

## Дискретизація одного рівняння теплопровідності з циклічними крайовими умовами

Т. А. Григорова, В. П. Ляшенко

*Кременчуцький державний політехнічний університет  
ім. Михайла Остроградського, Україна*

Researches of mathematical models of the temperature fields with the internal and external heat source are conducted. The numerical solutions of problems are found in space of finite-dimensional separable space with algorithm of Crank – Nicholson application. Numerical calculations are executed and the temperature distribution is built.

### 1. Загальна постановка питання і його актуальність

Останнім часом в металургії широке застосування знаходять технологічні процеси термічної обробки металевих стрижнів, пов'язані з циклічними багаторазовими змінами температури. До них можна віднести різні способи термоциклічної обробки (ТЦО) [1-4]. Здебільшого така обробка відбувається у газових та муфельних печах або шляхом пропускання електричного струму через заготовку. Під час такої обробки виникають проблеми пов'язані з ефективним керуванням температурним полем заготовки.

### 2. Витоки дослідження авторів

У роботах [1-4] проведені дослідження фізичних процесів, що відбуваються під час ТЦО. Побудовані математичні моделі, у вигляді початково-крайових задач для лінійного рівняння теплопровідності, та отримані окремі аналітичні розв'язки. З математичної точки зору дослідження температурних розподілів під час ТЦО приводить до розв'язання однорідного або неоднорідного рівняння теплопровідності з імпульсними крайовими умовами або функцією джерел у рівнянні теплопровідності. Стрижень розглядається у вигляді скінченного анізотропного середовища зі сталими теплофізичними характеристиками та параметрами довжиною  $L$ . Досліджуються математичні моделі температурних полів у яких діють зовнішні та внутрішні джерела тепла. Внутрішні джерела тепла  $w(t, T)$  спричинені дією електричного струму, що пропускається через заготовку, а зовнішні спричиняються теплообміном з навколишнім середовищем за законами Ньютона та Стефана – Больцмана. У математичній моделі – рівнянні теплопровідності внутрішні джерела тепла зображаються у вигляді фінітної функції у рівнянні, а зовнішні – у вигляді крайових умов першого другого або третього роду.

### 3. Не розв'язані питання і мета роботи

В роботах [1-4] не розглядався вплив нелінійностей у крайових умовах на температурний розподіл. Метою роботи є дослідження математичних моделей

температурного поля циліндричної області з діючими внутрішніми та зовнішніми джерелами тепла.

#### 4. Математичні моделі та їх розв'язок

Математична модель температурного поля циліндричної області, має вигляд

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda(T) r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) - c \rho_n \frac{\partial T}{\partial t} = -W(t, T) \quad (1)$$

$$0 < r < r_0, \quad 0 < z < L, \quad t > 0$$

$$T(r, z, 0) = T_0 \quad (2)$$

$$T(r, 0, t) = T_1(t), \quad T(r, L, t) = T_2(t) \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad -\lambda(T) \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \alpha(T) f_1^i(t) (T_c - T) + \varepsilon \sigma f_1^i(t) (T_c^4 - T^4), \quad (4)$$

де  $\lambda(T)$  – коефіцієнти теплопровідності,  $\varepsilon, \sigma$  – степінь чорноти та постійна Стефана-Больцмана,  $r_0$  – радіус,  $T_c > T_0$ ,  $W(t, T)$  – функція джерел тепла у разі внутрішнього джерела тепла має вигляд

$$W(t, T) = f_1^i(t) \cdot f_2(T), \quad (5)$$

у разі зовнішнього джерела тепла  $W(t, T) = 0$ .

Функція  $f_1^i(t)$  має вигляд в залежності від технологічних особливостей процесу ТЦО має вигляд

$$f_1^1(t) = 0,5 \left( 1 - \cos \frac{t}{t_0} \right), \quad f_1^2(t) = \left| \sin \left( \frac{t}{t_0} \right) \right|, \quad (6)$$

$$f_1^3(t) = \begin{cases} \frac{t}{t_0} - 2n, & 2nt_0 < t < (2n+1)t_0 \\ t_0, & \\ -\frac{t}{t_0} + 2(n+1), & (2n+1)t_0 < t < (2n+2)t_0 \end{cases}$$

$t_0$  - час одного термоциклу

$$f_2(T) = \frac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T)}{\pi^2 r_0^4} \quad (7)$$

де  $\rho_0, \beta$  – питомий опір і температурний коефіцієнт опору.

Якщо розподіл температури уздовж радіуса не відіграє особливої ролі, можна провести усереднення температури уздовж радіуса [3]

Після застосування оператора усереднення з врахуванням умови (4) задача (1)-(4) зводиться до наступної

$$\lambda(u) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial u} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - c \rho_n \frac{\partial u}{\partial t} = + \frac{2\alpha(u) f_1^i(t)}{r_0} (T_c - u) + \frac{2\varepsilon \sigma f_1^i(t)}{r_0} (T_c^4 - u^4) \quad (8)$$

$$u(z, 0) = T_0. \quad (9)$$

При  $\alpha(u) = \alpha = const$ ,  $\lambda(u) = \lambda = const$  задача (9) – (10) приймає вигляд

$$\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left[ \frac{I^2 \rho_0 \beta}{\pi^2 r_0^4} f_1^i(t) - \frac{2\alpha}{r_0} \right] u - \frac{2\varepsilon\sigma}{r_0} u^4 = c\rho_n \frac{\partial u}{\partial t} - F(t) \quad (10)$$

$$0 < z < L, \quad t > 0$$

$$u(z, 0) = T_0 \quad (11)$$

$$u(0, t) = T_1(t), \quad u(L, t) = T_2(t) \quad (12)$$

$$\text{де} \quad F(t) = \frac{I^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4} f_1^i(t) + \frac{2\alpha T_c}{r_0} + \frac{2\varepsilon\sigma}{r_0} T_c^4.$$

Інший вигляд має математична модель температурного поля циліндричної області під час ТЦО зовнішніми джерелами тепла. У такій постановці задачі джерела тепла знаходяться не в правій частині рівняння теплопровідності, а в крайових умовах. Їх називають зовнішніми джерелами тепла. Така математична модель має вигляд першої або другої крайової задачі для однорідного квазілінійного рівняння теплопровідності

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda(T) r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda(T) r \frac{\partial T}{\partial z} \right) - c\rho_n \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (13)$$

$$0 < r < r_0, \quad 0 < z < L, \quad t > 0$$

$$T(r, z, 0) = T_0 \quad (14)$$

$$T(r, 0, t) = T_1(t), \quad T(r, L, t) = T_2(t) \quad (15)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \alpha(T) f_1^i(t) (T_c - T) + \varepsilon \sigma f_1^i(t) (T_c^4 - T^4), \quad (16)$$

Після застосування оператора усереднення з врахуванням умови (16) задача (13) – (16) зводиться до наступної

$$\begin{aligned} & \lambda(u) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial u} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - c\rho_n \frac{\partial u}{\partial t} = \\ & = + \frac{2\alpha(u) f_1^i(t)}{r_0} (T_c - u) + \frac{2\varepsilon \sigma f_1^i(t)}{r_0} (T_c^4 - u^4) \end{aligned} \quad (17)$$

$$u(z, 0) = T_0. \quad (18)$$

Для  $\alpha(u) = \alpha = const$ ,  $\lambda(u) = \lambda = const$  приймає вигляд

$$\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - c\rho_n \frac{\partial u}{\partial t} = -F_2(u, t), \quad (19)$$

$$0 < z < L, \quad t > 0$$

$$u(z, 0) = T_0, \quad (20)$$

$$u(0, t) = T_1(t), \quad u(L, t) = T_2(t), \quad (21)$$

$$\text{де} \quad F_2(u, t) = + \frac{2\alpha(u) f_1^i(t)}{r_0} (T_c - u) + \frac{2\varepsilon \sigma f_1^i(t)}{r_0} (T_c^4 - u^4).$$

У тому випадку коли кінці сприймають заданий тепловий потік в математичних моделях (1)-(4) і (13)-(16) змінюються крайові умови

$$\left. \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = \alpha(T) f_1^i(t) (T_c - T) + \varepsilon \sigma f_1^i(t) (T_c^4 - T^4),$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=L} = -\alpha(T) f_1^i(t) (T_c - T) - \varepsilon \sigma f_1^i(t) (T_c^4 - T^4) \quad (22)$$

Алгоритм, що зображено на блок-схемі, створений за модульним принципом. Він дозволяє провести розрахунки для різних функцій  $f_1^i(t)$  та різних граничних умов.

Задачі (10)-(12) та (19)-(21) розв'язуємо чисельним методом в скінчено мірному сепарабельному просторі з нормою  $\|u(z,t)\|_U = \max_{z,t \in \Omega} |u(z,t)|$ .

Будуємо кінцево-різницеву схему Кранка - Ніколсона [5,6] для рівняння теплопровідності.

В області  $\bar{\Omega} \{0 \leq z \leq L, t > 0\}$  вводимо рівномірні сітки по довжині (координата  $z$ ) заготовки  $\bar{\omega}_h = \{z_m = mh, m = 0,1...M\}$ ; часову сітку (координата  $t$ )  $\bar{\omega}_{\Delta t} = \{t_j = j\Delta t, j = 0,1...j_0\}$  з інтервалами:  $h = L/M, \Delta t = t_0/j_0$ .

Розв'язок задачі в області  $\Omega$  шукаємо у вигляді розв'язку системи нелінійних алгебраїчних рівнянь для сіткової функції  $u_{z_m, t_j}$ , яку позначимо як  $u_{i,j}$ .

$$c\rho_n \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{2h^2} (u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) + F_2(u_{i,j}, t) \quad (23)$$

У випадку, коли розглядається модель (1)-(4) функція  $F_2(u_{i,j}, t)$  має вигляд

$$F_2(u_{i,j}, t) = \left[ \frac{I^2 \rho_0 \beta}{\pi^2 r_0^4} f_1^i(t) - \frac{2\alpha}{r_0} \right] u_{i,j} - \frac{2\varepsilon \sigma}{r_0} u_{i,j}^4 + F(t).$$

Отриману систему розв'язуємо ітераційним методом за наступним алгоритмом (рис.1).

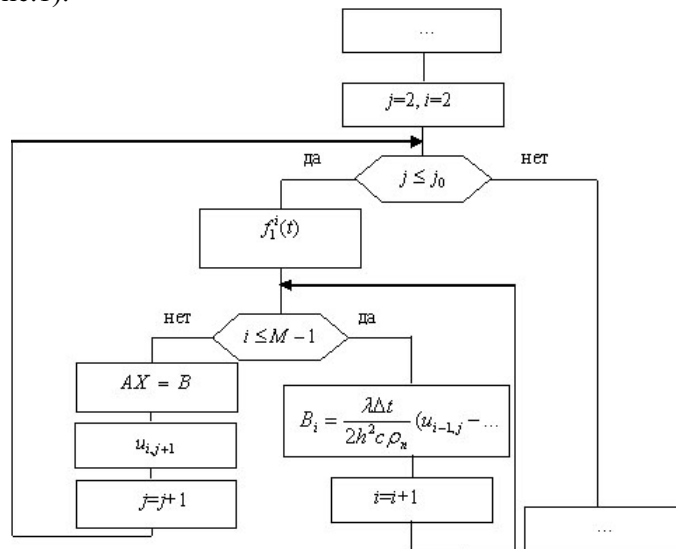


Рис.1. Блок-схема алгоритму розв'язку задачі

### 6. Обчислювальний експеримент: обґрунтування алгоритмів і реалізація

Чисельні розрахунки були проведені за наведеним алгоритмом в середовищі Matlab для сталюого стрижня  $\rho_n = 7,8 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ,  $c = 0,46 \frac{\text{кДж}}{\text{кгК}}$  радіусом  $r_0 = 0,75 \cdot 10^{-3} \text{ м}$  та довжиною  $L = 0,25 \text{ м}$  з температурами  $T_0 = 273^0 \text{ К}$  та температурою середовища  $T_c = 1000^0 \text{ К}$ , з часом одного термоциклу  $t_0 = 10 \text{ с}$  та  $\lambda = 129 \frac{\text{Вт}}{\text{мК}}$ ,  $\alpha = 50 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}}$ . У найпростішому випадку  $T_1(t) = T_0$ ,  $T_2(t) = \gamma T + T_0$ ,  $\gamma = 0,2$ .

Були отримані температурні розподіли ТЦО за розв'язками задачі (1)-(4) та (13)-(16). На рис. 2-3 зображені поверхні розподілу температури для задачі (1)-(4) для крайової умови (3) і функції джерела тепла  $f_1^1(t)$ . Розподіли температури представлені уздовж стрижня на кожному часовому кроці  $\Delta t$  для 2-х з 12-ти термоциклів на початку та на кінці процесу обробки.

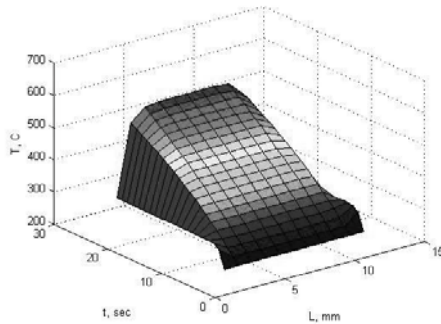


Рис.2. Перший термоцикл

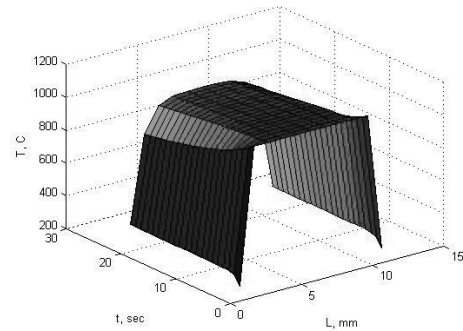


Рис.3. Останній термоцикл

На рис. 4-5 зображені поверхні розподілу температури для задачі (13)-(16) для крайової умови (15) і функції джерела тепла  $f_1^1(t)$ .

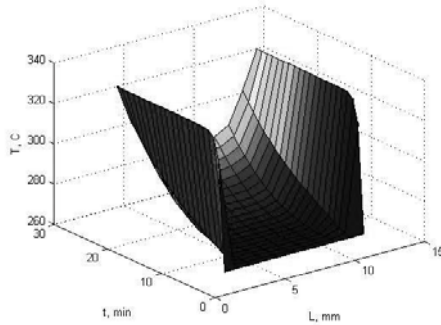


Рис.4. Перший термоцикл

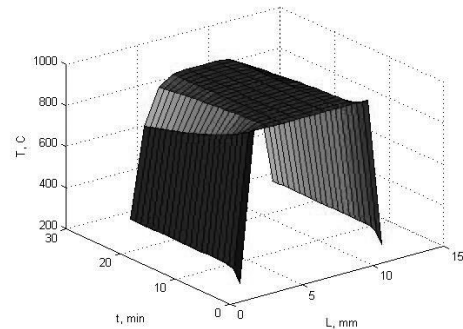


Рис.5. Останній термоцикл

На рис. 6-7 зображені поверхні розподілу температури для задачі (1)-(4) для крайової умови (22) і функції джерела тепла  $f_1^3(t)$ .

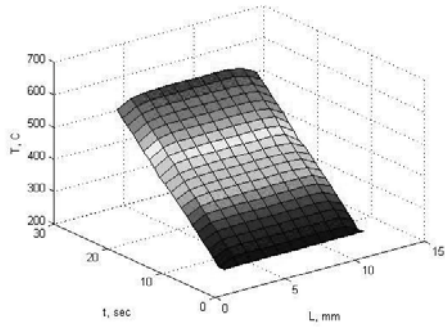


Рис.6. Перший термоцикл

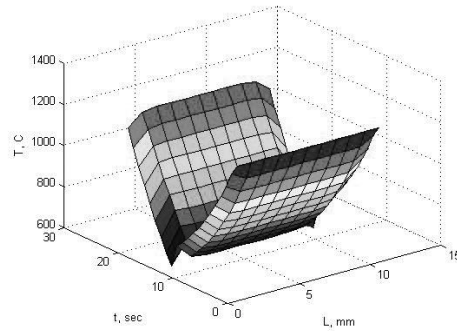


Рис.7. Останній термоцикл

На рис. 8–9 зображені поверхні розподілу температури для задачі (13)-(16) для крайової умови (22) і функції джерела тепла  $f_1^3(t)$ .

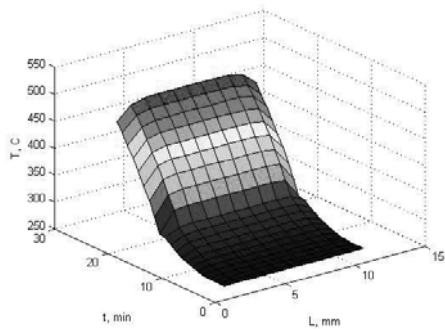


Рис.8. Перший термоцикл

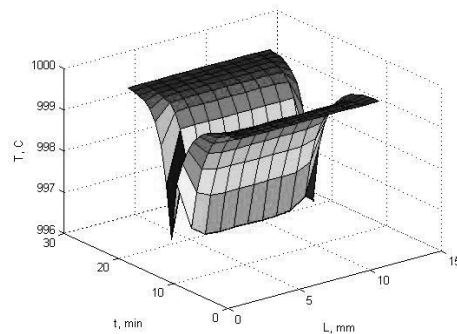


Рис.9. Останній термоцикл

На рис.10 зображено розподіл температури розв'язок задачі (1)-(4) для функції джерела тепла  $f_1^1(t)$ , а на рис.11 – для функції джерела тепла  $f_1^3(t)$  протягом дванадцяти термоциклів. Як видно із рисунків після дев'ятого термоциклу температурний розподіл асимптотично наближається термодинамічної рівноваги.

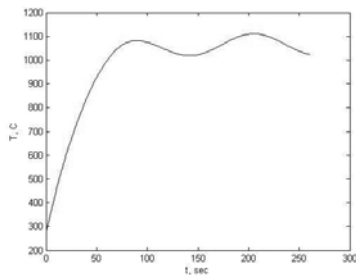


Рис.10. Температурний розподіл для  $z=1/2L$

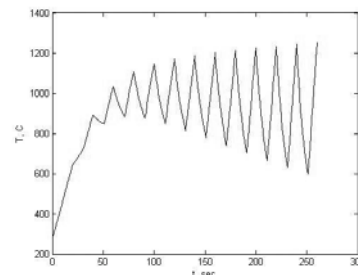


Рис.11. Температурний розподіл для  $z=1/2L$

На рис. 12 зображено розподіл температури розв'язок задачі (13)-(16) для функції джерела тепла  $f_1^1(t)$ , а на рис.13 – для функції джерела тепла  $f_1^3(t)$  протягом дванадцяти термоциклів. Як видно із рисунків температура асимптотично наближається до  $T_c = 1000^0 K$ .

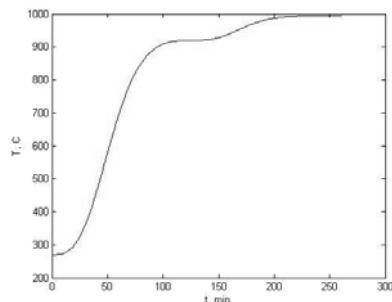


Рис.12. Температурний розподіл для  $z=1/2L$

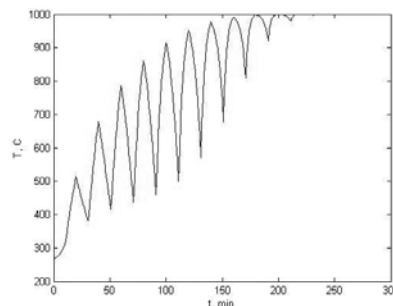


Рис.13. Температурний розподіл для  $z=1/2L$

### 7. Висновки за результатами і напрямки подальших досліджень

Отримані результати можна застосовувати при створенні систем автоматизованого управління термоциклічною обробкою.

Математичні моделі температурного розподілу під час термоциклічної обробки металевих стрижнів електричним струмом або зовнішніми джерелами тепла, з різними схемами обробки, дозволяють провести аналіз пружного стану металу під час обробки та з'ясувати вплив дифузії домішок на якість металу. Схеми обробки визначаються законом зміни дії джерел тепла, що підводяться до заготовки.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Новиков И.И. Теория термической обработки металлов М. Металлургия, 1978, 392.с.
2. Ляшенко В.П., Познанский В.И., Дядюра Н.К., Варивода З.Д. Влияние термоциклической обработки на механические свойства вольфрамовой проволоки. Цветные металлы, №8, 1989, с.91-93.
3. Ляшенко В.П. Математична модель термоциклічної обробки металевих виробів.// Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету.- Кременчук: Вип.. 6\2003 (23) с.8 -11
4. Ляшенко В.П. Температурне поле з імпульсними джерелами тепла// Труды XII международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» Харьков – Херсон 2005 с.214-217.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983. – 616 с.
6. Годунов С.К., Рябенкий В.С. Разностные схемы. – М.:Наука,1977.– 440 с.

Надійшла у першій редакції 31.03.2009, в останній – 02.04.2009.