

О решении краевой задачи для уравнения теплопроводности для системы пересекающихся поверхностей

М. С. Голубева

*Калужский филиал московского государственного технического университета
им. Н.Э. Баумана, Россия.*

The report is devoted to the conduction equation boundary-value problem solution for the system of contacting rectangular plates. This problem solution is an illustration of a modern application of the Fourier method for the graphs. The obtained result is a special, particularly important case of the boundary-value problem solution for the stratificated sets.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

Изучение особенностей распространения тепловых потоков в орбренных системах представляет интерес в связи с необходимостью нахождения оптимального режима работы теплообменников и любой, в том числе электронной аппаратуры, где происходит выделение тепла. Орбрение всегда представляет систему оболочек, контактирующих определенным образом. Поэтому возникает задача изучения теплопередачи не только через стенку, но и вдоль оболочки. Знание температурного поля важно при решении задач термоупругости и теории прочности конструкций. Физико-химические процессы на поверхности оболочки, например, осаждение веществ, образование окислов, фазовые переходы во многом определены распределением температуры.

2. Истоки исследования авторов

С теоретической точки зрения, как это показано в статье, этот случай имеет интересную связь с изучением решений дифференциальных уравнений на графе и с разложением Фурье на графе. Эти вопросы систематически изучаются в школе Покорного и его учеников. Поэтому работа существенно опирается на результаты, полученные в этом коллективе.

3. Нерешенные проблемы и цели работы

Дифференциальные уравнения на сетях – один из сравнительно новых разделов теории дифференциальных уравнений. Теоретические основы этого раздела дифференциальных уравнений представлены в работах [1],[2]. Однако изучение уравнения теплопроводности в этих работах не является приоритетным, поэтому оно исследуется при значительных ограничениях. Методы решения конкретных задач также не описаны в литературе. В этом сообщении предложен метод решения краевых задач для уравнения теплопроводности для системы контактирующих прямоугольных пластин.

4. Математическая модель и решение задачи

Рассмотрим систему N контактирующих прямоугольных пластин представленных на рис.1

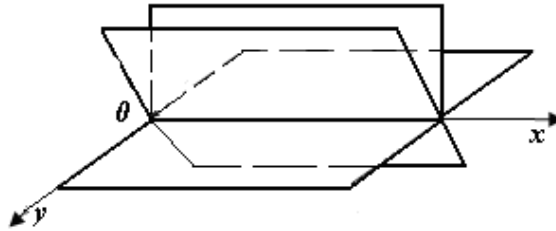


Рис. 1. Система N контактирующих прямоугольных пластин размера $b \times l_i, i = 1, 2, \dots, N$

Ось x направлена и лежит на линии контакта пластин. Ширина пластин (размер вдоль оси x) одинаков и равен b . Занумеруем пластины (ребра), так что $T^{(i)}(x, y)$ температурное поле i -той пластины. Для решения задач можем считать, что все ребра с сохранением граничных условий сведены в положение первого ребра (рис. 2), так что температурные поля различных пластин описываются в единой системе координат x, y

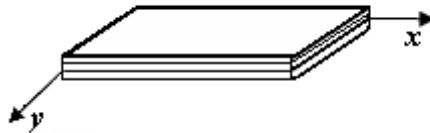


Рис. 2. Все пластины приведены в положение одной из пластин.

Принято, что в каждой пластине уравнение теплопроводности для поля температур $T^{(i)}$

$$\frac{\partial^2 T^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^{(i)}}{\partial y^2} - m^2 T^{(i)} = 0, i = 1, 2, 3. \quad (4.1)$$

учитывает процесс внешнего теплообмена, определенным коэффициентом m^2 . Считаем, что в силу обычной для технических устройств симметрии коэффициент m^2 , включающий коэффициент внешнего теплообмена χ , коэффициент теплопроводности материала ребер k и их толщину d одинаков для всех пластин

$$m^2 = \frac{\chi}{kd} \quad (4.2)$$

Принято, что вдоль линии $y = 0$ должны быть выполнены условия идеального контакта для температур и общего потока:

$$T^{(1)} \Big|_{y=0} = T^{(2)} \Big|_{y=0} = \dots = T^{(N)} \Big|_{y=0}; \quad \sum_{i=1}^N \frac{\partial T^{(i)}}{\partial y} = 0 \quad (4.3)$$

В общем случае на неконтактирующих краях пластин могут быть заданы ненулевые краевые условия. Тогда, как принято, общую краевую задачу можно рассматривать как суперпозицию двух задач: первая задача с нулевыми условиями вдоль краев параллельных оси ox и ненулевыми, параллельными оси oy ; вторая задача – с нулевыми условиями вдоль краев параллельных оси oy и ненулевыми, параллельными оси ox .

Рассмотрим первую задачу, которая представляет особый интерес, ввиду того, что предполагает в своем решении разложение Фурье на графе. В этой задаче нулевые условия третьего рода заданы вдоль ребер, параллельных оси x :

$$\left[\alpha^{(i)} T^{(i)} + \beta^{(i)} \frac{\partial T^{(i)}}{\partial y} \right]_{y=l_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.4)$$

Здесь l_i , $i = 1, 2, 3$ размеры ребра (пластины) по оси y .

На остальных ребрах, не ограничивая общности, например, зададим условия первого рода

$$\begin{aligned} T^{(i)} \Big|_{x=0} &= f_1^{(i)}(y); \\ T^{(i)} \Big|_{x=b} &= f_2^{(i)}(y). \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Решение ищем в виде:

$$T^{(i)}(x, y) = h(x)g^{(i)}(y) \quad (4.6)$$

Т.е. $h(x)$ предполагается независимой от номера ребра i . Тогда для удовлетворения граничных условий и условий сопряжения для $g^{(i)}(y)$ получаем следующую задачу Штурма – Лиувилля:

$$\frac{d^2 g^{(i)}}{dy^2} + \lambda^2 g^{(i)} = 0, \quad (4.7)$$

из граничных условий (4) получаем

$$\left[\alpha^{(i)} g^{(i)} + \beta^{(i)} \frac{dg^{(i)}}{dy} \right]_{y=l_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.8)$$

из условий согласования (3)

$$g^{(1)} \Big|_{y=0} = g^{(2)} \Big|_{y=0} = \dots = g^{(N)} \Big|_{y=0} \quad (4.9)$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{dg^{(i)}}{dy} = 0 \quad (4.10)$$

Не ограничивая общности, рассмотрим случай контакта трех пластин.

Для выполнения граничных условий (8) $g^{(i)}(y)$ ищем в виде

$$g^{(i)}(y) = c^{(i)} \left[\alpha^{(i)} \sin \lambda(y - l_i) - \lambda \beta^{(i)} \cos \lambda(y - l_i) \right], \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.11)$$

Константы $c^{(i)}$ находим из условий сопряжения. Подставляя вид решения (11) в условия (9), (10) получим систему линейных однородных уравнений

относительно $c^{(i)}$. Условие существования ненулевых решений, как известно, обуславливается равенством нулю соответствующего определителя. Отсюда получаем условие для нахождения собственных значений:

$$\Delta = 0 \quad (4.12)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha^{(1)} \sin \lambda l_1 + \lambda \beta^{(1)} \cos \lambda l_1 & -\alpha^{(2)} \sin \lambda l_2 - \lambda \beta^{(2)} \cos \lambda l_2 & 0 \\ \alpha^{(1)} \sin \lambda l_1 + \lambda \beta^{(1)} \cos \lambda l_1 & 0 & -\alpha^{(3)} \sin \lambda l_3 - \lambda \beta^{(3)} \cos \lambda l_3 \\ \alpha^{(1)} \cos \lambda l_1 - \lambda \beta^{(1)} \sin \lambda l_1 & \alpha^{(2)} \cos \lambda l_2 - \lambda \beta^{(2)} \sin \lambda l_2 & \alpha^{(3)} \cos \lambda l_3 - \lambda \beta^{(3)} \sin \lambda l_3 \end{vmatrix} \quad (4.13)$$

Получим решения для простого, но важного в применении случая, когда

$$\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = \alpha^{(3)} = \alpha; \quad \beta^{(1)} = \beta^{(2)} = \beta^{(3)} = \beta; \quad l_1 = l_2 = l_3 = l \quad (4.14)$$

В этом случае определитель (13) имеет вид:

$$\Delta = (\alpha \sin \lambda l + \lambda \beta \cos \lambda l)^2 (\alpha \cos \lambda l - \lambda \beta \sin \lambda l) = 0 \quad (4.15)$$

Из условия

$$\alpha \cos \lambda l - \lambda \beta \sin \lambda l = 0 \quad (4.16)$$

получаем собственные значения $\lambda_{n,1}$ и первое решение системы :

$$c^{(1)} = c^{(2)} = c^{(3)} = 1. \quad (4.17)$$

Из условия

$$\alpha \sin \lambda l + \lambda \beta \cos \lambda l = 0 \quad (4.18)$$

получаем собственные значения $\lambda_{n,2}$ и два линейно независимых решения системы: Заметим, что эти решения ортогонализированы.

$$\begin{aligned} c^{(1)} &= 2 & c^{(1)} &= 0 \\ c^{(2)} &= -1 & \text{и} & \quad c^{(2)} = 1 \\ c^{(3)} &= -1 & c^{(3)} &= -1 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Таким образом получаем три решения задачи Штурма – Лиувилля: одно ($g_{n,1}$) симметричное и два ($g_{n,2}$ $g_{n,3}$) несимметричных:

$$g_{n,1} = \begin{pmatrix} \alpha \sin \lambda_{n,1} (y-l) - \lambda_{n,1} \beta \cos \lambda_{n,1} (y-l) \\ \alpha \sin \lambda_{n,1} (y-l) - \lambda_{n,1} \beta \cos \lambda_{n,1} (y-l) \\ \alpha \sin \lambda_{n,1} (y-l) - \lambda_{n,1} \beta \cos \lambda_{n,1} (y-l) \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

$$g_{n,2} = \begin{pmatrix} g_{n,2}^{(1)} \\ g_{n,2}^{(2)} \\ g_{n,2}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(\alpha \sin \lambda_{n,2} (y-l) - \lambda_{n,2} \beta \cos \lambda_{n,2} (y-l)) \\ -(\alpha \sin \lambda_{n,2} (y-l) - \lambda_{n,2} \beta \cos \lambda_{n,2} (y-l)) \\ -(\alpha \sin \lambda_{n,2} (y-l) - \lambda_{n,2} \beta \cos \lambda_{n,2} (y-l)) \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

$$g_{n,3} = \begin{pmatrix} g_{n,3}^{(1)} \\ g_{n,3}^{(2)} \\ g_{n,3}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \sin \lambda_{n,2} (y-l) - \lambda_{n,2} \beta \cos \lambda_{n,2} (y-l) \\ -(\alpha \sin \lambda_{n,2} (y-l) - \lambda_{n,2} \beta \cos \lambda_{n,2} (y-l)) \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

Нормируем полученные решения, для чего найдем нормировочные множители:

$$N_k = \frac{1}{\|g_{n,k}\|}, \quad \text{где } \|g_{n,k}\|^2 = (g_{n,k}, g_{n,k}) \quad k=1,2,3. \quad (4.23)$$

$$\|g_{n,1}\|^2 = 3 \left[\frac{l}{2} (\alpha^2 + \lambda_{n,1}^2 \beta^2) + \sin^2 \lambda_{n,1} l \left(\frac{\beta}{2\alpha} [\lambda_{n,1}^2 \beta^2 - \alpha^2] + \alpha \beta \right) \right] \quad (4.26)$$

$$\|g_{n,2}\|^2 = 6 \left[\frac{l}{2} (\alpha^2 + \lambda_{n,2}^2 \beta^2) + \sin^2 \lambda_{n,2} l \left(\frac{-\alpha}{2\lambda_{n,2}^2 \beta} [\lambda_{n,2}^2 \beta^2 - \alpha^2] + \alpha \beta \right) \right] \quad (4.27)$$

$$\|g_{n,3}\|^2 = 2 \left[\frac{l}{2} (\alpha^2 + \lambda_{n,2}^2 \beta^2) + \sin^2 \lambda_{n,2} l \left(\frac{-\alpha}{2\lambda_{n,2}^2 \beta} [\lambda_{n,2}^2 \beta^2 - \alpha^2] + \alpha \beta \right) \right] \quad (4.28)$$

Таким образом, базис составляют вектор-столбцы:

$$\begin{aligned} G_{n,1} &= N_1 g_{n,1} \\ G_{n,2} &= N_2 g_{n,2} \\ G_{n,3} &= N_3 g_{n,3} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Тогда общий вид разложения на графе имеет вид

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} [G_{n,1} c_{n,1} + G_{n,2} c_{n,2} + G_{n,3} c_{n,3}] \quad (4.30)$$

Для функции $h(x)$ получаем уравнение

$$\frac{d^2 h(x)}{dx^2} - \alpha_n^2 h(x) = 0 \quad (4.31)$$

где

$$\alpha_n^2 = m^2 + \lambda_n^2. \quad (4.32)$$

Решением этого уравнения будут функции

$$h_n(x) = \bar{c}_n \frac{sh \alpha_n (b-x)}{sh \alpha_n b} + \tilde{c}_n \frac{sh \alpha_n x}{sh \alpha_n b}, \quad (4.33)$$

Коэффициенты разложения $\bar{c}_{n,k}$ и $\tilde{c}_{n,k}$ найдем из краевых условий (5)

$$\bar{c}_{n,k} = N_k \left((f_1^{(1)}; f_1^{(2)}; f_1^{(3)}) (G_{n,k})^T \right); \quad k=1,2,3. \quad (4.34)$$

$$\tilde{c}_{n,k} = N_k \left((f_2^{(1)}; f_2^{(2)}; f_2^{(3)}) (G_{n,k})^T \right); \quad k=1,2,3. \quad (4.35)$$

Таким образом, решение задачи имеет вид:

$$T(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^3 G_{n,k} \left(\bar{c}_{n,k} \frac{sh\alpha_n(b-x)}{sh\alpha_n b} + \tilde{c}_{n,k} \frac{sh\alpha_n x}{sh\alpha_n b} \right) \quad (4.36)$$

Выпишем решение важного для практики случая первой краевой задачи ($\alpha = 1; \beta = 0$)

В этом случае собственные значения имеют вид

$$\lambda_{n,1} = \frac{(2n-1)\pi}{2l}, \quad \lambda_{n,2} = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.37)$$

Поэтому вектор – столбцы базиса имеют вид

$$G_{n,1} = N_1 \begin{pmatrix} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2l}(l-y) \\ \sin \frac{(2n-1)\pi}{2l}(l-y) \\ \sin \frac{(2n-1)\pi}{2l}(l-y) \end{pmatrix}, \quad G_{n,2} = N_2 \begin{pmatrix} 2 \sin \frac{n\pi}{l}(l-y) \\ -\sin \frac{n\pi}{l}(l-y) \\ -\sin \frac{n\pi}{l}(l-y) \end{pmatrix}, \quad G_{n,3} = N_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \frac{n\pi}{l}(l-y) \\ -\sin \frac{n\pi}{l}(l-y) \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

где нормировочные множители

$$N_1 = \sqrt{\frac{2}{3l}}; \quad N_2 = \sqrt{\frac{1}{3l}}; \quad N_3 = \sqrt{\frac{1}{l}}. \quad (4.39)$$

Для второй краевой задачи, когда $\alpha = 0; \beta = 1$ собственными значениями будут

$$\lambda_{n,1} = \frac{\pi n}{l}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \lambda_{n,2} = \frac{\pi(2n+1)}{2l}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.40)$$

а вектор- столбцы базиса имеют вид

$$G_{n,1} = N_1 \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi n}{l}(y-l) \\ \cos \frac{\pi n}{l}(y-l) \\ \cos \frac{\pi n}{l}(y-l) \end{pmatrix}, \quad G_{n,2} = N_2 \begin{pmatrix} 2 \cos \frac{(2n+1)\pi}{2l}(y-l) \\ -\cos \frac{(2n+1)\pi}{2l}(y-l) \\ -\cos \frac{(2n+1)\pi}{2l}(y-l) \end{pmatrix}, \quad G_{n,3} = N_3 \begin{pmatrix} 0, \\ \cos \frac{(2n+1)\pi}{2l}(y-l), \\ -\cos \frac{(2n+1)\pi}{2l}(y-l) \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

Нормировочные множители в этом случае такие же, как в (4.39).

Рассмотрим еще один важный случай, когда условия на ребрах неодинаковы.

Пусть, например, на одном ребре задана нулевая температура, а на двух других – условие неперетекания. Т.е.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0; \quad \alpha_3 = 1; \quad \beta_1 = \beta_2 = 1; \quad \beta_3 = 0; \quad (4.42)$$

Пусть к тому же длины ребер тоже отличаются: длина одного ребра равна l_3 , а двух других – равны между собой соответственно:

$$l_1 = l_2 = l \neq l_3 \quad (4.43)$$

Тогда условие для собственных значений (12) примет вид:

$$\lambda^2 \cos \lambda l (\cos \lambda l \cos \lambda l_3 - 2 \sin \lambda l \sin \lambda l_3) = 0 \quad (4.46)$$

условие $\cos \lambda l = 0$ определяет собственные значения:

$$\lambda_n l = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad (4.47)$$

и первую серию решений системы

$$(1, -1, 0) \quad (4.48)$$

условие

$$\cos \lambda l \cos \lambda l_3 - 2 \sin \lambda l \sin \lambda l_3 = 0 \quad (4.49)$$

определяет собственные значения $\lambda_{n,2}$ и вторую серию решений:

$$\left(1, 1, \frac{\lambda_{n,2} \cos \lambda_{n,2} l}{\sin \lambda_{n,2} l_3} \right). \quad (4.50)$$

Таким образом, получаем следующие решения задачи Штурма-Лиувилля:

$$g_{n,1} = \begin{pmatrix} \lambda_{n,1} \cos \lambda_{n,1} (y-l) \\ -\lambda_{n,1} \cos \lambda_{n,1} (y-l) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad g_{n,2} = \begin{pmatrix} \lambda_{n,2} \cos \lambda_{n,2} (y-l) \\ \lambda_{n,2} \cos \lambda_{n,2} (y-l) \\ \frac{\lambda_{n,2} \cos \lambda_{n,2} l}{\sin \lambda_{n,2} l_3} \sin \lambda_{n,2} (y-l_3) \end{pmatrix}. \quad (4.51)$$

Нормы при этом :

$$\|g_{n,1}\|^2 = \lambda_{n,1}^2 l \quad (4.52)$$

$$\|g_{n,2}\|^2 = \lambda_{n,2}^2 \left\{ l + \frac{1}{2} \frac{\cos \lambda_{n,2} l}{\sin \lambda_{n,2} l_3} l_3 + \frac{1}{4 \lambda_{n,2}} (2 \sin 2 \lambda_{n,2} l - \cos \lambda_{n,2} l) \right\} \quad (4.53)$$

Перейдем ко второй задаче. Для удобства изложения ограничимся первой краевой задачей. Эта задача предполагает, что температура на торцевых частях ребер, то есть при $x=0, x=b$ равна нулю

$$T^{(i)} \Big|_{x=0} = T^{(i)} \Big|_{x=b} = 0, \quad y \in [0, l], i=1, \dots, N; \quad T^{(i)} \Big|_{y=l} = \varphi^{(i)}(x). \quad (4.54)$$

В этом случае разложение Фурье применим к функции $\varphi^{(i)}(x)$ заданным на внешних сторонах ребер

$$\varphi^{(i)}(x) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sum c_n^{(i)} \sin \frac{n\pi x}{b}, i=1, 2, 3 \quad (4.55)$$

Для части зависящей от y в этом случае следует выбрать функцию, определенную на графе. Для построения части зависящей от координаты y возьмем стандартную форму, решения

$$g_n^{(i)}(y) = c_n^{(i)} \frac{\operatorname{sh} \alpha_n y}{\operatorname{sh} \alpha_n l} + A_n \frac{\operatorname{sh} \alpha_n (l-y)}{\operatorname{sh} \alpha_n l}, \quad \text{где } \alpha_n^2 = (\lambda_n)^2 + m^2 \quad (4.56)$$

Значение константы A найдем из условия сохранения потока на линии контакта ребер

$$A_n = \frac{1}{ch\alpha_n l} \sum_{i=1}^3 c^{(i)} \quad (4.57)$$

Поэтому решение запишем

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{b}} \sum \sin \frac{\pi n x}{b} \left(c^{(1)} \frac{sh\alpha_n y}{sh\alpha_n l} + A_n \frac{sh\alpha_n (l-y)}{sh\alpha_n l} \right) \\ \sqrt{\frac{2}{b}} \sum \sin \frac{\pi n x}{b} \left(c^{(2)} \frac{sh\alpha_n y}{sh\alpha_n l} + A_n \frac{sh\alpha_n (l-y)}{sh\alpha_n l} \right) \\ \sqrt{\frac{2}{b}} \sum \sin \frac{\pi n x}{b} \left(c^{(3)} \frac{sh\alpha_n y}{sh\alpha_n l} + A_n \frac{sh\alpha_n (l-y)}{sh\alpha_n l} \right) \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

Напомним, что коэффициенты c^i определены из обычной формулы для ряда Фурье

$$c^{(i)} = \sqrt{\frac{2}{b}} \int_0^b f^{(i)}(\xi) \sin \frac{\pi n \xi}{b} d\xi \quad (4.59)$$

Таким образом, задача полностью решена. Распространение результатов на новое число пластин не встречает принципиальных трудностей. Численная реализация решения рассмотренных задач по предложенной методике была проведена для некоторых частных случаев с применением пакета MATLAB.

ЛИТЕРАТУРА

1. Покорный Ю.В. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах, М: Физматлит, 2004 – 272с.
2. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В. Л. Об уравнениях на пространственных сетях // Успехи матем. наук. – 1994. – Т. 49, вып. 4. – С. 140.
3. Гладышев Ю.А., Краевые задачи теплопроводности в системах тонких стержней и оболочек. 2002., М., 3-я РНКТ по теплообмену, т.7.—С.86-89.
4. Гладышев Ю.А. Голубева М.С. Решение краевых задач в системе контактирующих оболочек // Современные методы теории краевых задач, материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения – XIX», изд Воронежского государственного университета, 2008.

Надійшла 09.04.2009.