Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
№ 847, 2009, с.79-86

УДК 539.3

Исследование динамических характеристик лопастей рабочих колес поворотно-лопастных гидротурбин при взаимодействии с жидкостью

Е. В. Ганчин, И. Е. Ржевская, Е. А. Стрельникова
Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Украина

The mathematical model to solve the mechanical boundary value problems of complicated deformable body at interaction with a fluid is formulated. The effective method of numerical solution for this problem is elaborated and applied to investigate dynamic characteristics of water wheel blades of Kaplan hydraulic turbines.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

В связи с выработкой ресурса многих гидротурбин в Украине, при их модернизации возникает вопрос о продлении срока службы их отдельных узлов и деталей и замене морально и физически устаревшего оборудования при повышении мощности и эксплуатационной надежности гидротурбин. Оценка эффективности и объема реконструкции требует высокоточных и оперативных методик и программ исследования прочности и динамики конструкций узлов гидротурбин при различных режимах эксплуатации.

Изучению свободных колебаний конструкций, взаимодействующих с жидкостью, посвященное большое количество публикаций. Группой исследователей во главе с Бажановым В.Г. [1] создан комплекс программ решения связанной задачи гидроупругости для плоских двухмерных и осесимметричных объектов. В роботах Постнова В.А. [2] предложена вариационная формулировка проблемы взаимодействия упругих элементов конструкций с жидкостью. В публикациях Гонткевича В.С. [3], Горелова Д.Н. [4], Ткачевой Л.А. [5], Чена, Хонга [6] изучаются колебания отдельных элементов гидротурбины, при этом делаются такие предположения: применяется гипотеза о совпадении форм собственных колебаний в вакууме и жидкости; с помощью гипотезы цилиндрических сечений пространственная задача обтекания лопасти сводится к двухмерной. В указанных работах даны постановки задач гидроупругих колебаний лопастей турбомашин и винтов в трехмерной постановке, но численные исследования не проведены.

В данной работе поставлены и решены следующие основные научно-технические задачи:

– сформулирована математическая модель решения краевых задач механики деформируемого твердого тела в областях сложной формы при взаимодействии с жидкостью;

– разработан эффективный метод численного решения задачи определения частот и форм свободных колебаний конструкций, которые взаимодействуют с водой; обоснована целесообразность сведения задач определения присоединенных масс жидкости к гиперсингулярным интегральным уравнениям;

– построенный метод применен к исследованию динамических характеристик лопастей рабочих колес поворотно-лопастных (ПЛ) гидротурбин.

Предлагаемая тема представляется актуальной как в теоретическом, так и практическом отношениях.

2. Математическая модель.

В работе [7] приводятся основные соотношения, позволяющие построить матрицу присоединенных масс конструкции при одностороннем контакте ее деформируемых элементов с жидкостью. В данной работе приведем алгоритм построения матрицы присоединенных масс для определения частот и форм колебаний упругой конструкции при двустороннем контакте ее поверхностей с жидкостью, что более адекватно описывает процессы, происходящие в элементах конструкций.

Систему уравнений движения деформируемой конструкции символически запишем в виде

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{M}(\mathbf{U}) = \mathbf{p}\ , \tag{1}$$

где **L**, **M** – операторы упругих и массовых сил; **p** – давление жидкости на рассматриваемый элемент конструкции (лопасть), $\mathbf{U}=(u_1,\ u_2,\ w)^T$ – вектор-функция перемещений. Отметим, что $\mathbf{p} = (0,0,P)^T$ вследствие того, что идеальная жидкость создает только нормальное давление на погруженном теле.

Скорость набегающего потока принимается равной нулю, так как ее реальные значения практически не влияют на частоты. Движение жидкости изучается в трехмерной постановке методами теории потенциала. Предполагается, что жидкость идеальная; свободные вихри не образуются и не сходят с несущей поверхности. В таком случае существует потенциал скоростей, удовлетворяющий всюду вне деформируемой поверхности гармоническому уравнению, а на ее лицевых поверхностях $S^{\pm}$ – условию непротекания.

При безвихревом течении возмущенная скорость жидкости представляется в виде

$$\mathbf{v}(x,y,z,t) = \mathrm{grad}\Phi(x,y,z,t)\ , \tag{2}$$

где $\Phi(x,y,z,t)$ – потенциал скоростей, индуцированных малыми свободными колебаниями поверхности. Для определения давления жидкости на смоченные поверхности служит интеграл Коши-Лагранжа, который в рассматриваемом случае может быть записан в следующем виде:

$$P = -\rho_2\left[\frac{\partial\Phi^{+}(x,y,z,t)}{\partial t} - \frac{\partial\Phi^{-}(x,y,z,t)}{\partial t}\right], \tag{3}$$

где ρ_2 – плотность жидкости.

Для нахождения давления жидкости на деформируемую поверхность необходимо определить функцию $\Phi(x,y,z,t)$, решая уравнение Лапласа при следующем граничном условии:

$$\left(grad\Phi\cdot\mathbf{n}\right)\Big|_S=\frac{\partial w}{\partial t}, \tag{4}$$

где **n** – внешняя нормаль к пластине. Правая часть здесь представляет собой скорость нормального перемещения w деформируемого элемента.

Таким образом, требуется определить функции **U**, $\Phi(x,y,z,t)$, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений (1)-(3), условиям непротекания (4), закрепления конструкции и затухания возмущенной скорости жидкости на бесконечности. Для определения вектор функции **U** используем метод заданных форм.

3. Метод заданных форм.

Дадим описание метода заданных форм применительно к задачам об упругих колебаниях элементов конструкций в жидкости.

Рассмотрим задачу о малых гармонических колебаниях упругой конструкции в воде. Представим вектор **U** в форме $\mathbf{U}=\mathbf{u}e^{i\Omega t}$, где Ω – частота, а **u** – собственная форма колебаний в жидкости.

Будем искать собственные формы колебаний в жидкости в виде ряда

$$\mathbf{u}=\sum_{k=1}^{N}c_k\mathbf{u}_k\ , \tag{5}$$

где $\mathbf{u}_k$ – собственные формы колебаний в вакууме, c_k – неизвестные коэффициенты.

Имеют место следующие соотношения:

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}_k)=\Omega_k^2\mathbf{M}(\mathbf{u}_k),\quad (\mathbf{M}(\mathbf{u}_k),\mathbf{u}_j)=\delta_{kj}\ .$$

Следовательно,

$$(\mathbf{L}(\mathbf{u}_k),\mathbf{u}_j)=\Omega_k^2\delta_{kj}\ .$$

Здесь Ω_k – k-ая частота собственных колебаний в вакууме. Эти соотношения показывают, что собственные формы колебаний в вакууме ортонормированны по матрице масс.

В соответствии с формулой (3) в случае гармонических колебаний величина P может быть представлена следующим образом

$$P=-\rho_2\frac{\partial\left(\Phi^+-\Phi^-\right)}{\partial t}=-i\rho_2\Omega\left(\varphi^+-\varphi^-\right)e^{i\Omega t}\ ,$$

где $\Phi=\varphi e^{i\Omega t}$.

Таким образом, система уравнений задачи и граничные условия запишутся в виде

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) + \mathbf{M}(\mathbf{u}) = \left(0,0,i\Omega\rho_2\left(\varphi^- - \varphi^+\right)\right), \quad \nabla^2\varphi = 0\,; \tag{6}$$

$$\nabla\varphi \to 0(r \to \infty)\ ; \quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{S^\pm} = i\Omega w\,.$$

Пусть S –рассматриваемая деформируемая поверхность, погруженная в жидкость. Представим функцию $\varphi(x)$ в виде потенциала двойного слоя с неизвестной плотностью $\Gamma(\xi)$, $\xi \in S$:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \Gamma(\xi)\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}_\xi}\left[\frac{1}{|\mathbf{x}-\xi|}\right]dS_\xi\,. \tag{7}$$

Известно , что $\varphi^+ - \varphi^- = \Gamma$, т.е. перепад давления пропорционален плотности потенциала $\mathbf{\Gamma}$.

Вычисляя нормальную производную потенциала двойного слоя (7) и подставляя полученное выражение в граничные условия (6), приходим к гиперсингулярному интегральному уравнению

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S \Gamma(\xi)\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{n}_x\partial\mathbf{n}_\xi}\left[\frac{1}{|\mathbf{x}-\xi|}\right]dS_\xi = i\Omega w\,. \tag{8}$$

В силу (5) имеем

$$w = \sum_{k=1}^{N} c_k w_k\,.$$

Пусть функции $\Gamma_k(\xi)$ являются решениями гиперсингулярного уравнения (8) с соответствующим образом выбранными правыми частями:

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S \Gamma_k(\xi)\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{n}_x\partial\mathbf{n}_\xi}\left[\frac{1}{|\mathbf{x}-\xi|}\right]dS_\xi = w_k\,.$$

Удобно записать формальное равенство

$$\Gamma_k(\mathbf{x}) = \mathbf{H}(w_k),$$

где $\mathbf{H}$ – обратный к определенному в (8) интегральному оператору. Подставим соотношение (5) в (4) и умножим полученные равенства скалярно на w_j. Приходим к проблеме собственных значений

$$c_j\Omega_j^2 = \Omega^2\sum_{k=1}^{N} c_k\left[\delta_{kj} + \left(\mathbf{H}(w_k)\cdot w_j\right)\right]. \tag{9}$$

Из (9) находим частоты Ω колебаний в жидкости, а, зная коэффициенты c_k, по формуле (5) находим формы колебаний в жидкости. Построенную в (9) матрицу $P_{kj} = \left(\mathbf{H}\left(w_k\right)\cdot w_j\right)$ называют матрицей присоединенных масс жидкости.

4. Численное определение элементов матрицы присоединенных масс жидкости.

Из вышеизложенного следует, что

$$\left(\mathbf{H}\left(w_k\right)\cdot w_j\right) = \left(\Gamma_k \cdot w_j\right).$$

Таким образом, для нахождения элементов матрицы присоединенных масс необходимо решить гиперсингулярное интегральное уравнение (8) с правыми частями в виде w_j .

Для решения уравнения (8) применен метод граничных элементов . Область интегрирования разбивалась на конечное число четырехугольных подобластей N_S, в каждой из которых неизвестная плотность заменялась постоянной величиной. При вычислении конечной части по Адамару для интегралов в (8) по четырехугольнику, произвольно ориентированному в пространстве, использована формула, полученная в [7].

Элементы матрицы присоединенных масс находились по формуле

$$P_{ik} = \iint\limits_S \Gamma_i\left(\mathbf{x}\right) w_k\left(\mathbf{x}\right) dS\ ,$$

где $\Gamma_i\left(\mathbf{x}\right)$– амплитудные значения давления, индуцированного собственной формой $w_k\left(\mathbf{x}\right)$. После определения элементов матрицы присоединенных масс решается задача на собственные значения, описанная уравнением (9), по методу, разработанному в [7].

5. Анализ результатов.

Лопасть рабочего колеса ПЛ гидротурбины состоит из пера лопасти и фланца; переход между их поверхностями сглаживают галтели (рис.1).

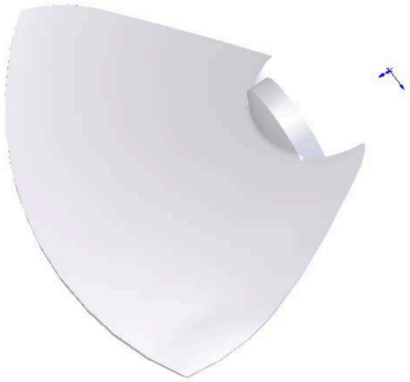


Рис. 1. Общий вид лопасти рабочего колеса ПЛ гидротурбины

Фланец является телом вращения, перо лопасти – оболочкой переменной толщины. Конструкция закреплена по всей торцевой поверхности фланца.

Для определения динамических характеристик лопасти рабочего колеса ПЛ гидротурбины использованы метод конечных элементов [8, 9] для отыскания собственных частот и форм колебаний колеса в вакууме и метод граничных элементов для определения частот гидроупругих колебаний колеса в воде [7,10]. Собственные частоты модели рабочего колеса в воздухе и воде приведены в табл. 1.

Табл.1. Собственные частоты упругих колебаний лопасти в воздухе и воде

Номер часто-ты	Частоты, Гц		Коэффициент снижения частоты	Коэффициент снижения частоты [11]
	в воздухе	в воде		
1	60.105	36,063	0, 600	0, 640
2	82.739	59,324	0, 717	0, 724
3	121.28	87,079	0, 718	0, 735
4	156.27	101,263	0, 648	0, 678

Полученные данные хорошо согласуются с результатами экспериментов [11], проведенных на лопастях такого типа, что подтверждает достоверность предложенной методики.

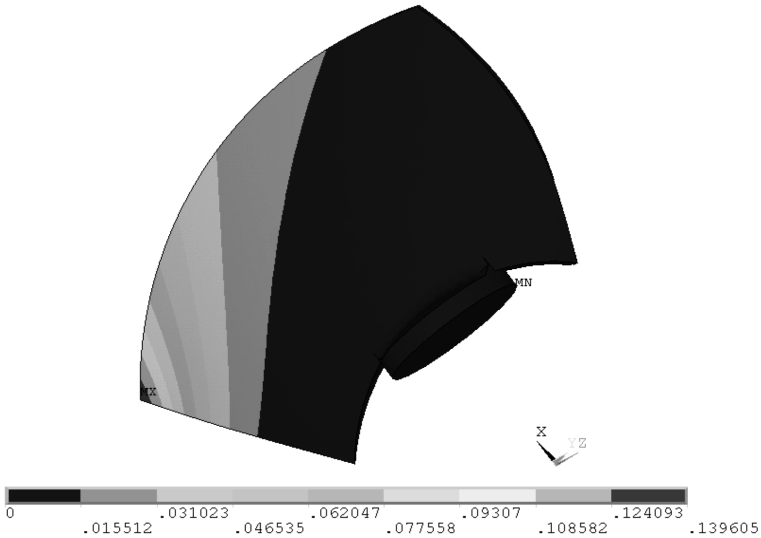
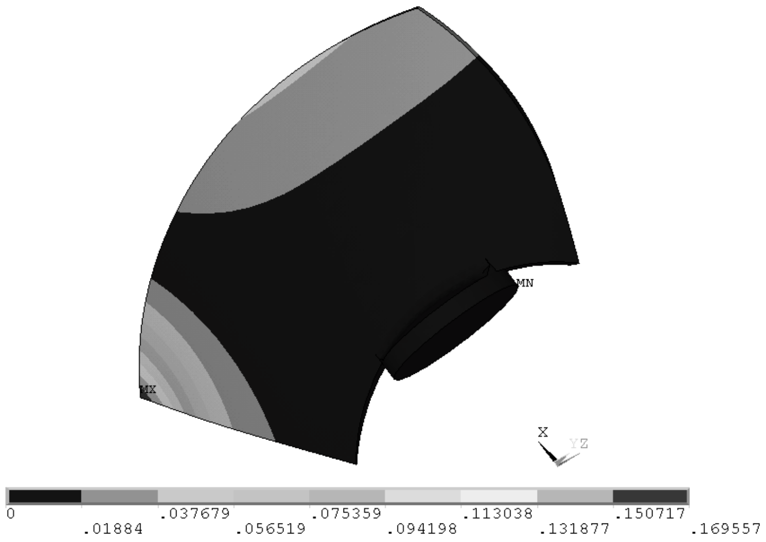
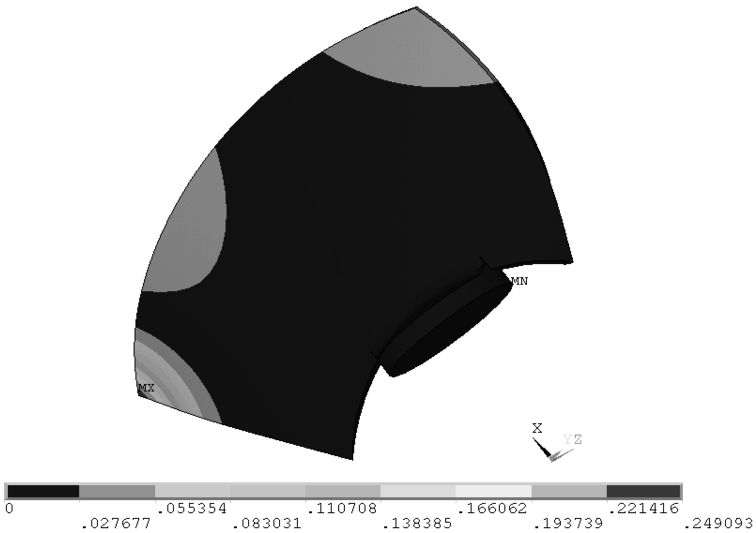


Рис.3.а. Формы колебаний лопасти рабочего колеса: первая форма.

На рис. 3:а и 4:б,в показаны формы колебаний лопасти в воде.



б)



в)

Рис.4. Формы колебаний лопасти рабочего колеса:
б – вторая форма; в – третья форма

Отметим, что формы колебаний в воде и воздухе в рассмотренном диапазоне частот практически совпадают.

6. Выводы.

Применен метод расчета собственных частот и форм гидроупругих колебаний конструкций к элементам гидротурбин. Сочетание метода конечных элементов для расчета собственных колебаний рабочего колеса в вакууме, разложения искомых гидроупругих собственных форм в ряд по собственным формам колебаний рабочего колеса в вакууме и метода граничных интегральных уравнений для отыскания матрицы присоединенных масс воды обладает рядом существенных преимуществ. При этом резко уменьшается размерность задачи (порядок системы алгебраических уравнений), не требуется разработка сложной программы построения трехмерной сетки для конечных элементов воды и снижаются затраты времени на выполнение расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баженов В.Г., Зефиров С.В., Кочетнов А.В., Крылов С.В., Ломунов В.К. ППП «Динамика-2» – вычислительный комплекс для решения двумерных нелинейных задач гидроупругости конструкций // "Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов": Докл. 19 междунар. конф. – СПб: Изд-во НИХ СПб ГУ, 2001. – С. 57–66.
2. Постнов В.А. Новая вариационная формулировка проблемы взаимодействия упругих конструкций с жидкостью // "Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов": Докл. 17 междунар. конф. – СПб: Изд-во НИХ СПб ГУ, 1999. – С. 229–237.
3. Гонткевич В.С. Собственные колебания оболочек в жидкости. – Киев: Наук. думка, 1964. – 102 с.
4. Горелов Д.Н., Гусева Л.А. Колебания лопастей осевых гидротурбин в потоке жидкости // Аэроупругость турбомашин: Материалы 6-го Всесоюз. совещ., Киев, 1977 г. – Киев, 1980. – С. 81–89.
5. Ткачева Л.А. Расчет колебаний лопастей осевых гидротурбин в потоке // Аэроупругость лопаток турбомашин. – 1985. – Вып.3. – С. 308–310.
6. Chen Z., Wang J., Hong L. Three-dimensional numerical analysis of flow-induced vibration in turbomachinery // J. Fluids Eng. – 1999. – Vol. 121, № 4. – P.804–807.
7. Кантор Б.Я., Стрельникова Е.А. Гиперсингулярные интегральные уравнения в задачах механики сплошной среды. – Харьков: Новое слово, 2005. – 252 с.
8. Бате К., Вильсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982.– 445 с.
9. Веремеенко И.С., Кантор Б.Я., Ржевская И.Е. Прочность и собственные колебания рабочих колес радиально-осевых гидротурбин //Пробл. машиностроения. – 1999. – Т. 2, № 1–2. – С. 8–16.
10. Веремеенко И.С., Кантор Б.Я., Стрельникова Е.А.,Ржевская И.Е.,Ганчин Е.В. Прочность, динамика лопастей рабочих колес поворотно-лопастных гидротурбин при взаимодействии с жидкостью// Вестник ХНТУ.-2007.-№2(28).- С.82-86.
11. Явиц С.Н. Исследование частотных характеристик лопастей рабочих колес ПЛ гидротурбин // Энергомашиностроение. – 1970. – № 8. – С.25–28.

Надійшла 05.03.2009.