

## Алгоритмическая модель тепловых процессов в статорных системах шаговых электродвигателей

М. О. Малахова, С. Н. Рева

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина*

The problems of the temperature control of step motor's stator windings, working in a forced operation, are considered. The method of the program checking the temperature is suggested, and a heat model, emulating the thermal processes in a real time, has been developed. A special method of the exponential function's approximation with a help of chain curve and an algorithm, that implements a discrete model of the thermal processes, are defined. The results of the practical application are outlined.

### 1. Введение

Наиболее эффективным методом оптимизации управления шаговыми электродвигателями является организация обратной связи, обеспечивающей слежение за текущим положением ротора [1]. Располагая информацией о взаимном расположении полюсных наконечников статора и ротора можно с помощью логического или микропроцессорного устройства управления своевременно переключать напряжения на статорных обмотках, переводя электродвигатель в режим непрерывного вращения с максимальным коэффициентом полезного действия и наибольшим крутящим моментом. Датчик положения ротора также обеспечивает контроль скорости вращения и контроль реального положения узлов, приводимых в движение шаговым двигателем. Функции контроля чаще всего реализуются с помощью электромагнитных или дисковых оптических датчиков, формирующих дискретный код абсолютного или относительного угла поворота ротора.

При управлении шаговыми двигателями со следящей обратной связью существует проблема температурного контроля обмоток статора. Она становится особенно актуальной, если двигатель используется в форсированном режиме или работает в составе оборудования непрерывного действия. Суть проблемы состоит в том, что при вынужденной остановке ротора в результате воздействия внешних факторов (заклинивание, возникновение непредвиденных препятствий) система управления, подчиняясь логике заложенного алгоритма, может включить напряжение на одну или несколько групп статорных обмоток на длительное время, пытаясь преодолеть возникшее препятствие и продолжить движение. При этом ток обмоток существенно возрастает, так как индуктивная составляющая перестает влиять на действующее значение тока, как это происходит в штатном режиме работы двигателя. Находящиеся под постоянным напряжением обмотки перегреваются и могут выйти со строя в результате тепловых разрушений. Температура других обмоток при этом остается нормальной.

Аппаратный контроль температуры статорных обмоток зачастую осложнен, поскольку требует построения многоканальной системы температурного контроля — отдельный канал на каждую группу обмоток. Кроме того подавляющее большинство шаговых двигателей не имеет встроенных температурных датчиков [2], что обуславливает применение косвенных методов измерения и делает аппаратную систему контроля еще более сложной и дорогостоящей.

Альтернативным методом решения проблемы является создание программной модели тепловых процессов и построение микроконтроллерной системы, способной эмулировать температуру всех групп обмоток и своевременно блокировать управление двигателем с целью предупреждения теплового разрушения.

## 2. Анализ тепловых процессов в статоре шагового двигателя

На температуру статорных обмоток могут влиять два тепловых процесса: увеличение температуры катушки происходит в результате выделения тепла в обмотке при протекании через нее электрического тока, а уменьшение — в результате передачи тепла в окружающее пространство и на корпус двигателя. Изменение температуры катушки определяется количеством накопленной или отданной тепловой энергии и описывается следующим аналитическим соотношением:

$$Q = qm\Delta T, \quad (1)$$

где  $Q$  — количество приобретенной или отданной теплоты;  
 $q$  — удельная теплоемкость обмотки;  
 $m$  — масса обмотки;  
 $\Delta T$  — изменение температуры.

Количество теплоты получаемое статорной обмоткой за время  $\Delta t$  при прохождении через нее электрического тока определяется в соответствии с законом Джоуля-Ленца:

$$Q = I^2 R \Delta t, \quad (2)$$

где  $I$  — сила тока;  
 $R$  — сопротивление обмотки.

Учитывая, что двигатель питается стабилизированным напряжением, а сопротивление обмоток может изменяться в зависимости от их температуры, целесообразно записать эту зависимость следующим образом:

$$Q = \frac{U^2}{R(T)} \Delta t, \quad (3)$$

где  $U$  — приложенное к обмотке напряжение;  
 $R(T)$  — текущее сопротивление обмотки.

Приравняв (1) и (3) и выразив из них приращение температуры  $\Delta T$ , получим:

$$\Delta T = \frac{U^2}{qmR(T)} \Delta t, \quad (4)$$

Зависимость текущего сопротивления катушки от температуры определяется следующим выражением:

$$R(T) = R_{20}(1 + \alpha T), \quad (5)$$

где  $R_{20}$  — сопротивление обмотки при  $T=20^\circ\text{C}$ ;  
 $\alpha$  — температурный коэффициент сопротивления материала обмотки.

Таким образом, с учетом (4) и (5) можно записать:

$$T_i = T_0 + \frac{U^2}{qmR_{20}(1 + \alpha T)} \Delta t, \quad (6)$$

где  $T_i$  — температура обмотки по истечении времени  $\Delta t$ ;  
 $T_0$  — исходная температура обмотки.

Полученная формула может быть применена для построения итерационной модели приращения температуры в процессе нагрева.

Что касается закона остывания статорных обмоток, то зависимость температуры от времени аналитически трудно представима вследствие сложного механизма теплопередачи, включающего три составляющие в той или иной мере, а именно: теплопроводность, конвекцию и излучение.

Изменение температуры в результате действия кондуктивного механизма теплопередачи описывается дифференциальным уравнением вида:

$$T - T_p + RC \frac{dT}{dt} = 0, \quad (7)$$

где  $T$  — температура обмотки;  
 $T_p$  — температура корпуса двигателя;  
 $R$  — тепловое сопротивление перехода обмотка-корпус;  
 $C$  — теплоемкость обмотки ( $C = mq$ ).

Частное решение этого уравнения [3] представляет собой зависимость температуры от времени  $t$  и выглядит следующим образом:

$$T_i = T_0 + A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (8)$$

где  $\tau$  — постоянная времени теплового процесса,  $\tau = RC$ ;  
 $A$  — константа.

Тепловая мощность  $P_k$  отдаваемая обмоткой в окружающее пространство за счет механизма конвекции определяется выражением:

$$P_k = \alpha_k S (T - T_{en}), \quad (9)$$

где  $\alpha_k$  — коэффициент конвекционного обмена объекта со средой;  
 $S$  — площадь теплового контакта со средой;  
 $T_{en}$  — температура окружающей среды.

Мощность излучения в окружающее пространство в соответствии с законом Стефана-Больцмана записывается в виде

$$P_r = \sigma \varepsilon S (T^4 - T_{en}^4), \quad (10)$$

где  $P_r$  — мощность излучения;  
 $\sigma$  — постоянная Больцмана;  
 $\varepsilon$  — коэффициент черноты поверхности.

Предварительная оценка вклада всех приведенных выше механизмов теплопередачи показывает, что составляющая конвекции и излучения не превышает 1% общего потока рассеяния тепла. Это обусловлено в том числе конструктивными особенностями статора — общая площадь открытой поверхности обмотки незначительна. Поэтому вид результирующей функции остывания будет определяться в основном кондуктивным механизмом теплопередачи и будет близок к экспоненциальному.

Для проверки и уточнения проведенного анализа был выполнен эксперимент, суть которого состоит в следующем.

Одна из обмоток двигателя была нагрета в результате подачи постоянного напряжения, после чего напряжение с обмотки было снято, и в процессе остывания периодически регистрировалась ее температура. При проведении эксперимента использовался косвенный метод определения температуры обмотки путем измерения ее сопротивления. По экспериментальным данным с помощью программного пакета Origin 7.5 получена экспоненциальная функция, аппроксимирующая эмпирическую зависимость методом минимизации средне-квадратического отклонения. Результаты аппроксимации показаны на рис. 1.

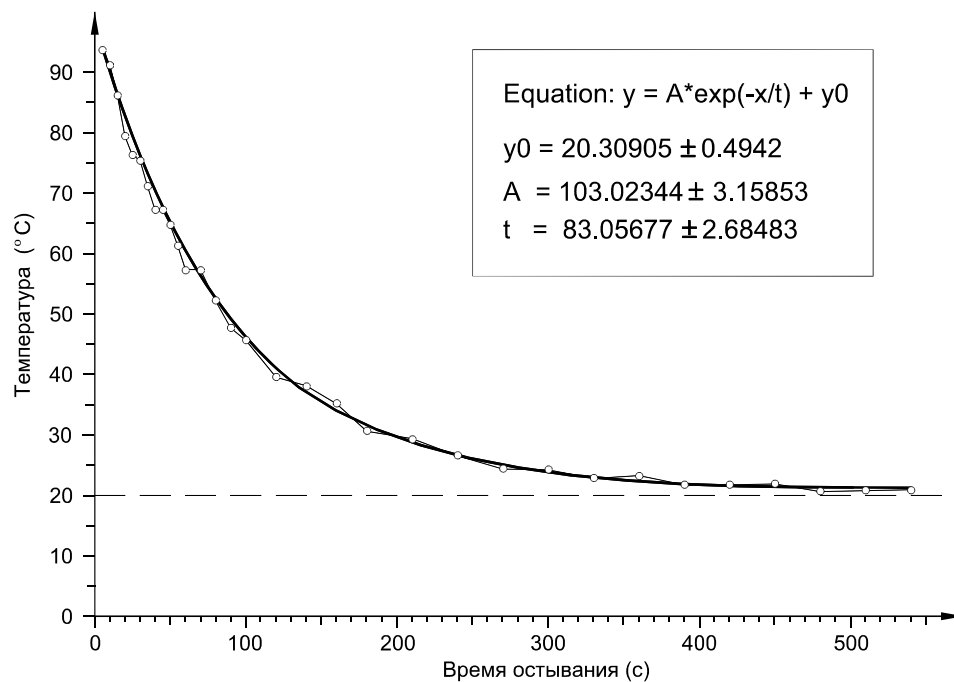


Рис.1. Аппроксимация экспериментальной зависимости остывания.

Аналитическое выражение, описывающее процесс остывания выглядит следующим образом:

$$T_i = T_0 + T_h \cdot e^{-\frac{t}{83}}, \quad (11)$$

где  $T_h$  — приращение температуры в процессе нагрева относительно начальной температуры  $T_0$ .

В дальнейшем эта функция будет использована для построения математической модели процесса остывания обмоток статора.

При проведении эксперимента было также уточнено расчетное значение собственной теплоемкости обмотки  $C = m \cdot q$ , которая для исследуемого шагового двигателя составила  $\sim 9,58$  Дж/град.

### 3. Алгоритмическая модель реального времени

Метод контроля теплового состояния статора построен на итерационном расчете температуры отдельных групп обмоток в реальном времени. Аналогичный метод использован для контроля температуры анода рентгеновской трубки, описанный в [4]. В его основе лежит допущение, что при изменении температуры в пределах одного градуса процессы нагрева и остывания происходят с постоянной скоростью, а следовательно, могут быть интерпретированы участком линейной функции. В пределах всего рабочего диапазона температур функциональные зависимости процессов нагрева и остывания во времени  $T_i = T(t)$  представлены в виде кусочно-ломаных кривых с точками перегиба, ординаты которых соответствуют целым значениям температуры (рис.2). В памяти микроконтроллера эти зависимости представлены в виде табличных функций. Функция нагрева определяет скорость изменения температуры, а функция остывания для каждого из линейных участков кусочно-ломаной кривой определяет период изменения температуры на один минимальный квант тепловой энергии, с которым работает модель.

Мгновенная температура обмотки пропорционально зависит от накопленной тепловой энергии. Для представления текущей температуры обмоток организовано четыре (по количеству групп обмоток) двухбайтных счетчика. Учитывая, что скорость нагрева достаточно высока, увеличение этих счетчиков в процессе нагрева происходит каждую миллисекунду (минимальный квант времени модели  $\Delta t$ , см. рис. 2) на величину пропорциональную скорости нагрева, определяемую табличной функцией. Уменьшение счетчиков в процессе остывания происходит по истечении времени, необходимому для остывания соответствующей группы обмоток на один минимальный квант тепловой энергии  $\Delta E$ , при котором температура уменьшается на соответствующую величину  $\Delta T$ . Значения счетчиков пропорциональны разностям между температурами обмоток и температурой окружающей среды:

$$T_i = T_{en} + kN_i, \quad (12)$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности;  
 $N_i$  — текущее значение счетчика.

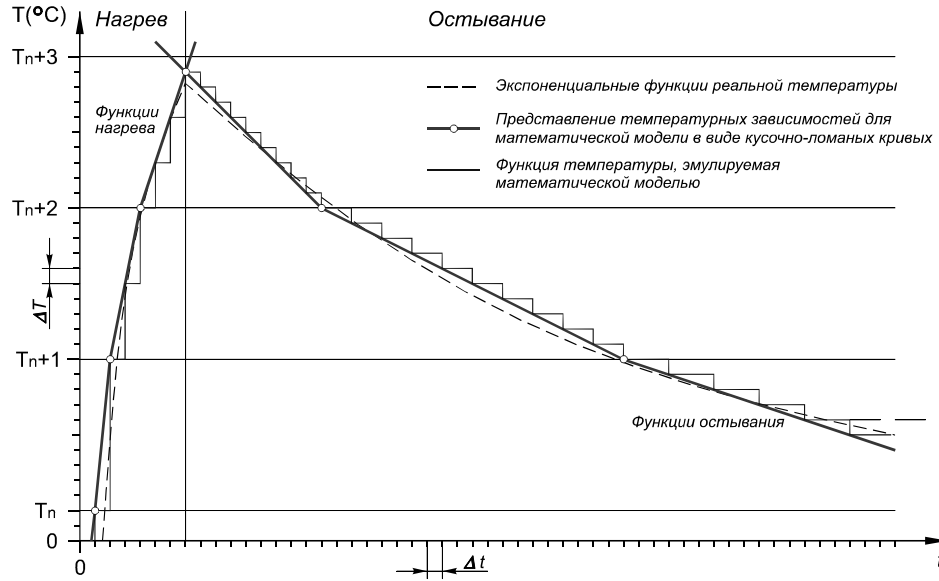


Рис.2. Температурные функции тепловой модели .

Коэффициент пропорциональности определяется значением минимального кванта тепловой энергии и теплоемкостью самой обмотки:

$$k = \Delta E / C = \Delta E / (mq), \quad (13)$$

где  $\Delta E$  — минимальный квант энергии.

Значение  $\Delta E$  выбирается из условия, чтобы при максимальной температуре  $T_{max}$  из рабочего диапазона соответствующее ей значение счетчика  $N_{max}$  не выходило за пределы двухбайтного числа. Для используемого в эксперименте двигателя величина  $\Delta E$  была выбрана равной 20 мДж, что позволило моделировать температуру с дискретностью около  $0,002^\circ\text{C}$  в диапазоне до  $136^\circ\text{C}$ .

Для реализации описанного выше механизма расчета создана программная процедура, которая вызывается по прерыванию таймера с периодом равным 1 мс. Она включает в себя четыре идентичных по организации алгоритма расчетных блока, предназначенных для эмуляции температуры каждой из четырех групп обмоток. Блок-схема алгоритма одного блока показана на рис. 3. Эмуляция температуры выполняется в следующем порядке.

При входе в процедуру анализируется флаг включения напряжения. Если напряжение подано на обмотку, то управление передается на метку М1, сбрасывается флаг таймаута, используемого для контроля процесса остывания, а значение соответствующего счетчика накопленной энергии  $N_i$  увеличивается на величину  $\Delta N$ , которая считывается из таблицы функции нагрева. Таким образом учитывается прирост тепловой энергии, которую получает обмотка за одну миллисекунду при имеющемся значении сопротивления провода, зависящем от текущей температуры. Далее управление передается на метку М3 для принятия решения о возможности дальнейшей работы двигателя.

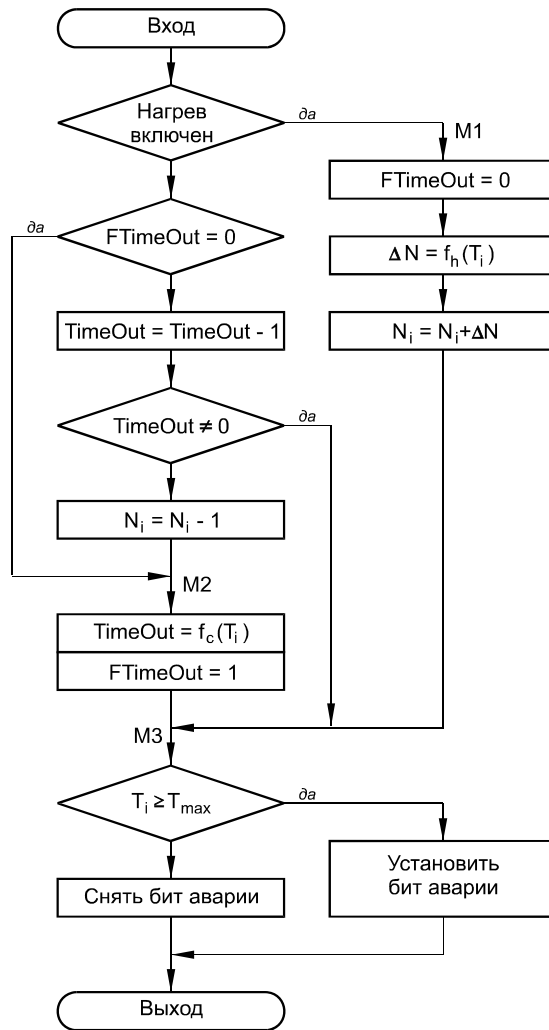


Рис.3. Алгоритм процедуры контроля температуры

Если напряжение на обмотку не подано, происходит проверка флага таймаута. Сразу после снятия напряжения с обмотки этот флаг будет сброшен, поэтому управление будет передано на метку M2 для установки флага и определения длительности таймаута в соответствии с табличным значением функции остывания. При последующих входах в процедуру при установленном флаге таймаута происходит декремент счетчика таймаута с дальнейшим анализом полученного значения счетчика: если таймаут не завершен, управление передается на метку M3, в противном случае уменьшается на единицу значение счетчика энергии  $N_i$ , и запускается новый таймаут в соответствии со значением функции остывания для обновленного значения температуры.

Программная процедура, начинающаяся с метки M3, осуществляет контроль температуры обмотки (текущего состояния счетчика накопленной энергии).

Если температура превышает предельно допустимую, устанавливается бит аварии, который запрещает дальнейшую работу двигателя во избежание его теплового разрушения, в противном случае бит аварии сбрасывается.

#### **4. Минимизация погрешности аппроксимации температурной функции с помощью кусочно-ломаной кривой**

Применение целочисленных методов вычислений предъявляет специфические требования к процедуре аппроксимации экспоненциальной функции остывания. К таким требованиям можно отнести следующее.

1. Точки перегиба кусочно-ломаной кривой, аппроксимирующей исходную функцию, должны соответствовать целочисленным значениям ординаты.

2. Угол наклона линейных участков кривой не может быть произвольным. Тангенс угла наклона должен равняться значению натуральной дроби с единицей в числителе, знаменателем которой является целое число минимальных квантов времени, необходимых для остывания обмотки на величину минимального кванта энергии.

3. Все операнды табличных функций должны быть представлены в виде однобайтных или двухбайтных чисел.

Для минимизации погрешности аппроксимации авторы предлагают использовать следующий метод.

Предположим, необходимо выполнить кусочно-ломаную аппроксимацию функции остывания для некоторого диапазона температур с максимальным значением  $T_0$ . Реальное изменение температуры во времени показано на рис. 4 в виде пунктирной кривой, выходящей из точки  $A$ . Остывание объекта на  $1^\circ\text{C}$  происходит за время  $t_0$ . Предлагаемая целочисленная модель предполагает, что скорость изменения температуры в пределах одного градуса должна выбираться из ряда дискретных значений, соответствующих приведенному выше условию 2. То есть, в результате моделирования температуры остывание объекта на один градус может быть достигнуто за время  $t_1, t_2, t_3 \dots$  в зависимости от выбранного дискретного значения скорости остывания. При этом возникнут соответствующие погрешности аппроксимации  $\Delta T_1, \Delta T_2, \Delta T_3 \dots$ , представляющие собой разность между реальной температурой объекта и температурой  $T_0 - 1$  в моменты времени  $t_1, t_2, t_3$  и так далее. Минимизация этой погрешности является главным критерием выбора из ряда дискретных значений угла наклона прямой, которая аппроксимирует функцию остывания на температурном интервале от  $T_0$  до  $T_0 - 1$ .

Предположим, что по результатам анализа погрешности на данном интервале выбрана скорость остывания  $V_2$ , а соответствующая ей аппроксимирующая прямая пересекает горизонталь  $T_0 - 1$  в некоторой точке  $B$ , которая и будет являться первой точкой перегиба кусочно-ломаной функции. Следует отметить, что в результате аппроксимации функции остывания на этом интервале уже возникла некоторая погрешность  $\Delta T_2$ , которая должна быть учтена при выборе угла наклона прямой, аппроксимирующей температурную функцию на следующем температурном интервале, с целью компенсации этой погрешности.

Именно поэтому точка  $B$  будет являться отправной точкой для построения следующего отрезка аппроксимации.



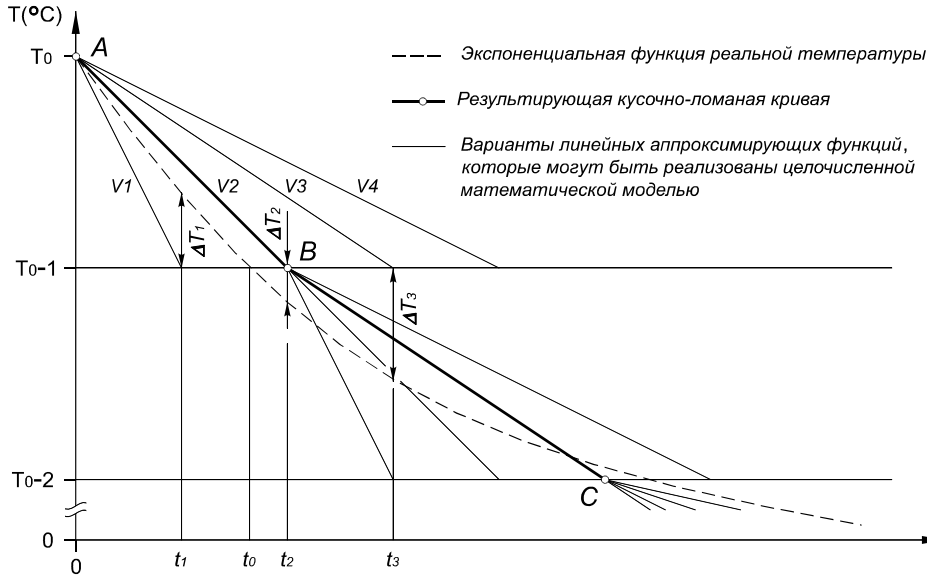


Рис.4. Механизм минимизации погрешности при аппроксимации функции остывания

Для реализации описанного механизма кусочно-ломаной аппроксимации был создан следующий итерационный алгоритм.

Исходными условиями для расчета очередного шага итерации является начальная целочисленная температура  $T_n$ , соответствующая предыдущей точке перегиба, и реальная температура объекта  $T_p$  в начальный момент времени. Как частный случай можно рассматривать условия входа в первый шаг итерации, при которых погрешности аппроксимации еще не существует и  $T_n = T_p$ .

В начале каждой итерации производится расчет времени, в течение которого температура объекта изменится от реального начального значения  $T_p$  до целого значения температуры  $T_n - 1$  в конце шага итерации. На рис. 4 этот период времени интерпретирован как  $t_0$ .

$$t_0 = 1000 \cdot \tau \cdot \ln \left( \frac{T_p - T_{en}}{T_n - 1 - T_{en}} \right), \tag{14}$$

где  $\tau$  — постоянная времени реального процесса остывания.

На основе полученного времени вычисляем параметр  $\xi$ , который представляет собой период изменения температуры в миллисекундах на один минимальный квант тепловой энергии, и по сути является величиной обратно пропорциональной скорости остывания объекта  $V$ . Определим  $\xi$  как отношение времени  $t_0$  к количеству минимальных квантов энергии  $\Delta E_1$ , соответствующих изменению температуры объекта на  $1^\circ\text{C}$ .

$$\xi = t_0 / \Delta E_1. \tag{15}$$

Полученное в результате расчета значение параметра  $\xi$  в большинстве случаев не будет являться целым числом. Для выбора целочисленного значения параметра  $\xi$ , удовлетворяющего рассматриваемой модели, проанализируем два ближайших целых значения, одно из которых ( $\xi_1$ ) меньше или равно полученному в результате расчета, а второе ( $\xi_2$ ) — больше или равно.

Для каждого из выбранных значений вычисляется время, необходимое для остывания объекта на  $1^\circ\text{C}$ :

$$t_1 = \xi_1 \Delta E_1, \quad t_2 = \xi_2 \Delta E_1. \quad (16)$$

Для оценки погрешности аппроксимации, которая возникнет в следствие использования того или иного целочисленного параметра, следует рассчитать реальные значения температуры объекта в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ :

$$T_p(t_1) = (T_p - T_{en}) \exp[-t_1/(1000\tau)] + T_{en}, \quad (17)$$

и аналогично

$$T_p(t_2) = (T_p - T_{en}) \exp[-t_2/(1000\tau)] + T_{en}. \quad (18)$$

Выражения вида:

$$|T_p(t_1) - T_n - 1| \quad \text{и} \quad |T_p(t_2) - T_n - 1| \quad (19)$$

представляют собой погрешности аппроксимации, полученные в результате использования целочисленного параметра  $\xi_1$  или  $\xi_2$  соответственно. Завершит шаг итерации выбор целочисленного значения  $\xi$ , для которого погрешность будет минимальна. В качестве начального значения  $T_n$  для следующего шага примем конечное значение данного шага  $T_n - 1$ , а значение температуры  $T_p$  положим равным реальному значению температуры в конечный момент времени при выбранном нами значении целочисленного параметра.

Данный алгоритм лег в основу программы, написанной на языке C#, с помощью которой выполнен расчет табличной функции остывания и проведен анализ погрешностей аппроксимации в диапазоне температур от  $120^\circ\text{C}$  до  $20^\circ\text{C}$ . График зависимости погрешности от температуры приведен на рис. 5.

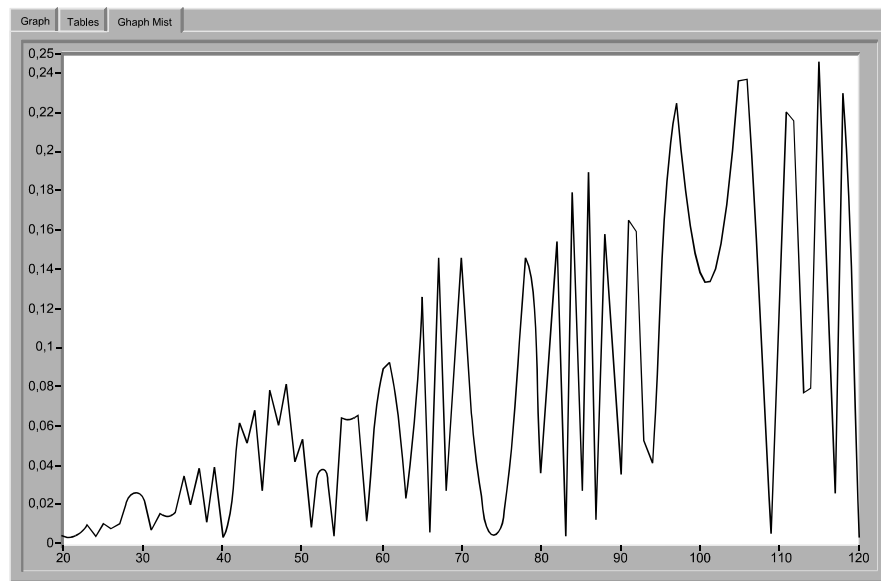


Рис.5. График зависимости погрешности аппроксимации от температуры

Как видно из графика максимальная погрешность аппроксимации лежит в районе верхней границы температурного диапазона и не превышает  $0,25^\circ\text{C}$ , что

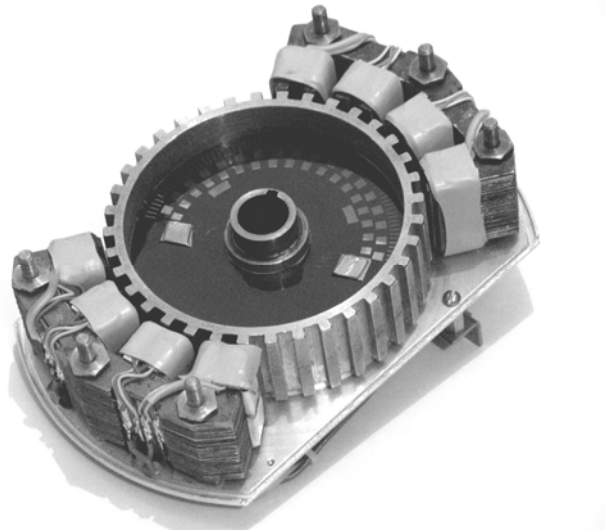
вполне допустимо при построении математической модели тепловых процессов с целью защиты статорных обмоток двигателя от перегрева.

### **5. Особенности применения приближенных расчетов**

Процедура теплового контроля статора, как и вся управляющая программа, написана на языке Assembler. Использование целочисленных методов в таком случае позволяет оптимизировать время выполнения этой процедуры во избежание замедления работы управляющей программы. Для этих целей была разработана алгоритмическая модель реального времени, описанная выше. Однако, при ее реализации возникли некоторые трудности при вычислении мгновенной температуры, связанные с отсутствием функции аппаратного деления в выбранном микроконтроллере. Для решения этой задачи существует два пути, а именно: написание математических библиотек, позволяющих производить деление, что существенно замедлило бы работу процессора, либо же использование в качестве деления операции сдвига вправо, что аналогично делению на числа, которые могут быть представлены в виде степени двойки. Для получения мгновенной температуры каждой группы обмоток значение соответствующего двухбайтного счетчика необходимо разделить на коэффициент  $k$ , численно равный 500. Использование операции сдвига вправо дает возможность разделить значение счетчика на 512, что внесет систематическую погрешность в расчет, а полученная температура всегда будет заведомо меньше на 2,34% по отношению к реальной. Выйти из сложившегося положения можно изменив границы диапазона допустимых температур, либо умножив значение полученной температуры на натуральную дробь, со знаменателем в виде степени двойки, отношение числителя и знаменателя которой равно соотношению 512 к 500. Такому условию удовлетворяет дробь 131/128, умножив расчетное значение температуры на 131, получим двухбайтное число, которое необходимо сдвинуть на 7 единиц вправо. Таким образом произведем корректировку полученного значения, в результате которой систематическая погрешность расчета составит менее 0,06% от реальной температуры.

### **6. Заключение**

Алгоритмическая модель, предложенная в данной работе, внедрена авторами в составе программы управления шаговыми двигателями створочных механизмов новой модели автоматизированного контрольного пункта АКП-93Н, которая разрабатывается лабораторией интеллектуальных электронных систем кафедры электроники и управляющих систем Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина. Этой же лабораторией разработан и шаговый двигатель, конструкция которого показана на рис. 6.



*Рис.6. Шаговый двигатель со снятой крышкой корпуса*

Экспериментальная проверка работы процедуры теплового контроля статорных обмоток подтвердила ее работоспособность. Реальная температура обмоток с высокой точностью эмулируется программой, благодаря чему своевременно происходит блокирование работы двигателя при нагреве статора до критической температуры. Эмпирическая оценка времени, необходимого для выполнения температурного контроля четырех групп статорных обмоток, показала, что при тактовой частоте 11,059 МГц микроконтроллер серии AtMega выполняет все необходимые процедуры не более чем за 13 мкс. Так как запуск процедуры происходит в прерываниях таймера с периодом 1 мс, можно определить, что степень загрузки процессора данной задачей не превышает 1,3%. Остальные 98,7% процессорного времени могут использоваться для задач аппаратного контроля и управления шаговым двигателем.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Френк Дж. Бартос. Выбор замкнутого контура шагового привода. //Control Engineering, Россия. – 2005. – №10.
2. Кенио Такаши. Шаговые двигатели и их микропроцессорные системы управления: Пер. с англ., М.: Энергоатомиздат, 1987. – 199с.
3. Клаассен К.Б. Основы измерения. Электронные методы и приборы в измерительной технике, М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.
4. Рева, Н.Н. Калиниченко, В.Н. Лященко. Реализация математической модели тепловых процессов в рентгеновских трубках с вращающимся анодом с целью их защиты от перегрузки. //Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління» – №605, вип. 2, – 2003, с.106-117.

Надійшла у першій редакції 09.03.2009, в останній – 02.04.2009.