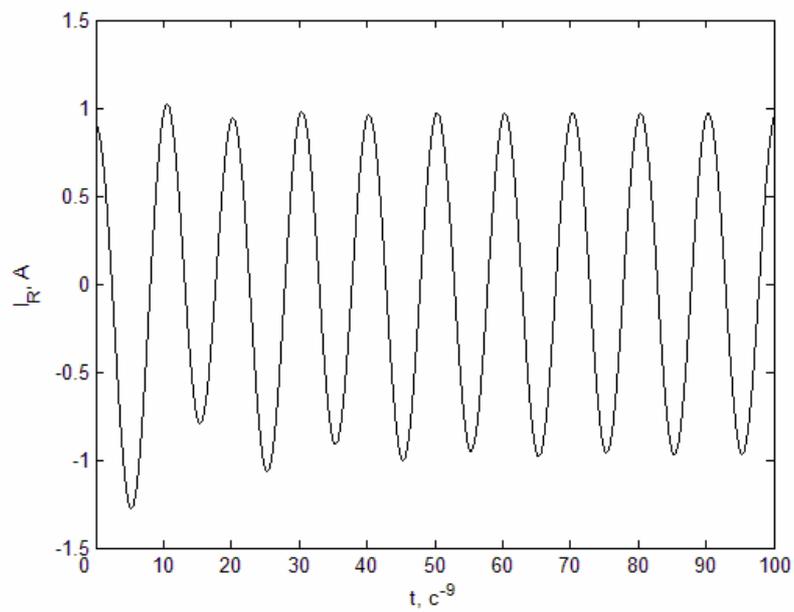


Рис.4.4.График $i_R(t)$.

5. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

В работе получена нелокальная теорема существования и единственности решения задачи Коши (1.1), (1.2). Для указанной задачи построен численный метод решения. Данный метод применён для расчёта одной электрической цепи. Полученный метод сходится в проведенном численном эксперименте, однако

строгое доказательство сходимости является предметом отдельного исследования.

В дальнейшем можно обобщить полученную теорему на более общий случай бесконечномерных банаховых пространств и неограниченных операторов A, B . Также планируется обобщить теорему на случай оценки резольвенты $\|(\lambda A + B)^{-1}\| \leq C |\lambda|^{-n}$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Campbell S.L. Singular Systems of Differential Equations.-Pitman, 1980.-p.176.
2. Marz R. On linear differential-algebraic equations and linearizations // Applied Numerical Mathematics.-1994.-v.1.-p. 279-292.
3. Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями: Навч. посіб.- К.: Вища шк., 2000.- 294 с.
4. Руткас А.Г. Задача Коши для уравнения $A \frac{dx}{dt} + Bx(t) = f(t)$ // Дифференциальные уравнения.-1975.-т.11, № 11. – С.1996-2010.
5. Favini A., Plazzi P. Some results concernong the abstract nonlinear equation $D_t Mu(t) + Lu(t) = f(t, Ku(t))$ // Circuits, Systems, Signal Proceccing. 1986.- p.261-274.
6. Rutkas A. The solvability of a nonlinear differential equation in a Banach space // Spectral and evolutional problems. Proceedings of Sixth Crimean Fall Mathematical School-Symposium (Simferopol).-1996.-v.6.-p.317-320.
7. Favini A., Rutkas A. Existence and uniqueness of solution of some abstract degenerate nonlinear equation // Differential Integral Equations.-1999.-v.4, № 12.- p.373-394.
8. Rutkas A.G., Vlasenko L.A. Existence of solutions of degenerate nonlinear differential operator equations // Nonlinear Oscilations.-2001.-v.4, № 12.-p.252-263.
9. Власенко Л.А. Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями.-Днепропетровск:Системные технологии, 2006.-273с.
10. Радбель Н.И. О начальном многообразии и диссипативности задачи Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = 0$ // Дифференциальные уравнения.-1979.- т.15, № 6.
11. Руткас А.Г., Худошин И.Г. Глобальная разрешимость одного вырожденного полулинейного дифференциально-операторного уравнения // Нелінійні коливання.-2004.-т.7, № 3.-с.414-429.
12. Худошин И.Г. Начальная задача для некоторых квазилинейных дифференциально-алгебраических уравнений // Вісник Харківського універстету. Серія "Математика, прикладна математика і механіка.-1999.- № 458.-с.159-164.
13. Шварц Л. Анализ, Том 1.- М.: Мир, 1972.-824 с.