Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
№ 847, 2009, с.307-313

УДК 681.3

Решение систем нелинейных уравнений с нечеткими параметрами

О. В. Серая
Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», Украина

The task of decision of the system of nonlinear equations with the fuzzy parameters is formulated. Necessary determinations to build the decision receipt procedure are entered. Technologies of receipt of correct crisp and fuzzy decisions of task are considered. An example, illustrating all of the stages of decision receipt, is resulted.

1. Введение

Огромное число разнообразных задач в технике, экономике, социологии и т.п. сводится к решению систем нелинейных уравнений. Этот раздел математики хорошо разработан. Для многих видов уравнений удается получить аналитическое решение, остальные, как правило, решаются численно с применением математических пакетов Matlab, MathCAD, Mathematika и др. Принципиальная особенность используемых при этом математических моделей состоит в том, что все параметры решаемых задач предполагаются заданными точно. Вместе с тем реальные задачи человеческой практики формулируются в условиях неопределенности. При этом, во многих случаях, когда статистических данных о параметрах задачи недостаточно для использования теоретико-вероятностных подходов, при описании моделей неопределенности целесообразны идеи нечеткой математики.

Следует отметить, что в известной литературе вопрос о технологии решения систем нелинейных уравнений, параметры которых – есть нечеткие числа, не обсуждался. Причина понятна –не вполне ясно, что значит решить такую систему уравнений. Какие требования разумно предъявить к решению? Как получить результат, который можно было бы в интуитивно ясной форме трактовать как решение системы нечетко заданных уравнений.

В соответствии с этим, цель статьи – разработка аксиоматического решения систем нелинейных уравнений с нечеткими параметрами.

2. Постановка задачи

Пусть задана система из n нелинейных уравнений с n неизвестными, которая содержит m нечетко определенных параметров:

$$\begin{aligned}
&g_1(x_1, x_2, ..., x_n; \theta_1, \theta_2, ..., \theta_m) = 0, \\
&g_2(x_1, x_2, ..., x_n; \theta_1, \theta_2, ..., \theta_m) = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&g_n(x_1, x_2, ..., x_n; \theta_1, \theta_2, ..., \theta_m) = 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

Каждый из нечетких параметров системы θ_i, $i = 1,2,...,m$, описан своей функцией принадлежности $\mu_i(\theta_i)$. Рассмотрим возможные подходы к решению этой задачи.

3. Основные результаты

Четкое решение задачи.

Введем набор нечетких чисел $z_k = g_k(X;\Theta)$, $k = 1,2,...,n$, $X^T = (x_1, x_2,..., x_n)$, $\Theta^T = (\theta_1, \theta_2,..., \theta_m)$. Используя аналитические описания функций принадлежности $\mu_i(\theta_i)$ нечетких параметров задачи найдем функции принадлежности $\mu_k(z_k)$ нечетких чисел z_k, $k = 1,2,...,n$.

Далее решим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&g_1\left(x_1, x_2,..., x_n; \theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)},..., \theta_m^{(0)}\right) = 0,\\
&g_2\left(x_1, x_2,..., x_n; \theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)},..., \theta_m^{(0)}\right) = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&g_n\left(x_1, x_2,..., x_n; \theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)},..., \theta_m^{(0)}\right) = 0,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где $\theta_i^{(0)}$ - модальные значения соответствующих нечетких чисел, то есть $\mu_i\left(\theta_i^{(0)}\right) = 1$, $i = 1,2,...,m$.

Пусть $X^{(0)}$ - полученное (если это необходимо, то численно) решение системы уравнений (2). Понятно, что положение и характер функций принадлежности $\mu_k(z_k)$ зависят от набора X. При этом, поскольку для $\Theta = \Theta^{(0)}$ и $X = X^{(0)}$ значения $z_k\left(X^{(0)}, \Theta^{(0)}\right) = 0$, то функции принадлежности $\mu_k\left(z_k\left(X^{(0)}, \Theta\right)\right)$ имеют модальные значения, равные нулю.

Тогда в качестве четкого решения задачи (1) примем набор $X^* = \left(x_1^*, x_2^*,..., x_n^*\right)$, обладающий следующими свойствами: во-первых, функции принадлежности $\mu_k\left(z_k\left(X^*, \Theta\right)\right)$ должны максимально концентрироваться в окрестности нуля и быть минимально размытыми; во-вторых, набор X^* должен минимально уклоняться от $X^{(0)}$. Эти требования будут реализованы, если набор X^* искать, например, минимизируя функционал

$$
J_1 = \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \mu_k\left(z_k(X, \Theta)\right) dz_k + \left(X - X^{(0)}\right)^T \left(X - X^{(0)}\right). \tag{3}
$$

Первое слагаемое критерия (3) определяет суммарную площадь под кривыми, описываемыми функциями принадлежности $\mu_k(z_k)$, то есть их компактность. При этом, чем меньше эта величина, тем меньше неопределенность в отношении результата решения задачи. Смысл второго слагаемого разъяснения не требует.

Другой вариант реализации той же идеи состоит в использовании множеств уровня α для каждого из нечетких чисел z_k, $k = 1,2,...,n$, отыскиваемых из соотношений

$$A_\alpha^{(k)}(x) = \{X : \mu_k(z_k(X)) \geq \alpha\}. \tag{4}$$

Тогда критерий компактности будет иметь вид

$$J_2 = \sum_{k=1}^{n} A_\alpha^{(k)}(x) + \left(X - X^{(0)}\right)^T \left(X - X^{(0)}\right). \tag{5}$$

Понятно, что уровень сложности задачи минимизации (3) или (5) напрямую зависит от сложности аналитических выражений уравнений (1).

Нечеткое решение задачи. Нечеткое решение системы нелинейных уравнений (1) предполагает получение результата решения этой системы в виде функций принадлежности искомых значений переменных $x_1, x_2, ..., x_n$.

С этой целью необходимо выразить переменные задачи $x_1, x_2, ..., x_n$ через параметры системы уравнений (1), то есть получить формулы

$$x_j = \varphi_j(\Theta),\ j = 1,2,...,n. \tag{6}$$

Если решение задачи в виде (6) получено, то с использованием функций принадлежности $\mu_i(\theta_i)$, $i = 1,2,...,m$, можно определить аналитическое описание для функций принадлежности $\mu_j(X(\Theta))$ нечетких чисел $x_j(\Theta)$, $j = 1,2,...,n$. При этом, поскольку нечеткие параметры $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m$ системы (1) могут сложным образом входить в соотношения (6), приближенное решение задачи может быть получено с использованием разложения функций $\varphi_j(\Theta)$ в ряд Тэйлора относительно точки $\Theta^{(0)}$:

$$\varphi_j(\Theta) \cong \varphi_j\left(\Theta^{(0)}\right) + \sum_{j=1}^{n} \varphi_j'\left(\Theta^{(0)}\right)\left(\theta_j - \theta_j^{(0)}\right). \tag{7}$$

В этом случае нечеткие параметры θ_j входят в описание x_j, $j = 1,2,...,n$ линейно, что существенно упрощает задачу построения их функций принадлежности.

Пример. Задана система уравнений

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = \theta_1, \\ \theta_2 x_1 x_2 = 2, \end{cases} \tag{8}$$

где параметры θ_1 и θ_2 - нечеткие числа с функциями принадлежности

$$\mu_1(\theta_1) = exp\left\{-\frac{(\theta_1 - 5)^2}{2}\right\},$$

$$\mu_2(\theta_2) = exp\left\{-\frac{(\theta_2 - 1)^2}{0.125}\right\}. \qquad (9)$$

Найдем четкое решение задачи.

Введем нечеткие числа:

$$\begin{aligned} z_1 &= \theta_1 - (x_1^2 + x_2^2), \\ z_2 &= \theta_2 x_1 x_2 - 2. \end{aligned} \qquad (10)$$

Решим теперь систему уравнений (8), положив $\theta_1 = \theta_1^{(0)}$, $\theta_2 = \theta_2^{(0)}$. При этом имеем

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 5, \\ x_1 x_2 = 2. \end{cases} \qquad (11)$$

Одно из решений системы уравнений (10) в области положительных значений переменных имеет вид: $x_1^{(0)} = 2$, $x_2^{(0)} = 1$.

Тогда критерий (3) будет записан следующим образом:

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_1(z_1(X,\Theta)))dz_1 + \int_{-\infty}^{\infty} \mu_2(z_2(X,\Theta)))dz_2 + (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2, \qquad (12)$$

где, с учетом (9), (10),

$$\mu_1(z_1(X,\Theta)) = exp\left\{-\frac{\left[z_1 - (5 - x_1^2 - x_2^2)\right]^2}{2}\right\},$$

$$\mu_2(z_2(X,\Theta)) = exp\left\{-\frac{\left[z_2 - (x_1 x_2 - 2)\right]^2}{0.125 x_1^2 x_2^2}\right\}. \qquad (13)$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu(z))dz = \int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{-\frac{(z-m)^2}{2\sigma^2}\right\}dz = \sqrt{2\pi}\sigma, \qquad (14)$$

то, имея в виду (13), (14), имеем

$$J_1 = \sqrt{2\pi} + \sqrt{2\pi} \cdot 0.25 \cdot x_1 x_2 + \left(x_1 - 2\right)^2 \backslash + \left(x_2 - 1\right)^2 . \qquad (15)$$

Теперь, дифференцируя (15) по x_1 и x_2, получим систему уравнений для отыскания искомого набора $X^* = \left(x_1^*, x_2^*\right)$.

$$\frac{\partial J_1}{\partial x_1} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} x_2 + 2\left(x_1 - 2\right) = 0,$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial x_2} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} x_1 + 2\left(x_2 - 1\right) = 0,$$

или

$$\begin{cases} x_1 + \sqrt{\dfrac{\pi}{32}} x_2 = 2, \\ \sqrt{\dfrac{\pi}{32}} x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \qquad (16)$$

Решение системы уравнений (16) имеет вид

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{\dfrac{\pi}{32}}}{1 - \dfrac{\pi}{32}} \approx 1.87 , \quad x_2 = \frac{1 - 2\sqrt{\dfrac{\pi}{32}}}{1 - \dfrac{\pi}{32}} \approx 0.415 .$$

Найдем теперь нечеткое решение задачи. С этой целью решим систему уравнений (8).

Имеем:

$$x_2 = \frac{2}{\theta_2 x_1} , \qquad (17)$$

$$x_1^2 + \frac{4}{\theta_2^2 x_1^2} = \theta_1 , \ \theta_2^2 x_1^4 - \theta_1 \theta_2^2 x_1^2 + 4 = 0 ,$$

$$x_1^2 = \frac{\theta_1 \theta_2^2 \pm \sqrt{\theta_1^2 \theta_2^4 - 16\theta_2^2}}{2\theta_2^2} = \frac{\theta_1}{2} \pm \left(\frac{\theta_1^2}{4} - \frac{4}{\theta_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Выбирая большее из полученных значений, запишем

$$x_1^* = \left[\frac{\theta_1}{2} + \left(\frac{\theta_1^2}{4} - \frac{4}{\theta_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{18}$$

Для получения приближенного аналитического выражения функции принадлежности нечеткого числа x_1 используем разложение (18) в ряд Тэйлора, ограничившись линейными членами. При этом

$$\begin{aligned} x_1^* \cong & \left[\frac{\theta_1^{(0)}}{2} + \left(\frac{\left(\theta_1^{(0)}\right)^2}{4} - \frac{4}{\left(\theta_2^{(0)}\right)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left[\frac{\theta_1^{(0)}}{2} + \left(\frac{\left(\theta_1^{(0)}\right)^2}{4} - \frac{4}{\left(\theta_2^{(0)}\right)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{-\frac{1}{2}} \times \\ & \times \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\left(\theta_1^{(0)}\right)^2}{4} - \frac{4}{\left(\theta_2^{(0)}\right)^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\theta_1^{(0)}}{2} \right] \left(\theta_1 - \theta_1^{(0)} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{\theta_1^{(0)}}{2} + \left(\frac{\left(\theta_1^{(0)}\right)^2}{4} - \frac{4}{\left(\theta_2^{(0)}\right)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\left(\theta_1^{(0)}\right)^2}{4} - \frac{4}{\left(\theta_2^{(0)}\right)^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{8}{\left(\theta_2^{(0)}\right)^3} \right] \left(\theta_2 - \theta_2^{(0)} \right). \end{aligned} \tag{19}$$

Подставляя в (19) $\theta_1^{(0)} = 5$, $\theta_2^{(0)} = 1$, получим

$$x_1^* = 2 + \frac{1}{3}\left(\theta_1 - 5\right) + \frac{2}{3}\left(\theta_2 - 1\right). \tag{20}$$

Введем $u_1 = \theta_1 - 5$, $u_2 = \theta_2 - 1$. Тогда

$$\mu\left(\frac{1}{3}\left(\theta_1 - 5\right) \right) = exp\left\{ -\frac{u_1^2}{\frac{2}{9}} \right\}, \qquad \mu\left(\frac{2}{3}\left(\theta_2 - 1\right) \right) = exp\left\{ -\frac{u_2^2}{\frac{2}{9}} \right\}.$$

При этом, с учетом (20),

$$\mu\left(x_1\right) = exp\left\{ -\frac{\left(x_1 - 2\right)^2}{\frac{4}{9}} \right\}. \tag{21}$$

Для получения функции принадлежности нечеткого числа x_2 используем соотношение (17). Запишем сначала функцию принадлежности нечеткого числа $z = \theta_2 x_1$. Имеем [1]:

$$\mu(z) = exp\left\{ -\frac{\left(z - m_z\right)^2}{2D_z} \right\},$$

где $m_z = \theta_2^{(0)} m_{x_1}$, $D_z = \sigma_{\theta_2}^2 \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{\theta_2}^2 m_{x_1}^2 + \sigma_{x_1}^2 \left(\theta_2^{(0)}\right)^2$.

При этом

$$\mu(z) = exp\left\{-\frac{(z-2)^2}{\frac{70}{72}}\right\}. \tag{22}$$

Далее, в [1] показано, что если нечеткое число z имеет функцию принадлежности $\mu(z) = exp\left\{-\frac{(z-m_z)^2}{2D_z}\right\}$, то функция принадлежности нечеткого числа $x_2 = \frac{a}{z}$ описывается выражением

$$\mu(x_2) = exp\left\{-\frac{\left(x_2 - \frac{a}{m_z}\right)^2}{2\frac{D_z a^2}{m_z^2} x_2^2}\right\}.$$

Тогда, с учетом (17), (22), имеем

$$\mu(x_2) = exp\left\{-\frac{(x_2-1)^2}{\frac{70}{72} x_2^2}\right\}. \tag{23}$$

Понятно, что полученные функции принадлежности (21) и (23) имеют модальные значения, соответствующие решению системы уравнений (8) при $\theta_1 = \theta_1^{(0)}$, $\theta_2 = \theta_2^{(0)}$.

Решение задачи завершено.

4. Выводы

Таким образом, предложены методы отыскания четкого и нечеткого решений систем нелинейных уравнений, содержащих нечетко заданные параметры. Для получения четкого решения введены соответствующие определения и критерии «верности» решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Раскин, О.В. Серая. Нечеткая математика. Основы теории, приложения. – Х.: Парус, 2008. – 354с.

Надійшла у першій редакції 17.03.2009, в останній - 02.04.2009.