

## Конечноэлементный анализ стационарных магнитных полей в трёхмерной постановке

М. Г. Пантелят, Е. К. Руденко, А. Н. Сафонов, Н. Г. Шульженко  
*Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Украина*

A method for computer modelling by the finite element method of the stationary 3D magnetic field distribution in electrical machines and various electrical engineering devices is described. For confirmation of numerical results reliability the data of the testing of the developed software product are analyzed. The solution of model problems of calculation of the spatial magnetic field distribution in a turbogenerator rotor is executed. The necessity of the use of 3D formulations and numerical models for the numerical analysis of processes in real-life structures of electrical machines is shown.

### 1. Введение

В практике проектирования современного электротехнического оборудования широкое применение находит прикладное программное обеспечение для компьютерного моделирования электромагнитного поля [1-3]. Электрические машины, трансформаторы, электрические аппараты, индукционные нагреватели и электротехнические устройства других видов представляют собой сложные пространственные конструкции с существенно трёхмерным распределением электромагнитного поля. Поэтому, разработка эффективного программного обеспечения для расчёта электромагнитных полей в трёхмерной постановке является актуальной научной и прикладной задачей. В последние годы для расчёта трёхмерных электромагнитных полей используется метод конечных элементов [4-7], являющийся одним из наиболее развитых и эффективных методов численного решения уравнений математической физики.

Анализ трёхмерного стационарного магнитного поля представляет значительный научный и практический интерес [4], поскольку результаты расчётов позволяют установить особенности пространственного распределения поля в создаваемом устройстве и его наиболее ответственных конструктивных элементах.

В данной работе описывается разработанная методика компьютерного моделирования методом конечных элементов стационарного трёхмерного магнитного поля в электрических машинах и электротехнических устройствах различного назначения. При создании программного обеспечения реализована постановка задачи конечноэлементного анализа трёхмерных электромагнитных полей [5]. Для подтверждения достоверности разработанной методики анализируются результаты тестирования программного обеспечения. Решены модельные задачи расчёта пространственного магнитного поля в роторе турбогенератора, которое не может быть получено в двухмерной постановке.

## 2. Математическая модель трёхмерного электромагнитного поля

Математическое описание электромагнитных процессов в общем случае представляет собой систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме без учёта токов смещения [4-6]

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J}; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

дополненную материальными уравнениями, определяющими электрофизические свойства материалов

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}; \\ \mathbf{J} &= \gamma \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\mathbf{H}$  – вектор напряжённости магнитного поля;  $\mathbf{B}$  – вектор индукции магнитного поля;  $\mathbf{E}$  – вектор напряжённости электрического поля;  $\mathbf{J}$  – вектор плотности токов проводимости;  $\mu$  – магнитная проницаемость;  $\gamma$  – удельная электрическая проводимость.

В декартовой системе координат вектора, входящие в выражения (1) – (2), могут быть представлены в виде:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}; \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}; \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}.$$

В общем случае, магнитная проницаемость  $\mu$  может зависеть от напряжённости магнитного поля  $\mathbf{H}$  [7, 8]. Явления магнитного гистерезиса и анизотропии магнитных свойств материалов не учитываются.

Конечноэлементный анализ трёхмерных электромагнитных полей базируется на обоснованном выборе постановки решаемой задачи. Постановка задачи расчёта электромагнитного поля включает величины, однозначно описывающие пространственное и временное распределение электромагнитного поля в рассматриваемой расчётной области, а также дифференциальные уравнения электромагнитного поля с соответствующими граничными условиями [4-7].

Система уравнений (1), (2) может быть решена в терминах векторного магнитного потенциала  $\mathbf{A}$ , скалярного электрического потенциала  $V$ , векторного электрического потенциала  $\mathbf{T}$  и скалярного магнитного потенциала  $\psi$ , которые вводятся следующим образом [4-7]:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \operatorname{rot} \mathbf{A}; \\ \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} V; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \operatorname{rot} \mathbf{T}; \\ \mathbf{H} &= \mathbf{T} - \operatorname{grad} \psi, \end{aligned} \quad (4)$$

где вектора  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{T}$  в декартовой системе координат имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}; \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}.$$

В общем случае нестационарных электромагнитных процессов вектор плотности токов проводимости  $\mathbf{J}$  представляется в виде суммы заданного вектора плотности тока стороннего источника  $\mathbf{J}_S$  и вектора плотности вихревых токов  $\mathbf{J}_e$  [6, 7]:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_S + \mathbf{J}_e,$$

где  $\mathbf{J}_S = \begin{pmatrix} J_{Sx} \\ J_{Sy} \\ J_{Sz} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}; \quad \mathbf{J}_e = -\gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \gamma \mathit{grad} V = -\gamma \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial A_z}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}.$

В стационарном магнитном поле вихревые токи  $\mathbf{J}_e$  отсутствуют. Поэтому, в подобластях со сторонними токами (например, в статоре турбогенератора)

$$\mathbf{J} \equiv \mathbf{J}_S,$$

а в подобластях без сторонних токов (например, в роторе турбогенератора)

$$\mathbf{J} \equiv \mathbf{0}.$$

Величины, описывающие распределение стационарного магнитного поля, не зависят от времени и являются функциями только координат в выбранной координатной системе. Например, задача расчёта пространственного распределения стационарного магнитного поля в терминах векторного магнитного потенциала  $\mathbf{A}$  (3) в декартовой системе координат сводится к нахождению вектор-функции  $\mathbf{A}(x, y, z)$ .

### 3. Решение задачи методом конечных элементов

В данной работе использована постановка [5], в соответствии с которой векторная краевая задача, решаемая в терминах векторного магнитного потенциала  $\mathbf{A}$  (3), приобретает вид [5, 9]:

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{A} + \mu \mathbf{J}_S = 0, & \text{в } \Omega \\ -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \nu} = \alpha_A (\mathbf{A} - \mathbf{A}_\infty), & \text{на } \Gamma \end{cases} \quad (5)$$

$$\mathbf{A}_\infty = \begin{pmatrix} A_{x\infty} \\ A_{y\infty} \\ A_{z\infty} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1},$$

где  $\mathbf{J}_S$  – заданные в одной или нескольких подобластях расчётной области токи в виде вектора плотности тока стороннего источника (например, токи в статоре турбогенератора),  $\Omega$  – область решения задачи,  $\Gamma$  – граница области  $\Omega$ ,  $\nu$  – внешняя нормаль к боковой поверхности  $\Gamma$ ,  $\alpha_A$  – штрафной множитель для приближённого удовлетворения граничных условий не являющихся

естественными,  $\mathbf{A}_\infty$  – вектор, компонентами которого являются заданные значения векторного магнитного потенциала на границе  $\Gamma$ .

Функционал краевой задачи (5) для вектора  $\mathbf{A}$  запишется следующим образом [10]:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = \iiint_{\Omega} \left( \begin{pmatrix} (\nabla A_x)^2 \\ (\nabla A_y)^2 \\ (\nabla A_z)^2 \end{pmatrix} - 2\mu \begin{pmatrix} J_{Sx} A_x \\ J_{Sy} A_y \\ J_{Sz} A_z \end{pmatrix} \right) d\Omega + \iint_{\Gamma} \alpha_A \left( \begin{pmatrix} A_x^2 \\ A_y^2 \\ A_z^2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} A_{x\infty} A_x \\ A_{y\infty} A_y \\ A_{z\infty} A_z \end{pmatrix} \right) d\Gamma; \quad (6)$$

$$\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}.$$

Решение неоднородного уравнения Лапласа представим в следующем виде:

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{k=1}^{n_z} \mathbf{A}_{ijk} \varphi_{ijk}(x, y, z), \quad (7)$$

где  $\mathbf{A}_{ijk} = \begin{pmatrix} A_{xijk} \\ A_{yijk} \\ A_{zijk} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ ,  $i = \overline{1, n_x}; j = \overline{1, n_y}; k = \overline{1, n_z}$  – узловые значения искомой

функции;  $\varphi_{ijk}(x, y, z)$ ,  $i = \overline{1, n_x}; j = \overline{1, n_y}; k = \overline{1, n_z}$  – базисные финитные функции, определённые на произвольной сетке узлов.

Таким образом, функционалы (6) с учётом представления (7) есть функции  $n_x n_y n_z$  независимых переменных  $A_{xijk}, A_{yijk}, A_{zijk}$  соответственно.

Необходимое условие минимумов функционалов (6)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial A_{x pqr}} = 0; \quad p = \overline{1, n_x}; q = \overline{1, n_y}; r = \overline{1, n_z} \\ \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial A_{y pqr}} = 0; \quad p = \overline{1, n_x}; q = \overline{1, n_y}; r = \overline{1, n_z} \\ \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial A_{z pqr}} = 0; \quad p = \overline{1, n_x}; q = \overline{1, n_y}; r = \overline{1, n_z} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J_x}{\partial A_{x pqr}} = 0 \\ 0 \quad ; \quad p = \overline{1, n_x}; q = \overline{1, n_y}; r = \overline{1, n_z} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial J_y}{\partial A_{y pqr}} = 0; \quad p = \overline{1, n_x}; q = \overline{1, n_y}; r = \overline{1, n_z} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \quad ; \quad p = \overline{1, n_x}; q = \overline{1, n_y}; r = \overline{1, n_z} \\ \frac{\partial J_z}{\partial A_{z pqr}} = 0 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial J_x}{\partial A_{x pqr}} = 0; \quad p = \overline{1, n_x}; q = \overline{1, n_y}; r = \overline{1, n_z} \\ \frac{\partial J_y}{\partial A_{y pqr}} = 0; \quad p = \overline{1, n_x}; q = \overline{1, n_y}; r = \overline{1, n_z} \\ \frac{\partial J_z}{\partial A_{z pqr}} = 0; \quad p = \overline{1, n_x}; q = \overline{1, n_y}; r = \overline{1, n_z} \end{cases}$$

приводит к трём независимым линейным системам алгебраических уравнений относительно каждой из компонент вектора  $\mathbf{A}_{ijk}$ :

$$\sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{k=1}^{n_z} \mathbf{A}_{ijk} \left[ \iiint_{\Omega} \nabla \varphi_{ijk} \nabla \varphi_{pqr} d\Omega + \iint_{\Gamma} \alpha_A \varphi_{ijk} \varphi_{pqr} d\Gamma \right] = \iiint_{\Omega} \mu \mathbf{J}_S \varphi_{pqr} d\Omega + \iint_{\Gamma} \alpha_A \mathbf{A}_{\infty} \varphi_{pqr} d\Gamma; \\ p = \overline{1, n_x}; q = \overline{1, n_y}; r = \overline{1, n_z}.$$

В разработанном программном обеспечении реализован метод конечных элементов с использованием пространственных 8-узловых конечных элементов в виде произвольных шестигранников.

Рассматриваемая конструкция разбивается на ряд подобластей (первичная разбивка). Каждая подобласть характеризуется тем, что имеет определённые электрофизические свойства и граничные условия на каждой границе.

Для более точного описания геометрии конструкции предусмотрено, что подобласти могут иметь как прямолинейные, так и криволинейные грани. При задании исходной информации для подобластей с криволинейными гранями кроме координат вершин необходимо задавать также координаты дополнительных точек на рёбрах (рис. 1).

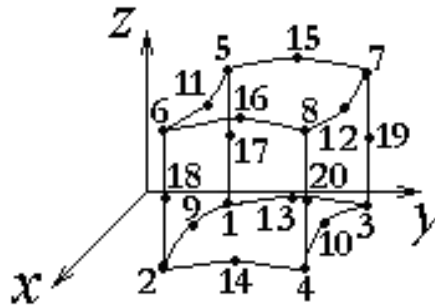


Рис. 1. Подобласть с дополнительными точками

Программно подобласти разбиваются на необходимое количество конечных элементов по каждому из направлений (вторичная разбивка). Необходимо, чтобы первичная и вторичная разбивка обеспечивали топологически регулярную конечноэлементную сетку. Граничные условия для каждой подобласти задаются, соответственно, в направлениях осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Решение векторной задачи (5) представляется в виде изолиний компонент вектора

магнитного потенциала  $A$ , индукции магнитного поля  $\mathbf{B}$  (3) и напряжённости магнитного поля  $\mathbf{H}$  (2) по всей расчётной области, а также внутренних источников тепла  $Q$  в подобластях с заданной плотностью тока  $\mathbf{J}$ . Внутренний источник тепла определяется из следующего соотношения:

$$Q = \frac{1}{\gamma} (J_x^2 + J_y^2 + J_z^2).$$

В настоящее время в разработанном программном обеспечении реализовано решение линейной задачи расчёта стационарного магнитного поля, т.е. зависимость магнитной проницаемости  $\mu$  от напряжённости магнитного поля  $\mathbf{H}$  не учитывается. При выполнении расчётов для магнитомягких материалов (например, для стали ротора турбогенератора) может быть задано постоянное среднее значение магнитной проницаемости, например  $\mu = 100\mu_0$  ( $\mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума) [11].

#### 4. Тестирование программного обеспечения

Для тестирования разработанного программного обеспечения выполнено решение ряда одномерных и двухмерных задач расчёта распределения стационарного магнитного поля. Полученные результаты сравнивались с аналитическими решениями, результатами других авторов, а также с результатами расчётов с использованием разработанной ранее [11] программы для конечноэлементного анализа двухмерных электромагнитных полей. Проанализируем результаты решения основных контрольных задач.

1. Результаты расчёта распределения стационарного магнитного поля в одномерных областях различной структуры (разные комбинации проводящих и диэлектрических подобластей) с различными типами граничных условий сравнивались с аналитическими решениями, полученными авторами. Погрешность численного решения методом конечных элементов не превышает 0.01 %.

Для иллюстрации достоверности разработанных математической модели и программного обеспечения рассмотрим следующую одномерную стационарную краевую задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \mu J = 0; & x \in (0, 1), \\ A(0) = A(1) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Дифференциальное уравнение второго порядка (8) является уравнением Эйлера для следующего функционала

$$J = \int_0^1 \left[ \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 - 2\mu J A \right] dx \quad (10)$$

с учётом главных краевых условий (9).

Решение краевой задачи (8) – (9) представим в виде

$$A(x) = \sum_{i=0}^n A_i \varphi_i(x), \quad (11)$$

где  $\varphi_i(x)$ ,  $i = \overline{0, n}$  – базисные финитные функции, определённые на равномерной сетке узлов на отрезке  $[0, 1]$ ;  $A_i$ ,  $i = \overline{0, n}$  – узловые значения искомой функции. Функционал (10) с учётом представления (11) есть функция  $n + 1$  независимых переменных  $A_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ .

Необходимое условие минимума

$$\frac{\partial J}{\partial A_j} = 0, j = \overline{0, n}$$

приводит к линейной системе алгебраических уравнений относительно компонент вектора  $\{A_i\}_{i=0}^n$ :

$$\sum_{i=0}^n A_i \int_0^1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} dx = \int_0^1 \mu J \varphi_j dx, j = \overline{0, n}.$$

В таблице 1 приводится сравнение точного решения задачи (8) – (9)  $A_{\text{Точное}}(x) = 0.5\mu J(x - x^2)$  при  $\mu = 0.12566381912 \cdot 10^{-5}$  Гн·м<sup>-1</sup>;  $J = 10^8$  А·м<sup>-2</sup> с численным решением  $A_{\text{численное}}$  (11), полученным методом конечных элементов в отдельных точках отрезка  $[0, 1]$ .

Таблица 1. Сравнение точного и численного решений одномерной краевой задачи (8) – (9)

x	A <sub>Точное</sub>	A <sub>численное</sub>	Относительная погрешность
			$\varepsilon = A_{\text{Точное}}^{-1}  A_{\text{Точное}} - A_{\text{численное}}  \cdot 100\%$
0.00	0	0	0
0.05	2.98451	2.98456	0.00167
0.10	5.65487	5.65492	0.00088
0.15	8.01106	8.01111	0.00062
0.20	10.0531	10.0531	0
0.25	11.780	11.781	0.00848
0.30	13.1947	13.1947	0
0.35	14.2942	14.2943	0.00069
0.40	15.0796	15.0797	0.00066
0.45	15.5508	15.5509	0.00064
0.50	15.707	15.708	0.00636
0.55	15.5508	15.5509	0.00064
0.60	15.0796	15.0797	0.00066
0.65	14.2942	14.2943	0.00069

0.70	13.1947	13.1947	0
0.75	11.780	11.781	0.00848
0.80	10.0531	10.0531	0
0.85	8.01106	8.01111	0.00062
0.90	5.65487	5.65492	0.00088
0.95	2.98451	2.98456	0.00167
1.00	0	0	0

2. Решена задача расчёта распределения стационарного магнитного поля тонкой дисковой катушки.

В общем случае, магнитное поле плоской катушки с обмоткой в виде шайбы описывается решением следующего осесимметричного стационарного уравнения в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r A_\varphi \right) + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} + \mu J_\varphi = 0; (r, z) \in \Gamma \tag{12}$$

с граничными условиями, соответствующими выбранной расчётной схеме.

Из физических соображений магнитное поле описывается только одной угловой компонентой  $A_\varphi(r, z)$ , а остальные компоненты равны нулю ( $A_z = A_r = 0$ ) [12]. Начало цилиндрической системы координат находится в геометрическом центре шайбы радиуса  $R$ .

Для решения уравнения (12) используем метод взвешенных невязок в форме Галёркина [13], система уравнений которого в данном случае примет следующий вид:

$$\iint_\Gamma \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r A_\varphi \right) + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} + \mu J_\varphi \right] \varphi_j r d\Gamma = 0, j = \overline{1, n}, \tag{13}$$

где  $\varphi_j(r, z)$  – базисные финитные функции,  $n$  – количество узлов сетки в области  $\Gamma$ .

Согласно методу Галёркина решение  $A_\varphi$  представим в виде линейной комбинации функций этого же базиса

$$A_\varphi = \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i, \tag{14}$$

где  $A_i, i = \overline{1, n}$  её узловые значения.

Применив интегрирование по частям к выражению (13), получим для вычисления узловых значений  $A_i$  (14) линейную систему алгебраических уравнений



$$\sum_{i=1}^n A_i \left\{ \iint_{\Gamma} \left[ \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} + \frac{\varphi_i \varphi_j}{r^2} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \varphi_j + \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} \right) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \right] r d\Gamma + \int_L \alpha_A \varphi_i \varphi_j r dL \right\} =$$

$$= \iint_{\Gamma} \mu J_{\varphi} \varphi_j r d\Gamma + \int_L \alpha_A A_{\varphi\infty} \varphi_j r dL, \quad j = \overline{1, n},$$

где  $L$  – граница расчётной области,  $\alpha_A$  – штрафной множитель для приближённого удовлетворения краевому условию Дирихле

$$A_{\varphi} = 0 \quad (15)$$

на одной или нескольких границах расчётной области.

Для контроля расчёта распределения стационарного магнитного поля дисковой катушки (тонкого диска без отверстия) уравнение (12) решалось в одномерной постановке (решение зависело только от радиальной координаты) с граничными условиями (15) в геометрическом центре катушки ( $r=0$ ) и на удалённой от катушки границе ( $r=5R$ , где  $R$  – радиус катушки).

Полученное численное решение задачи (12) сравнивалось с результатами графоаналитического расчёта, приведенными в [12]. На рис. 2 представлено известное распределение безразмерного векторного магнитного потенциала  $A_{\varphi}^*(r^*)$  в плоскости дисковой катушки (сплошная кривая) [12] и результаты, полученные с использованием разработанной программы (обозначены звёздочками), где

$$r^* = \frac{r}{R}; \quad A_{\varphi}^* = \frac{A_{\varphi}}{\mu_0 J_{\varphi} R}.$$

Сравнительный анализ показывает, что погрешность численного решения методом конечных элементов не превышает 5.0 %, что является приемлемым для решения прикладных задач расчёта электромагнитных полей.

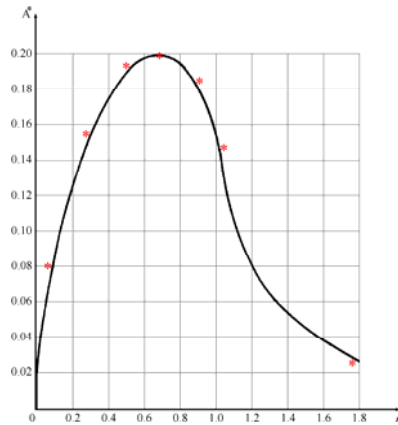


Рис. 2. Безразмерный векторный магнитный потенциал в плоскости дисковой катушки:  
 — известное решение [12];  
 \* решение методом конечных элементов.

3. Решена задача расчёта распределения стационарного двухмерного магнитного поля в конструкции, приведенной на рис. 3.

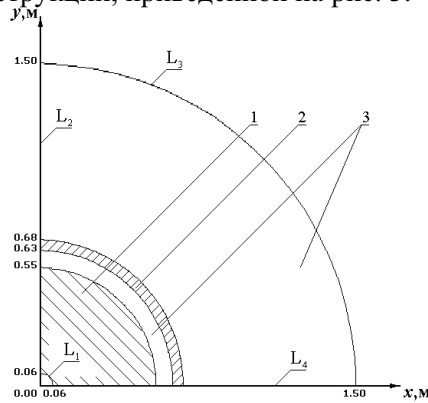


Рис. 3. Расчётная область контрольной задачи (упрощённая модель турбогенератора, ¼ поперечного сечения)

1 – ротор, 2 – подобласть с заданной плотностью постоянного тока статора, 3 – воздух;  $L_1, L_3$  – границы с заданным нулевым значением векторного магнитного потенциала,  $L = \bigcup_{h=1}^4 L_h$  – граница области решения задачи.

Расчётная область включает в себя упрощённую модель ¼ части поперечного сечения стального ротора турбогенератора 300 МВт без обмоток возбуждения и пазовых клиньев (подобласть 1 на рис. 3), подобласть 2 с заданным постоянным током статора и диэлектрические подобласти (воздух) 3. Диаметр ротора 1.10 м, воздушный зазор между статором и ротором – 0.09 м, радиус удалённой границы  $L_3$  (см. рис. 3), на которой задаётся нулевое значение векторного магнитного потенциала, составляет 1.50 м [11].

В подобласти 2 (материал – медь) толщиной 0.05 м задана единственная компонента  $J_z$  плотности постоянного тока стороннего источника равная  $10^6 \text{ А} \cdot \text{м}^{-2}$ . Поэтому, в исходных данных программы расчёта трёхмерного стационарного магнитного поля вектор плотности сторонних токов  $\mathbf{J}$  задаётся в виде:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10^6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}.$$

Материал ротора – сталь с постоянным средним значением магнитной проницаемости  $\mu = 100\mu_0$  ( $\mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума) [11].

Эллиптическое уравнение в частных производных второго порядка векторной краевой задачи (5) для данного случая имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) + J_{sz} = 0, (x, y) \in \Gamma$$

и решается при граничных условиях, соответствующих расчётной схеме [11]:

- на оси симметрии  $L_2 (x = 0): \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0$ ;
- на оси антисимметрии  $L_4 (y = 0): A_z = 0$ ;
- на границах  $L_1, L_3: A_z = 0$ .

При использовании трёхмерной постановки задачи для получения двумерного распределения магнитного поля на обоих торцах ротора задаются граничные условия симметрии

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} = 0, \quad (16)$$

что обеспечивает равномерное распределение по длине ротора.

Данная линейная стационарная краевая задача эквивалентна проблеме минимума следующего квадратичного функционала:

$$\min_{A_z} J = \min_{A_z} \left\{ \iint_{\Gamma} \left[ \frac{1}{2\mu} (\nabla A_z)^2 - J_{S_z} A_z \right] d\Gamma + \int_{L_1 \cup L_3} \alpha_A \left( \frac{A_z}{2} - A_{z\infty} \right) A_z d(L_1 \cup L_3) \right\}, \quad (17)$$

где  $\alpha_A$  – штрафной множитель для приближённого удовлетворения главных граничных условий Дирихле на  $L_1$  и  $L_3$ .

Согласно методу конечных элементов искомую функцию представим в виде следующей линейной комбинации

$$A_z = \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i(x, y),$$

где  $\varphi_i(x, y)$ ,  $i = \overline{1, n}$  – конечноэлементный базис;  $A_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  – величина векторного магнитного потенциала в  $i$ -ом узле конечноэлементной сетки.

После подстановки  $A_z$  в функционал (17), последний примет вид квадратичной функции  $n$  независимых переменных  $A_i$ :

$$J = \iint_{\Gamma} \left[ \frac{1}{2\mu} \left( \sum_{i=1}^n A_i \nabla \varphi_i(x, y) \right)^2 - J_{S_z} \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i(x, y) \right] d\Gamma + \\ + \int_{L_1 \cup L_3} \alpha_A \left[ \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i(x, y) \right)^2 - A_{z\infty} \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i(x, y) \right] d(L_1 \cup L_3).$$

Следуя необходимому условию минимума функции  $J(A_1, A_2, \dots, A_n)$

$$\frac{\partial J(A_1, A_2, \dots, A_n)}{\partial \varphi_j(x, y)} = 0, \quad j = \overline{1, n},$$

получим линейную алгебраическую систему уравнений относительно узловых значений векторного магнитного потенциала  $A_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ :

$$\sum_{i=1}^n A_i \left\{ \iint_{\Gamma} \frac{1}{\mu} \nabla \varphi_i(x, y) \nabla \varphi_j(x, y) d\Gamma + \int_{L_1 \cup L_3} \alpha_A \varphi_i(x, y) \varphi_j(x, y) d(L_1 \cup L_3) \right\} = \iint_{\Gamma} J_{Sz} \varphi_j(x, y) d\Gamma + \int_{L_1 \cup L_3} \alpha_A A_{zoo} \varphi_j(x, y) d(L_1 \cup L_3), \quad j = \overline{1, n}.$$

На рис. 4 приведены полученные численные результаты в виде линий равного уровня векторного магнитного потенциала (единственная компонента  $A_z$ ) в рассматриваемой расчётной области. Выполнено сравнение результатов, полученных при решении задачи с использованием трёхмерной и двухмерной [11] моделей. Погрешность не превышает 0.13 %.

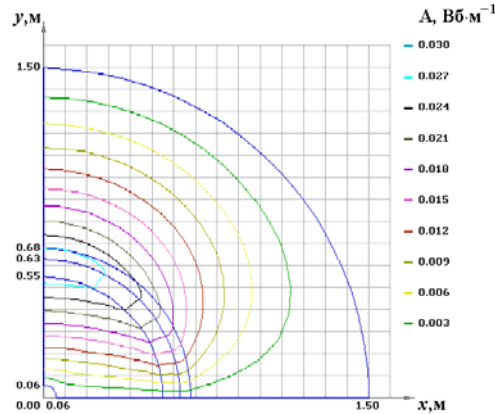


Рис. 4. Распределение векторного магнитного потенциала (упрощённая модель турбогенератора, ¼ поперечного сечения)

4. Выполнен расчёт распределения стационарного магнитного поля в роторе турбогенератора 300 МВт в поперечном сечении, приведенном на рис. 5, по данным чертежа ротора [11].

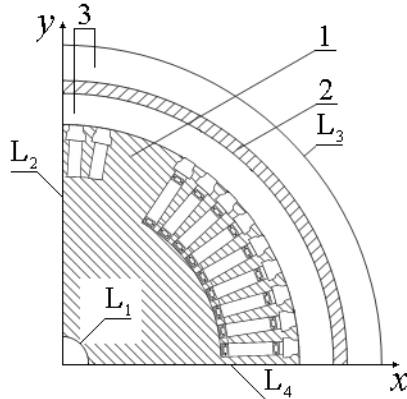


Рис. 5. Расчётная схема ротора турбогенератора 300 МВт (¼ поперечного сечения)

1 – ротор, 2 – подобласть с заданной плотностью постоянного тока статора, 3 – воздух;  $L_1, L_3$  – границы с заданным нулевым значением векторного

магнитного потенциала,  $L = \bigcup_{h=1}^4 L_h$  – граница области решения задачи.

Основная информация по геометрии конструкции, материалам ротора, граничным условиям и стороннему источнику тока приведена выше. Обмоточные пазы (см. рис. 5) (кроме пазов на поверхности большого зуба) заполнены медной обмоткой. Материал немагнитных пазовых клиньев (кроме пазов на поверхности большого зуба) – дюралюминий. Пазовые клинья на поверхности большого зуба выполнены из той же стали, что и ротор.

Решение задачи выполнено с использованием описанного в данной статье программного обеспечения для расчёта стационарных трёхмерных магнитных полей, а также с помощью разработанной ранее программы для конечноэлементного анализа электромагнитных процессов в двухмерной постановке [11]. Для выполнения сравнения численных результатов предполагалось, что пространственное распределение магнитного поля по длине ротора является равномерным. Для реализации данного предположения при решении трёхмерной задачи на обоих торцах ротора задавались граничные условия симметрии (16).

Сравнительный анализ полученных результатов показывает, что погрешность расчёта магнитного поля в поперечном сечении ротора турбогенератора (см. рис. 5) не превышает 4.1 %.

Таким образом, решение ряда контрольных (тестовых) примеров подтверждает достоверность результатов, получаемых с использованием разработанного программного обеспечения для конечноэлементного анализа трёхмерных стационарных магнитных полей.

#### **5. Исследование трёхмерного распределения стационарного магнитного поля в роторе турбогенератора**

Для демонстрации возможностей разработанной математической модели выполнено решение модельных задач расчёта пространственного распределения стационарного магнитного поля в фрагменте ротора турбогенератора с поперечным сечением, представленным на рис. 3. Рассматриваемая конструкция представляет собой участок ротора турбогенератора длиной 5.0 м, на одном из торцов которого задано граничное условие  $A_z = 0$ , а на другом торце задано граничное условие (16). На рис. 6 приведено полученное распределение осевой компоненты  $A_z$  векторного магнитного потенциала по длине ротора в точках,

расположенных под углом  $45^\circ$  к осям  $x$  и  $y$ , на расстояниях от начала координат:

$$r_1 = 0.1825 \text{ м (кривая 1);}$$

$$r_2 = 0.305 \text{ м (кривая 2);}$$

$$r_3 = 0.4275 \text{ м (кривая 3);}$$

$$r_4 = 0.55 \text{ м (кривая 4; наружная поверхность ротора).}$$

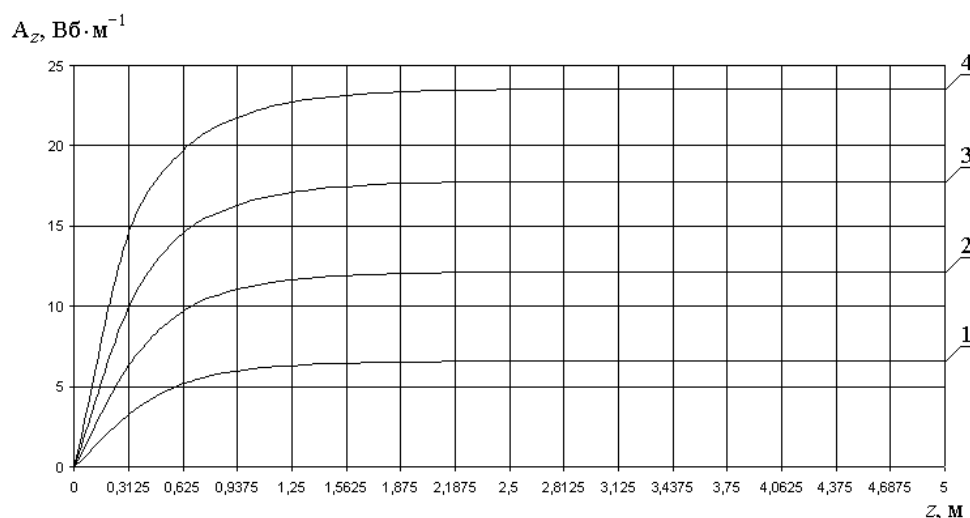


Рис. 6. Распределение осевой компоненты векторного магнитного потенциала по длине ротора турбогенератора 300 МВт.

Как следует из полученных результатов, существенный интерес представляет численный анализ пространственного стационарного магнитного поля в концевой части ротора (1/3 часть длины ротора от торца), где оно носит трёхмерный характер.

## 6. Выводы

В статье описана разработанная методика конечноэлементного анализа трёхмерных стационарных магнитных полей. Выполнено тестирование программного обеспечения. Подтверждена достоверность численных результатов решения задач расчёта стационарного магнитного поля в плоскости дисковой катушки и в поперечном сечении ротора синхронного турбогенератора 300 МВт.

Решена задача расчёта пространственного стационарного магнитного поля в фрагменте ротора турбогенератора. Показано, что значительный интерес представляет численный анализ поля в концевой части ротора (1/3 часть длины ротора от торца), где оно носит существенно трёхмерный характер.

Предложенная методика может быть использована для решения прикладных задач расчёта пространственного магнитного поля в реальных конструкциях электрических машин и электротехнического оборудования.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кулон Ж.-Л., Сабонадьер Ж.-К. САПР в электротехнике. – М.: Мир, 1988. – 208 с.
2. Васьковский Ю.Н., Цивинский С.С., Гайденок Ю.А. Оптимизация концевых клиньев ротора турбогенератора для повышения надёжности его работы в

- несимметричных режимах. – Электротехника и электромеханика. – 2004, № 3. – С. 26 – 28.
3. Милых В.И., Поляков И.В., Полякова Н.В., Штангеев Е.И. Расчётно-экспериментальное тестирование программы Femm и преодоление проблем её использования для расчёта магнитного поля электрических машин. – Электротехника и электромеханика. – 2004, № 3. – С. 38 – 43.
  4. Сильвестер П., Феррари Р. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. – М.: Мир, 1986. – 229 с.
  5. Пантелят М.Г., Шульженко Н.Г. Использование векторного магнитного потенциала в конечноэлементном анализе нестационарных трёхмерных электромагнитных полей в проводящих средах. – Электротехника и электромеханика. – 2007, № 5. – С. 42 – 47.
  6. Bíró O., Preis K. On the use of the magnetic vector potential in the finite element analysis of three-dimensional eddy currents. – IEEE Transactions on Magnetics. – 1989, v. 25, No. 4. – P. 3145 – 3159.
  7. Bíró O., Preis K., Richter K.R. Various FEM formulations for the calculation of transient 3D eddy currents in nonlinear media. – IEEE Transactions on Magnetics. – 1995, v. 31, No. 3. – P. 1307 – 1312.
  8. Pantelyat M.G. Numerical analysis of impulse electromagnetic fields in soft ferromagnetic materials. – International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics. – 1999, v. 10. – P. 185 – 192.
  9. Gong L., Unbehauen R. The 3D computations of edge induction heating using semi-analytical method and FEM. – Electrical Engineering. – 1996, v. 79. – P.189 – 195.
  10. Михлин С.Г. Вариационные методы математической физики. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
  11. Шульженко Н.Г., Зозулин Ю.В., Пантелят М.Г., Руденко Е.К., Петушкова С.А. Влияние материала пазовых клиньев на распределение электромагнитного поля, плотности тока и потерь от токов обратной последовательности в роторе турбогенератора при двухфазном коротком замыкании. – Электротехника и электромеханика. – 2005, № 3. – С. 61 – 64.
  12. Алиевский Б.Л., Орлов В.Л. Расчёт параметров магнитных полей осесимметричных катушек: Справочник. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 112 с.
  13. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина. – М.: Мир, 1988. – 352 с.

Надійшла у першій редакції 04.11.2008, в останній - 20.02.2009.