Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 517.95+518.517
№ 847, 2009, с.251-265

Нормальные и нормализованные уравнения геометрических объектов в методе R-функций

К. В. Максименко-Шейко
Институт проблем машиностроения им. А.Н.Подгорного НАН Украины, Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

This work is devoted to an examination and a justification of some constructive tools of the R-functions method in a combination to known tools of the analytical geometry, which are used at construction of normal and normalized equations of boundaries and parts of boundaries of geometrical objects. Illustrative examples for the suggested approaches are shown.

Введение. Бурное развитие компьютерной техники привело к развитию приближенных методов решения краевых задач математической физики в областях сложной формы. МКЭ, разностные методы позволили решить целый ряд практических задач расчета температурных, силовых, деформационных, гидродинамических, электродинамических, магнитных и других полей различной физической природы. И лишь классические вариационные методы типа Ритца-Галеркина, наименьших квадратов и др. применялись только для областей простейшей формы: круг, прямоугольник. Дж. Ортега и В. Рейнболдт по этому поводу писали: ”Хотя формально метод Ритца распространяется на двухмерные вариационные задачи и задачи более высокой размерности, здесь имеется серьезная практическая трудность, состоящая в построении подходящих базисных функций для общих областей” [1]. Так в середине XX века возродилась проблема, сформулированная еще Декартом и известная как обратная задача аналитической геометрии: задан геометрический объект, требуется написать его уравнение.

Компьютерный век породил теорию R-функций — функций с “логическим зарядом”, возникшую на стыке дискретного и непрервыного анализов, использовавшую аппарат булевой алгебры, который органически присущ и ЭВМ. На основе теории R-функций была решена обратная задача аналитической геометрии, появилась возможность строить в виде элементарной функции уравнения границ сложных геометрических объектов (ГО) $\omega(P)=0$, и притом такие уравнения, которые обладали бы необходимыми дифференциальными свойствами. В.Л.Рвачев с помощью конструктивного аппарата теории R-функций разработал единый подход к проблеме построения координатных последовательностей для основных вариационных и проекционных методов. Речь идет не только о задаче Дирихле, а о краевых условиях самых различных типов для областей практически произвольной формы [2]. Так, на границе ГО могут быть заданы соотношения между значениями функции, производными по нормалям, по касательным или по другим направлениям до некоторого порядка.

Заметим, что производные $\frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial u}{\partial \tau}$ представляют собой операторы, определенные лишь в точках границы ГО, что приводит к необходимости их продолжения за пределы границы ГО. Для этого в работе [3] введены операторы $D_1 u = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial y}$ и $T_1 u = -\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial x}$ такие, что $D_1 u\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \nu}$, $T_1 u\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \tau}$, где ν — внутренняя нормаль к границе $\partial\Omega$ ГО Ω. При этом предполагается, что функция ω кусочно-дифференцируема и нормализована до первого порядка, т.е. выполняются условия $\omega\big|_{\partial\Omega} = 0$, $\left.\frac{\partial \omega}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 1$.

Целью работы является исследование и обоснование некоторых конструктивных средств метода R-функций, используемых при построении уравнений границ и участков границ ГО.

Основная часть. В отличие от классического понятия нормали, которое вводится для гладких чертежей, нам понадобится обобщение этого понятия, которое в принципе годится для любого замкнутого множества.

Пусть $\partial\Omega \subset E^n$ есть некоторое замкнутое множество, P — некоторая точка на $\partial\Omega$, а $\{Q_i\}$— множество ближайших к точке P точек. Из точек $\{Q_i\}$ проведем единичные векторы в направлении к точке P и назовем их нормалями к $\partial\Omega$. Осуществим такое построение для всевозможных точек $P \in \partial\Omega$. В результате получаем множество, которое назовем множеством нормалей к $\partial\Omega$. Например, для ГО, изображенного на рис.1, это множество имеет следующий вид: для гладких участков ГО (точки A, B, E) это обобщение нормали совпадает с обычным, а для некоторых точек (для точки D и для внутренних точек зачерненной области) множество нормалей является пустым. Угловым точкам (C) соответствует целый “веер” нормалей, размерность которого зависит от размерности пространства и размерности ГО в окрестности рассматриваемой точки. Для этого веера нормалей характерным является следующее: если $\nu_1,\ldots,\nu_m$ — какие-то из нормалей этого веера, то и векторы $\alpha_1\vec{\nu}_1 + \ldots + \alpha_m\vec{\nu}_m$, где $\alpha_i \geq 0$, $\sum \alpha_i^2 = 1$, также принадлежат этому вееру. Очевидно, что он заключен в некоторый конус, содержащийся в E^n. Размерность этого конуса равняется размерности минимального подпространства E^n, в который он может быть заключен. Если точка принадлежит гладкому участку ГО, который имеет размерность m, то размерность веера нормалей равна $n-m$, где n — размерность пространства. Размерность границы элемента размерности m не превосходит $m-1$. Например, пусть в трехмерном пространстве ГО есть поверхность куба плюс некоторая ломаная ABC. Тогда грань куба имеет размерность 2, соответствующий ей веер нормалей для внутренних точек грани имеет размерность 1. Размерность ребра равна 1, а веера нормалей — 2. Для вершин куба, имеющих размерность 0, веер нормалей имеет размерность 3. Для внутренних точек куба веер нормалей является пустым множеством.

В общем случае имеем равенство $n - m - t = 0$, где t — размерность веера.

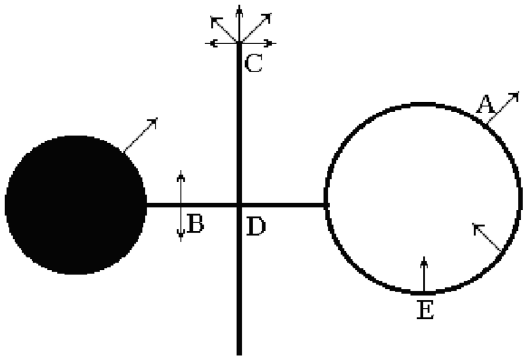


Рис.1. Множество нормалей к границе ГО

Используя понятие нормали, можно определить такие характеристики ГО, как размерность составляющих его частей и их гладкость.

В аналитической геометрии хорошо известны нормальные уравнения прямой $x\cos\vartheta_1 + y\cos\vartheta_2 - p = 0$ и плоскости $x\cos\alpha_1 + y\cos\alpha_2 + z\cos\alpha_3 - p = 0$. Эти уравнения обладают замечательным свойством: результат подстановки в их левую часть координат какой-либо точки равняется (с точностью до знака) расстояниям от этой точки до прямой или плоскости соответственно. Это свойство наводит на мысль ввести общее понятие нормального уравнения ГО.

<u>Определение</u>**.** Уравнение $f(P) = 0$ называется нормальным уравнением ГО $\Omega \subset E^n$, если $f(P) = \inf\limits_{P \in \partial\Omega} \|P - Q\|$, где $\|...\|$ — норма в E^n. Функцию $f(P)$ будем называть нормальной функцией ГО Ω. **(**Следует отметить, что $f(P)$ зависит от выбора нормы.)

Приведенное выше определение нормального уравнения несколько отличается от того, которое было дано нормальному уравнению прямой. Действительно, в соответствии с данным определением мы должны будем нормальным уравнением прямой называть уравнение: $|x\cos\alpha + y\sin\alpha - p| = 0$. В этом есть некоторое неудобство, поскольку раньше существенной характеристикой уравнения прямой была его линейность. Однако это окупается приобретенным достоинством — общностью понятия нормального уравнения. Нормальное уравнение окружности радиуса R с центром в точке (a, b) имеет вид $\left| R - \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \right| = 0$.

К настоящему времени многими авторами построено большое число нормальных функций ГО. Например, нормальные уравнения отрезка прямой и дуги окружности в 2D были построены еще в 60-е годы [4]. В частности, нормальное уравнение отрезка, соединяющего точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ на плоскости было получено в виде

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{f_1^2}{l^2}+\frac{\left[l^2-|f_2|\right]^2}{2l^2}\times\left[1-sign\left(1-\frac{f_2^2}{l^4}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}=0,$$

где $\ell=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$,

$f_1=(2x-x_1-x_2)(y_2-y_1)+(2y-y_1-y_2)(x_2-x_1)$,

$f_2=(2x-x_1-x_2)(x_2-x_1)+(2y-y_1-y_2)(y_2-y_1)$.

Нормальное уравнение дуги окружности с концами в точках $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ и углом θ между касательной к дуге в точке (x_1,y_1) и хордой $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ имеет вид

$$\eta(\bar{x},\bar{y})+\frac{1}{2}\left[\xi(\bar{x},\bar{y})-\eta(\bar{x},\bar{y})\right]\left[1-sign\varsigma(\bar{x},\bar{y})\right]=0,$$

где $\bar{x}=\frac{1}{2\ell}\left[(2x-x_1-x_2)(x_2-x_1)+(2y-y_1-y_2)(y_2-y_1)\right];$

$$\bar{y}=-\frac{1}{2\ell}\left[(2x-x_1-x_2)(y_2-y_1)-(2y-y_1-y_2)(x_2-x_1)\right];$$

$$\ell=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\;;\;\xi=\sqrt{\left(|x|-\frac{\ell}{2}\right)^2+y^2}\;;$$

$$\eta=\left|\frac{\ell}{2\sin\theta}-\frac{1}{2\sin\theta}\sqrt{4x^2\sin^2\theta+(2y\sin\theta+\ell\cos\theta)^2}\right|;$$

Заметим, что при $\theta\to 0$ нормальная функция дуги переходит в нормальную функцию хорды, так как при этом $\eta\to|y|;\varsigma\to\frac{\ell}{2}-|x|$, а величина ξ не зависит от θ. Поэтому получаем выражение, тождественно совпадающее с приведенной выше нормальной функцией отрезка, а именно

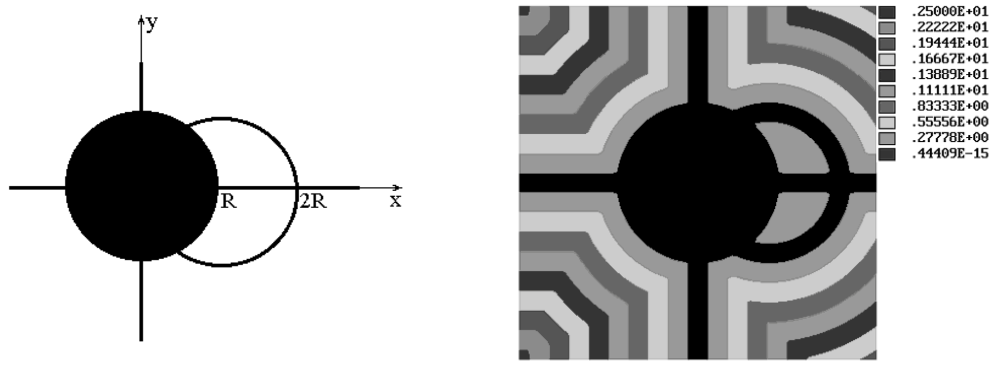
$$|\bar{y}|+\frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(|\bar{x}|-\frac{\ell}{2}\right)^2+\bar{y}^2}-|\bar{y}|\right]\left[1-sign\left(\frac{\ell}{2}-|\bar{x}|\right)\right]=0.$$

<u>Теорема.</u> Если $f_i(x,y)$ — нормальные функции ГО Ω_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$, то функция $\varphi(x,y)=f_1(x,y)\wedge_1\ldots\wedge_1 f_m(x,y)$ есть нормальная функция соединения ГО Ω_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$.

<u>Доказательство.</u> Действительно, так как $x\wedge_1 y\equiv\frac{1}{2}\left(x+y-|x-y|\right)=\min(x,y)$, имеем $\varphi(x,y)=\min(f_1,\ldots,f_m)=\rho((x,y),\Omega)$, где $\Omega=\Omega_1\cup\ldots\cup\Omega_m$.

С помощью этой теоремы, располагая нормальными уравнениями отрезка и дуги, нетрудно написать нормальное уравнение произвольного ГО, состоящего из дуг окружностей и отрезков прямых. Естественно, что эту процедуру легко автоматизировать.

Пусть требуется написать формулу для определения расстояния от любой точки плоскости xOy до ГО Ω, изображенного на рис.2, состоящего из осей координат, круга радиуса R с центром в начале координат и окружности того же радиуса с центром в точке $(R,0)$.



а) *б)*

Рис.2. ГО, состоящий из круга, окружности и осей координат: а) вид ГО; б) линии уровня нормального уравнения ГО

Уравнение круга с центром в начале координат: $\frac{1}{2}\left(\left|R-\sqrt{x^2+y^2}\right|-R+\sqrt{x^2+y^2}\right)=0.$

Уравнение окружности с центром в точке $(R,0)$: $\left|R-\sqrt{(x-R)^2+y^2}\right|=0.$ Уравнения осей координат: $|x|=0,\quad |y|=0.$ Тогда, согласно теореме, получаем следующее нормальное уравнение ГО Ω:

$$\left\{\frac{1}{2}\left(\left|R-\sqrt{x^2+y^2}\right|-R+\sqrt{x^2+y^2}\right)\wedge_1\left|R-\sqrt{(x-R)^2+y^2}\right|\wedge_1|x|\wedge_1|y|\right\}=0\,.$$

Если в это уравнение подставить координаты какой-либо точки плоскости, то получим ее расстояние до ГО Ω (рис.2).

Если $f(P)$- нормальная функция ГО Ω, то для нее справедливы равенства

$$f(P)\Big|_{\partial\Omega}=0,\frac{\partial f}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega}=1,\frac{\partial^k f}{\partial\nu^k}\Big|_{\partial\Omega}=0,(k=2,3,...) \qquad (1)$$

где ν — нормаль.

Определение. Уравнение $\omega(P)=0$ границы ГО Ω называется нормализованным до m-го порядка, если функция $\omega(P)$ удовлетворяет условиям

$$\omega(P)\Big|_{\partial\Omega}=0,\frac{\partial\omega}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega}=1,\frac{\partial^k\omega}{\partial\nu^k}\Big|_{\partial\Omega}=0,(k=2,3,...,m)\,. \qquad (2)$$

Условия (2) означают, что вдоль нормали, проведенной в точке $P_0\in\partial\Omega$, функция $\omega(P)$ примерно равна расстоянию $r=r(P,\ \partial\Omega)$ точек этой нормали от границы $\partial\Omega$ ГО. Действительно, раскладывая функцию ω в окрестности точки $P_0 \in \partial\Omega$ по направлению нормали ν, получаем

$$\omega(P) = r + \frac{1}{(n+1)!}\frac{\partial^{m+1}\omega(P_0 + \theta r\nu)}{\partial\nu^{m+1}} r^{m+1},$$

где $0 < \theta < 1, \nu = (\nu_1, \nu_2, ...), r = \|P_0 - P\|$. Очевидно, что нормальное уравнение границы ГО в силу формул (1) является нормализованным до любого порядка. Однако недостатком нормального уравнения $f(P) = 0$ является то, что функция $f(P)$ во внутренних точках ГО не всегда дифференцируема.

Методика построения уравнений границ ГО, описанная в [2,3], позволяет обеспечить выполнение условия

$$\left.\frac{\partial\omega}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega} \neq 0. \qquad (3)$$

Действительно, если $\Sigma_i = [\sigma_i(x, y) \geq 0]$ и $\left.\frac{\partial\sigma_i}{\partial\nu_i}\right|_{\partial\Sigma_i} \neq 0$ (это условие для опорных функций обычно легко выполнить), где ν_i - нормаль к $\partial\Sigma_i$, то при использовании достаточно полных систем *R*-функций R_α, R_p в тех точках $\partial\Omega$, где одновременно $\omega = 0$ и $\sigma_i = 0$ получаем

$$\left.\frac{\partial\omega}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega} = \pm\left.\frac{\partial\sigma_i}{\partial\nu_i}\right|_{\partial\Omega} \neq 0. \qquad (4)$$

Если принять, что нормаль ν направлена в область, где $\omega > 0$, то условие (3) можно уточнить: $\left.\frac{\partial\omega}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega} > 0$. Располагая уравнением $\omega_1 = 0$, таким, что $\left.\frac{\partial\omega_1}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega} > 0$, нетрудно построить уравнение $\partial\Omega$ $\omega = 0$, нормализованное до первого порядка.

<u>Теорема</u>. Если $\omega_1 \in „^m$ удовлетворяет условиям $\omega_1|_{\partial\Omega} = 0$ и $\left.\frac{\partial\omega_1}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega} > 0$, то функция

$$\omega \equiv \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 + (\nabla\omega_1)^2}} \in C^{m-1} \qquad (5)$$

удовлетворяет условиям нормализованности до первого порядка во всех точках элементов границы $\partial\Omega$ ГО, где определена нормаль.

<u>Доказательство.</u> Из условия $\omega_1|_{\partial\Omega} = 0$ следует, что на $\partial\Omega$ функция ω сохраняет постоянное значение. Известно, что градиент функции нормален к ее эквипотенциалям. Следовательно, в силу условия $\left.\frac{\partial\omega_1}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega} > 0$, нормаль ν имеет

направление вектора $grad\omega_1$. Поэтому, $\nu = \frac{\nabla\omega_1}{|\nabla\omega_1|}, \frac{\partial\omega_1}{\partial\nu} = |\nabla\omega_1|$. Дифференцируя (5), получаем

$$\left.\frac{\partial\omega}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega} = \frac{\partial\omega_1}{\partial\nu}\left[\omega_1^2 + (\nabla\omega_1)^2\right]^{-1/2} + \omega_1\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\omega_1^2 + (\nabla\omega_1)^2\right]^{-1/2}\Bigg|_{\partial\Omega} = \frac{\partial\omega_1}{\partial\nu}|\nabla\omega_1|^{-1}\Bigg|_{\partial\Omega} = 1.$$

Из доказательства этой теоремы следует, что выражение в знаменателе в формуле (5) можно заменить любым другим, не обращающимся в нуль выражением, совпадающим на $\partial\Omega$ с $|\nabla\omega_1|^{-1}$. Это позволяет применять также следующую формулу:

$$\omega \equiv \frac{\omega_1}{|\nabla\omega_1|\,|_{\partial\Omega}} \tag{6}$$

в предположении, что $|\nabla\omega_1|\,|_{\partial\Omega} \neq 0$ и имеется простая возможность продолжить $|\nabla\omega_1|\|_{\partial\Omega}$ внутрь области Ω так, что это продолжение не обращается в нуль. Например, если $\omega_1 = y - \varphi(x)$, $|\nabla\omega_1| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2}$, то нормализованное уравнение находим по формуле

$$\omega = \frac{y - \varphi(x)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2}}. \tag{7}$$

Аналогично, если $\omega_1 = x - \psi(y)$, $|\nabla\omega_1| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2}$, можем написать

$$\omega = \frac{x - \psi(y)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2}}. \tag{8}$$

По этим формулам удобно приводить к нормализованному виду функции, заданные явно. Однако, для функций $\omega(x, y)$ сложного вида непосредственное применение формул (5)-(6) сопряжено со значительными вычислительными трудностями. Поэтому на практике чаще применяется другой более экономный метод, базирующийся на свойствах некоторых систем R-операций, позволяющий, нормализовав опорные функции (примитивы), перенести это их свойство на уравнение соответствующего сложного ГО.

Скажем несколько слов о нормализации примитивов. Для таких простых областей, как полуплоскость, полоса, слой, круг, сфера и многих других, нормализованные уравнения получаются путем введения простых нормировочных множителей.

Например, нормализованное уравнение окружности можно записать одним из трех способов:

$$\frac{R^2-x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\ ,\quad \frac{R^2-x^2-y^2}{2R}=0\,,\quad \frac{R^2-x^2-y^2}{\sqrt{3R^2+x^2+y^2}}=0\,. \tag{9}$$

Первое из этих уравнений имеет разрыв в начале координат, поэтому мы его рассматривать не будем. Второе из них до настоящего времени применялось наиболее часто. Однако, при $R\to 0$ оно, вопреки ожиданиям, не переходит в нормальное уравнение точки, которое имеет вид $\sqrt{x^2+y^2}=0$. И лишь третье уравнение удовлетворяет всем условиям: непрерывности, дифференцируемости, и переходу к нормальному уравнению точки при $R\to 0$. Для горизонтальной полосы нормализованные уравнения можно записать в виде:

$$\frac{b^2-y^2}{2b}=0\,,\quad \frac{b^2-y^2}{\sqrt{3b^2+y^2}}=0\,. \tag{10}$$

Анализ этих уравнений аналогичен предыдущему. Второе из уравнений при $b\to 0$ переходит в нормальное уравнение $|y|=0$ оси абсцисс.

<u>Теорема</u>**.** Пусть $\{\Sigma_i=(\sigma_i\ge 0)\}$ есть некоторая система ГО, уравнения границ которых $\sigma_i=0$ нормализованы до первого порядка : $\frac{\partial\sigma_i}{\partial\nu_i}=1$ на $\partial\Sigma_i$. Тогда при использовании систем R-функций R_α, R_p для построения функции $\omega=f(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_k)$ будет выполняться условие нормализованности $\left.\frac{\partial\omega}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega}=1$, где ν — нормаль к $\partial\Omega$, направленная в область $\Omega=(\omega\ge 0)$.

Доказательство этой теоремы приведено в [2]. Таким образом, если уравнения $\sigma_i=0$ опорных областей нормализованы до первого порядка, то автоматически оказывается нормализованным и уравнение $\omega(P)=0$ границы сложной области Ω. Более того, если использовать систему R_p при $p>m+1$, то из нормализованности опорных неравенств $\sigma_i(P)\ge 0$ до порядка m следует нормализованность до порядка m и уравнения $\omega(P)=0$ [2].

Однако описанный алгоритм построения нормализованных уравнений может не сработать в точках стыка элементов, даже если в этих точках граница является гладкой. При этом во всех остальных точках ГО уравнение $\omega=0$ будет нормализованным. Проследим это явление на примере.

<u>Пример.</u> Пусть $\Omega=\Sigma_1\wedge\Sigma_2$, где $\Sigma_1=\left(\frac{y-x^3}{\sqrt{1+9x^4}}\ge 0\right)$ — область, расположенная выше кубической параболы, $\Sigma_2=(y\ge 0)$ — верхняя полуплоскость. Каждое из неравенств нормализовано на границе соответствующей ему области. Очевидно, что граница $\partial\Omega$ — гладкая. Уравнение $\partial\Omega$ можно записать в виде

$$\omega \equiv \frac{y-x^3}{\sqrt{1+9x^4}} \wedge_\alpha y \equiv \frac{1}{1+\alpha}\left[\frac{y-x^3}{\sqrt{1+9x^4}} + y - \sqrt{\left(\frac{y-x^3}{\sqrt{1+9x^4}}\right)^2 + y^2 - 2\alpha y \frac{y-x^3}{\sqrt{1+9x^4}}}\right] = 0.$$

Тогда $\left.\frac{\partial\omega}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = \frac{2-\sqrt{2-2\alpha}}{1+\alpha}$. Таким образом производная по нормали к $\partial\Omega$ в точке $(0,0)$ равна единице, если α=1. Но если взять $\alpha \equiv 1$, то это будет означать, что мы решили воспользоваться R-операцией $x \wedge_1 y$, которая приводит к недифференцируемости функции ω внутри рассматриваемой области. В других же точках $\partial\Omega$ условие $\frac{\partial\omega}{\partial\nu} = 1$ выполняется при любых значениях α<1. Для устранения этого недостатка выберем функцию α, удовлетворяющую условию $|\alpha| < 1$, так, чтобы при $P \to (0,0)$ $\alpha \to 1$. Реализовать это можно различными способами, например, представив α формулой $\alpha = \left(1 + \left(\frac{y-x^3}{\sqrt{1+9x^4}}\right)^2 + y^2\right)^{-1}$.

При таком подходе величина α, входящая в систему $\{R_\alpha\} = \begin{cases} \omega_1 \wedge_\alpha \omega_2 = \dfrac{1}{1+\alpha}\left(\omega_1 + \omega_2 - \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\alpha\omega_1\omega_2}\right) \\ \omega_1 \vee_\alpha \omega_2 = \dfrac{1}{1+\alpha}\left(\omega_1 + \omega_2 + \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\alpha\omega_1\omega_2}\right) \end{cases}$, зависит от опорных функций. Такое представление особенно удобно в тех случаях, когда точки стыка элементов границы заранее неизвестны или трудно определимы. Т.е. α можно выбирать в виде

$$\alpha = \left(1 + \omega_1^2 + \omega_2^2\right)^{-1} \tag{11}$$

Очевидно, что при таком выборе α условие $\alpha < 1$ выполняется везде, за исключением точек стыка элементов $\omega_1 = 0$ и $\omega_2 = 0$, где $\alpha = 1$.

<u>Пример.</u> Написать нормализованное во всех регулярных точках границы уравнение ГО, изображенного на рис.3.

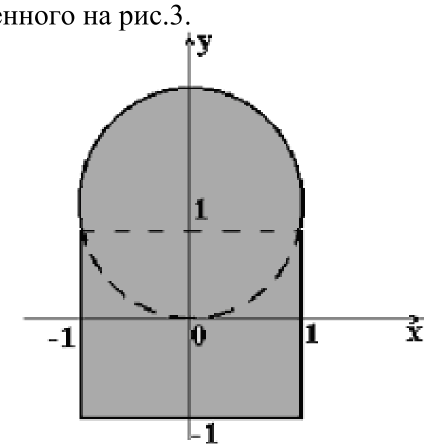
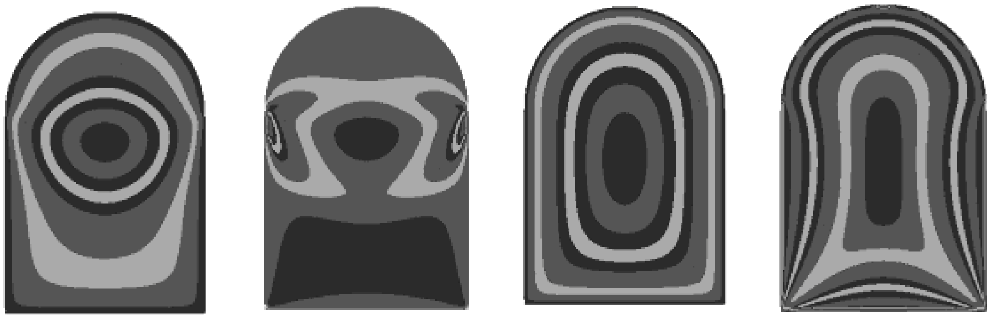


Рис.3. Вид ГО с гладкой границей

В качестве опорных областей выбираем

$$\Sigma_1=\left[\frac{1-x^2}{2}\ge 0\right],\ \Sigma_2=\left[\frac{1-y^2}{2}\ge 0\right],\ \Sigma_3=\left[\frac{1-x^2-(y-1)^2}{2}\ge 0\right].$$

Все приведенные неравенства нормализованы. Логическую формулу для ГО Ω строим в виде $\Omega=(\Sigma_1\wedge\Sigma_2)\vee\Sigma_3$. Если при построении уравнения границы ГО заменить символы $\wedge,\vee$ на $\wedge_0,\vee_0$, то получим функцию ω, для которой условие нормализованности в точках $(-1,1),(1,1)$ будет нарушено, хотя в этих точках граница построенной области является гладкой. Это явление достаточно ярко отражено как на картине линий уровня функции ω (рис.4,а), так и на картине линий уровня $\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2$ (рис.4,б). Если же заменить символы $\wedge_0,\vee_0$ на $\wedge_\alpha,\vee_\alpha$, где $\alpha=\frac{1}{1+\omega_1^2+\omega_3^2}$, то получим результат, представленный на рис.4, в), г), который иллюстрирует поведение функции ω после устранения дефекта, связанного с нарушением ее нормализованности в точках $(-1,1),(1,1)$.



а) б) в) г)

Рис.4. Исследования функции ω при использовании различных R-операций: а) линии уровня функции ω при использовании $\wedge_0,\vee_0$; б) линии уровня функции $(\nabla\omega)^2$ при использовании $\wedge_0,\vee_0$; в) линии уровня функции ω при использовании $\wedge_\alpha,\vee_\alpha$; г) линии уровня функции $(\nabla\omega)^2$ при использовании $\wedge_\alpha,\vee_\alpha$

Рассмотрим вопрос о построении нормализованных до первого порядка уравнений элементов границ.

Теорема**.** Если $\partial\Omega=(\omega=0)$ — нормализованное до первого порядка уравнение границы $\partial\Omega,\Sigma=(\sigma\ge 0)$ — некоторая область, то уравнение

$$\omega_1\equiv\sqrt{\omega^2\,\tilde{\vee}\,\bar{\sigma}}=0,\qquad(12)$$

где под символом $\tilde{\vee}$ подразумевается символ одной из R-дизъюнкций $\vee_\alpha \left(|\alpha<1|,\ \alpha=const\right),\ \vee_p\ (p\ge 2),\ \overset{0}{\underset{m}{\vee}}\ (m>1)$, является нормализованным уравнением элемента $\partial\Omega_1=\partial\Omega\bigcap\Sigma$.

<u>Доказательство.</u> Как показано в [2], уравнение (12) есть уравнение $\partial\Omega_1$. Пусть для определенности $\tilde{\vee}=\vee_\alpha$. Тогда при $\sigma>0$

$$\omega^2\vee_\alpha\bar{\sigma}=\frac{1}{1+\alpha}\left(\omega^2-\sigma+\sqrt{\omega^4+\sigma^2+2\alpha\omega^2\sigma}\right)=\frac{1}{1+\alpha}\left(\omega^2-\sigma+\sigma\sqrt{1+\frac{\omega^4+2\alpha\omega^2\sigma}{\sigma^2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{1+\alpha}\left(\omega^2-\sigma+\sigma\left[1+\frac{2\alpha\omega^2}{\sigma}+o\left(\omega^2\right)\right]\right)=\omega^2+o\left(\omega^2\right)$$

Следовательно, $\omega_1=\sqrt{\omega^2+o\left(\omega^2\right)}=|\omega|+o(\omega)$. Поэтому $\dfrac{\partial\omega_1}{\partial\nu}=\dfrac{\partial\omega}{\partial\nu}sign\omega+o(\omega)$. Таким образом, учитывая, что $\omega>0$ в области Ω, получаем: $\left.\dfrac{\partial\omega_1}{\partial\nu}\right|_{\omega=+0}=\left|\dfrac{\partial\omega}{\partial\nu}\right|=1$, что и требовалось доказать. Однако остался неисследованным вопрос о поведении функции ω_1 при $\omega\to 0,\sigma\to 0$, т.е. в концевых точках выделенного элемента границы. Для наглядности рассмотрим $\omega_1=\sqrt{\omega^2\vee_0\bar{\bar{\sigma}}}$ в случае, когда $\omega\equiv y\ge 0;\ \sigma\equiv -x\ge 0$. Тогда

$$\omega_1=\sqrt{y^2\vee_0 x}=\sqrt{y^2+x+\sqrt{y^4+x^2}}=\sqrt{r}\sqrt{r\sin^2\theta+\cos\theta+\sqrt{r^2\sin^4\theta+\cos^2\theta}},$$

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial r}=\frac{1}{2\sqrt{r}}\sqrt{r\sin^2\theta+\cos\theta+\sqrt{r^2\sin^4\theta+\cos^2\theta}}+$$

$$+\sqrt{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{r\sin^2\theta+\cos\theta+\sqrt{r^2\sin^4\theta+\cos^2\theta}}\right),$$

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial r}\underset{r\to 0}{\longrightarrow}\frac{1}{2}\sqrt{\sin^2\theta+\frac{1}{r}\cos\theta+\sqrt{\sin^4\theta+\frac{1}{r^2}\cos^2\theta}}\underset{r\to 0}{\longrightarrow}\infty\Theta(\theta),$$

т.е. имеется корневая особенность, зависящая от угла θ (рис.6, а), рис.6, г) — кривая **1**).

Остановимся на одном из подходов, касающихся полной нормализации уравнений участков границ ГО. Для этого в работе [5] была проведена модификация формулы (12). Однако при этом не были проведены ни доказательства, ни вычислительные эксперименты.

<u>Теорема.</u> Пусть $f=0$ — нормализованное уравнение некоторой кривой $\partial\Omega$, $\tilde{\varphi}\ge 0$ — некоторая область Ω_1, выделяющая на кривой $\partial\Omega$ элемент $\partial\Omega_1$, функция $\tilde{\varphi}$ также нормализована (рис5). Тогда нормализованное в обобщенном смысле уравнение участка границы $\partial\Omega_1$ имеет вид

$$\omega_1 \equiv \left[\frac{1}{4}\left(\sqrt{f^4+\varphi^2}-\varphi\right)^2+f^2\right]^{0.5}=0, \tag{13}$$

где $\varphi=\tilde{\varphi}-f(\nabla f,\nabla\tilde{\varphi})$.

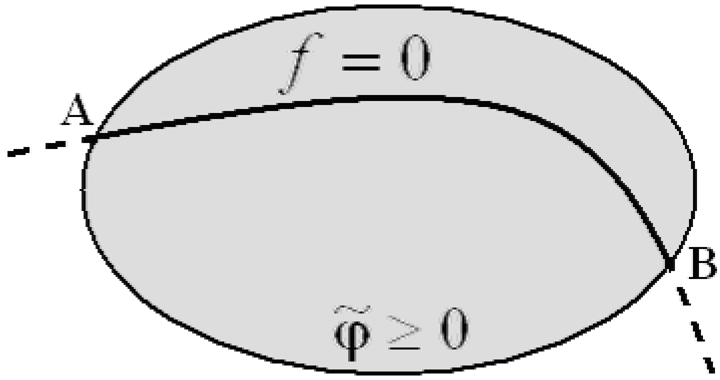


Рис.5. Схема выделения участка кривой

<u>Доказательство.</u> Построение функции φ в виде $\varphi=\tilde{\varphi}-f(\nabla f,\nabla\tilde{\varphi})$ позволяет обеспечить условие ортогональности кривых $f=0$ и $\varphi=0$ в концевых точках A и B выделенного участка кривой. Проверим выполнение условия ортогональности $(\nabla f,\nabla\varphi)\big|_{\substack{f=0\\ \varphi=0}}=0$. Действительно, так как $(\nabla f)^2\Big|_{f=0}=1$ в силу нормализованности, получим

$$(\nabla f,\nabla\varphi)\big|_{\substack{f=0\\ \tilde{\varphi}=0}}=\left(\nabla f,\nabla\tilde{\varphi}-\nabla f(\nabla f,\nabla\tilde{\varphi})-f\nabla(\nabla f,\nabla\tilde{\varphi})\right)\big|_{\substack{f=0\\ \tilde{\varphi}=0}}=$$

$$=(\nabla f,\nabla\varphi_i)-(\nabla f)^2(\nabla f,\nabla\varphi_i)\big|_{\substack{f=0\\ \varphi_i=0}}=0.$$

Если f, $\varphi\in C^1(R^n)$, то производная от ω_1 по произвольному направлению l имеет вид

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial l}=\frac{f\dfrac{\partial f}{\partial l}\sqrt{f^4+\varphi^2}+\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{f^4+\varphi^2}-\varphi\right)\left(2f^3\dfrac{\partial f}{\partial l}-\dfrac{\partial\varphi}{\partial l}\left(\sqrt{f^4+\varphi^2}-\varphi\right)\right)}{\sqrt{f^4+\varphi^2}\left[\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{f^4+\varphi^2}-\varphi\right)^2+f^2\right]^{0.5}}=$$

$$=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial l}\left(f\sqrt{f^4+\varphi^2}+f^3\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{f^4+\varphi^2}-\varphi\right)\right)-\dfrac{\partial\varphi}{\partial l}\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{f^4+\varphi^2}-\varphi\right)^2}{\sqrt{f^4+\varphi^2}\left[\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{f^4+\varphi^2}-\varphi\right)^2+f^2\right]^{0.5}}=A\frac{\partial f}{\partial l}+B\frac{\partial\varphi}{\partial l},$$

$$A=\frac{f\sqrt{f^4+\varphi^2}+f^3\,\frac{1}{2}\left(\sqrt{f^4+\varphi^2}-\varphi\right)}{\sqrt{f^4+\varphi^2}\left[\frac{1}{4}\left(\sqrt{f^4+\varphi^2}-\varphi\right)^2+f^2\right]^{0.5}},$$

где

$$B=-\frac{\frac{1}{4}\left(\sqrt{f^4+\varphi^2}-\varphi\right)^2}{\sqrt{f^4+\varphi^2}\left[\frac{1}{4}\left(\sqrt{f^4+\varphi^2}-\varphi\right)^2+f^2\right]^{0.5}}.$$

Тогда

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial n}=\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial y}\right)^2=\left(A\frac{\partial f}{\partial x}+B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(A\frac{\partial f}{\partial y}+B\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=$$

$$=A^2\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]+B^2\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]+2AB\left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right],$$

$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{\substack{f=0\\ \varphi=0}}=0$, так как функции f и φ ортогональны в концевых точках, а $\left.\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right|_{f=0}=1;$ $\left.\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right|_{\varphi=0}=1$, так как функции f и φ — нормализованы. Кроме того, вдоль нормали функции f, φ примерно равны расстоянию до границы. Тогда

$$A=\frac{r\sqrt{r^4+r^2}+r^3\,\frac{1}{2}\left(\sqrt{r^4+r^2}+r\right)}{\sqrt{r^4+r^2}\left[\frac{1}{4}\left(\sqrt{r^4+r^2}+r\right)^2+r^2\right]^{0.5}},\ B=-\frac{\frac{1}{4}\left(\sqrt{r^4+r^2}+r\right)^2}{\sqrt{r^4+r^2}\left[\frac{1}{4}\left(\sqrt{r^4+r^2}+r\right)^2+r^2\right]^{0.5}}$$

$A\underset{r\to0}{\to}\frac{1}{\sqrt{2}}$, $B\underset{r\to0}{\to}\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\frac{\partial\omega}{\partial\nu}=1$ в концевых точках. Теорема доказана.

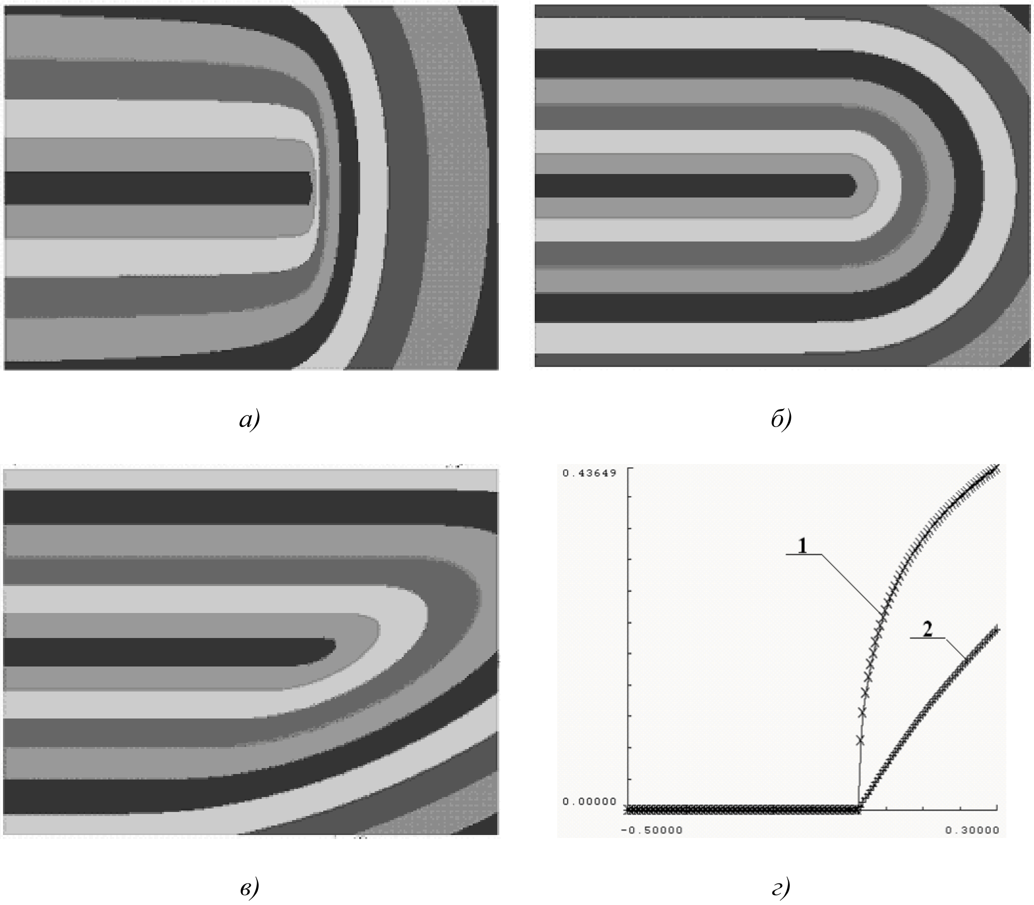


Рис.6. Исследования функции ω *при использовании: а) формулы (12); б) формулы (13); в) формулы (13) без условия ортогонализации; г) графики при использовании:* ***1*** *— формулы (12);* ***2*** *— формулы (13).*

Выводы. Применение R-операций $\{R_1\}$ при построении уравнений границ ГО приводит к разрывам производных в рассматриваемой области, что недопустимо при решении краевых задач. Для построения нормализованных уравнений границ ГО необходимо применять операции $\{R_\alpha\}$, которые сохраняют нормализованность, в том числе и на гладком стыке участков границы. Выделение участков границы по формуле (12) приводит к корневой особенности в концевых точках участка, в связи с чем необходимо применять формулу (13).

Все рассмотренные примеры реализованы в рамках применения системы ПОЛЕ. Разработанные новые конструктивные средства теории R-функций эффективно использовались при решении краевых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. — М., Мир, 1975. — 558 с.
2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые её приложения. — Киев, Наук. думка, 1982. — 552 с.
3. Рвачев В.Л. Методы алгебры логики в математической физике. — Киев, Наук. думка, 1974. — 259 с.
4. Рвачев В.Л. Геометрические приложения алгебры логики. — Киев, Техніка, 1967. — 212 с.
5. Шейко Т.И. Об учете особенностей в угловых точках и точках стыка граничных условий в методе R-функций / Прикл. механика, 1982, №4. — С. 95-102.

Надійшла 27.03.2009.