Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 519.853.7
№ 847, 2009, с.314-323

Построение гамма-функции и ее использование для решения задачи покрытия компактного многогранного множества набором прямых параллелепипедов

Е. С. Сосюрка
Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАНУ, Украина

Within the field of covering problem of the placement or mutual allocation of 3D objects is of great importance. One of the most important topics when 3D placement problems have to be modeled is the construction of such a function that describes the interaction between all pairs of objects. In this paper the analytical description of such function, called Γ-function, for the polytopes is investigated. This function can be used for mathematical modeling of covering problem in the three-dimensional space. Only translations of the polytopes are considered.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

Задачи покрытия возникают в различных сферах человеческой деятельности, областях науки и техники и состоят в том, что нужно покрыть заданную область некоторым набором геометрических объектов.

Построение математических моделей задач покрытия основано на аналитическом описании отношений включения (принадлежности объекта области, образованной заданным набором). Задача построения такой функции, которая зависела бы от параметров размещения покрывающих объектов и описывала их взаимодействие, требует тщательного и полного исследования. Поскольку в дальнейшем такая функция может быть использована для построения математической модели задачи покрытия.

2. Истоки исследования автора

Задачи покрытия имеются в большом количестве в литературе.

Работы Стояна Ю.Г., Кривули А.В. [1-4] посвящены задаче, в которой заданную многоугольную область нужно покрыть набором прямоугольников различного размера. Цель – найти вектора переноса, на которые нужно параллельно перенести прямоугольники, чтобы они покрыли заданную область.

В работе [5] рассматривается следующая задача покрытия: задан конечный набор многоугольников и целевое точечное множество (или набор многоугольников). Цель – найти вектора трансляции, если таковые существуют, на которые нужно параллельно перенести многоугольники так, чтобы они покрыли целевое множество.

Работа [6] дает апроксимационный алгоритм нахождения покрытия одномерного точечного множества конгруэнтными кольцами.

В работе [7] рассматривается следующая задача покрытия: задан простой многогранник, нужно определить, может ли он быть покрыт двумя многогранниками, один из которых простой, а второй – выпуклый. То есть решение задачи покрытия тут дается для случая двух покрывающих объектов, причем на каждый из которых, равно как и на покрываемый объект, наложены свои ограничения.

Тот Г.Ф. в [8] провел обзор многочисленной литературы, посвященной задачам, в которых целевые объекты являются подмножеством объединения совокупности покрывающих объектов. Большинство из этих работ требуют, чтобы покрывающие объекты были идентичными. Целью же является покрыть целевой объект (иногда объекты), минимизируя при этом область наложения покрывающих объектов. Было найдено решение такой задачи для случая выпуклых объектов, таких как круги, прямоугольники и многоугольники с некоторыми свойствами симметрии. Были получены некоторые результаты для покрытия кругов конгруэнтными кругами. Некоторые неевклидовы задачи покрытия в основном касаются шаров. Известны несколько работ посвященных решению такой задачи: можно ли параллельно перенести заданный набор выпуклых объектов так, чтобы они покрыли заданное выпуклое множество. Результаты в этой области ограничены случаем дисков.

Таким образом, в настоящее время известны работы, посвященные двумерным задачам покрытия, как набором идентичных объектов, так и набором объектов, метрические характеристики которых различны, и трехмерным задачам покрытия, в которых покрывающие объекты являются шарами, либо число покрывающих объектов ограничено, либо наложены жесткие ограничения на метрические характеристики покрываемого объекта. Прогресс в исследовании таких задач в двумерном пространстве делает актуальным распространение их и на случай трехмерного пространства и расширения класса покрывающих и покрываемых объектов.

3. Постановка задачи и цели работы

Задано компактное многогранное множество $\Omega \subset R^3$ и семейство прямых параллелепипедов
$\Lambda = \left\{ P_i = \left\{ (x, y, z) \in R^3 : -a_i \le x \le a_i, -b_i \le y \le b_i, -c_i \le z \le c_i \right\}, i \in I = \{1,2,..,n\} \right\}$, где R^3 – Евклидово арифметическое трехмерное пространство. Множество Ω считаем неподвижным. Положение P_i в R^3 определяется вектором трансляции $u_i = (x_i, y_i, z_i)$. Полагаем, что P_i не вращаются. Обозначим через $P_i(u_i)$ параллелепипед P_i, транслированный на вектор $u_i = (x_i, y_i, z_i)$, тогда вектору $u = (u_1, u_2,.., u_n) \in R^{3n}$ соответствует семейство конгруэнтных параллелепипедов $\Lambda(u) = \left\{ P_1(u_1), P_2(u_2),.., P_n(u_n) \right\}$.

Семейство $\Lambda(u)$ - покрытие множества Ω, если существует вектор $u \in R^{3n}$, такой, что выполнено соотношение: $\Omega \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} P_i(u_i) \right) = \Omega$.

Задача. Необходимо определить, существует ли такой вектор u, что $\Lambda(u)$ - покрытие области Ω.

Целью данной работы является построение специальной функции, зависящей от параметров размещения параллелепипедов семейства Λ. И использование ее для создания математической модели задачи покрытия.

4. Построение гамма-функции

Пусть $u = u^0 = (u_1^0, u_2^0, .., u_n^0) \in R^{3n}$ - фиксированный вектор, ему соответствует семейство $\Lambda(u^0) = \{P_i(u_i^0), i \in I\}$. Объединение параллелепипедов этого семейства образует некоторое множество в R^3 вида $P(u^0) = \bigcup_{i=1}^{n} P_i(u_i^0)$.

Дополнение к $P(u^0)$ обозначим через $H(u^0) = cl(R^3 \setminus P(u^0))$. На основании двойственности теоретико-множественных операций можем написать:

$$H(u^0) = cl(R^3 \setminus \bigcup_{i=1}^{n} P(u_i^0)) = cl\bigcap_{i=1}^{n}\left(R^3 \setminus P_i(u_i^0)\right). \qquad (4.1)$$

Очевидно, что $\Lambda(u^0)$ - покрытие Ω, если $\Omega \cap H(u^0) = \varnothing$. Тогда задача может быть сформулирована следующим образом:

Определить, существует ли такой вектор $u^0 \in R^{3n}$, что выполнено соотношение

$$\Omega \cap H(u^0) = \varnothing. \qquad (4.2)$$

В [10] было построено разбиение всего пространства R^6 на взаимно непересекающиеся множества, а именно:

$$R^6 = \bigcup_{k=1}^{28} R_{ij}^k \text{, если } \begin{cases} a_i < a_j \\ b_i < b_j \\ c_i < c_j \end{cases}; \quad R^6 = \bigcup_{k=1, k\neq 15}^{29} R_{ij}^k \text{, если } \begin{cases} a_i < a_j \\ b_i < b_j \\ c_i > c_j \end{cases};$$

$$R^6 = \bigcup_{k=1, k\neq 15,29}^{30} R_{ij}^k \text{, если } \begin{cases} a_i > a_j \\ b_i < b_j \\ c_i > c_j \end{cases}; \quad R^6 = \bigcup_{k=1, k\neq 15,29,30}^{31} R_{ij}^k \text{, если } \begin{cases} a_i < a_j \\ b_i > b_j \\ c_i > c_j \end{cases}.$$

Где $R_{ij}^t \bigcap R_{ij}^r = \varnothing$ при $t \neq r \in I$. Тогда $H(u) = \bigcup_{k=1}^{31} H_{ij}^k$ ($u = (u_i, u_j)$), где $H_{ij}^k = cl((R^3 \setminus P_i(u_i)) \bigcap (R^3 \setminus P_j(u_j))), (u_i, u_j) \in R_{ij}^k$.

Определение. Если множество $h(u_i^1, u_j^1) \in H_{ij}^k(u_i, u_j)$ и множество $h(u_i^2, u_j^2) \in H_{ij}^k(u_i, u_j)$, то $h(u_i^1, u_j^1)$ и $h(u_i^2, u_j^2)$ имеют одинаковую пространственную форму k-го типа.

Для случая n параллелепипедов разбиение всего пространства имеет вид: $R^{3n} = \bigcup_{q=1}^{\eta} R_q^{3n}$, где $\eta \le 31^{\sigma-1}$, $\sigma = \frac{1}{2} n(n-1)$, если $n > 2$, и $\eta \le 31$, если $n = 2$, $R_q^{3n} = \{(u_1, u_2, .., u_n)$:

$(u_1, u_2) \in R_{12}^{k_1}, (u_1, u_3) \in R_{13}^{k_2}, .., (u_1, u_n) \in R_{1n}^{k_{n-1}}, (u_2, u_3) \in R_{23}^{k_n}, .., (u_{n-1}, u_n) \in R_{(n-1)n}^{k_\mu}$, На

$\mu = n(n-1)/2\}$.

каждом подмножестве $R_q^{3n} \subset R^{3n}$ определено подсемейство $H_q(u) \subset H(u)$. То есть, семейство $H(u)=\bigcup_{q=1}^{\eta} H_q(u)$, причем каждое $H_q(u)$ состоит из множеств, имеющих один и тот же тип пространственной формы.

Любое множество $h \in H(u)$ можно представить в виде конечного объединения выпуклых множеств не более 33 видов, а именно: полупространств $C_l, l=1,2,..,6$, двугранных углов $C_l, l=7,8,..,18$ (Рис.4.1), трехгранных углов $C_l, l=19,20,..,26$ (Рис.4.2), полубесконечных цилиндров $C_l, l=27,28,..,32$ (Рис.4.3) и параллелепипедов C_{33} (Рис.4.4).

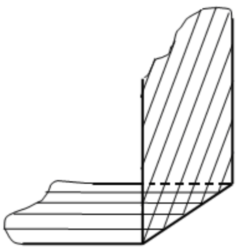

Рис.4.1.Двугранный угол

Рис.4.2. Трехгранный угол

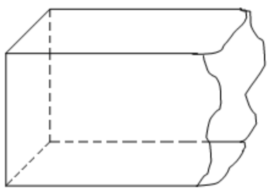

Рис.4.3. Полубесконечный цилиндр

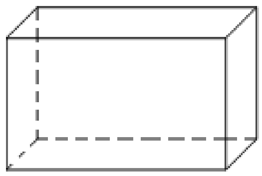

Рис.4.4. Параллелепипед

Множества $C_l, l=1,2,..,33$ задаются системами неравенств:

$$C_{1,2}:\{\pm x \mp x_i - a_i \ge 0,\ \ C_{3,4}:\{\pm y \mp y_l - b_l \ge 0,\ \ C_{5,6}:\{\pm z \mp z_r - c_r \ge 0;$$

$$C_{7,8,9,10}:\begin{cases}\pm x \mp x_j - a_j \ge 0\\ \pm y \mp y_l - b_l \ge 0\end{cases},\ C_{11,12,13,14}:\begin{cases}\pm x \mp x_j - a_j \ge 0\\ \pm z \mp z_r - c_r \ge 0\end{cases},$$

$$C_{15,16,17,18}:\begin{cases}\pm y \mp y_t - b_t \ge 0\\ \pm z \mp z_p - c_p \ge 0\end{cases};\ C_{19,20,..,25,26}:\begin{cases}\pm x \mp x_j - a_j \ge 0\\ \pm y \mp y_l - b_l \ge 0\\ \pm z \mp z_p - c_p \ge 0\end{cases};$$

$$C_{27,28}:\begin{cases}-x + x_i - a_i \ge 0\\ x - x_j - a_j \ge 0\\ -y + y_l - b_l \ge 0\\ y - y_t - b_t \ge 0\\ \pm z \mp z_r - c_r \ge 0\end{cases},\ C_{29,30}:\begin{cases}-x + x_i - a_i \ge 0\\ x - x_j - a_j \ge 0\\ \pm y \mp y_l - b_l \ge 0\\ -z + z_r - c_r \ge 0\\ z - z_p - c_p \ge 0\end{cases},\ C_{31,32}:\begin{cases}\pm x \mp x_i - a_i \ge 0\\ -y + y_l - b_l \ge 0\\ y - y_t - b_t \ge 0\\ -z + z_r - c_r \ge 0\\ z - z_p - c_p \ge 0\end{cases};$$

$$C_{33}:\begin{cases}-x+x_i-a_i\geq 0\\ x-x_j-a_j\geq 0\\ -y+y_l-b_l\geq 0\\ y-y_t-b_t\geq 0\\ -z+z_r-c_r\geq 0\\ z-z_p-c_p\geq 0\end{cases}\tag{4.3}$$

Заметим, что если $(u_i,u_j)\in R_{ij}^k\subset R^6$, тогда подсемейство $H_{ij}^k(u_i,u_j)$, $k\in I\setminus 1=\{2,3,..,31\}$ состоит из множеств одного и того же типа и определяется одинаковыми наборами множеств семейства

$$C_{ij}=\{C_l,l=1,2,..,33\}.\tag{4.4}$$

Следует отметить, что каждое подсемейство $H_{ij}^k(u_i,u_j)$, $k\in I\setminus 1=\{2,3,..,31\}$ определяется различным объединением множеств семейства (4.4).

Тогда множество $h(u)$ представим в виде:

$$h(u)=\bigcup C_{ij}(w_{ij}),\tag{4.5}$$

где $C_{ij}\in\{C_l,l=1,2,..,33\}$, w_{ij} состоит из не более чем 6 соответствующих компонент вектора $u=(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,..,x_n,y_n,z_n)$.

Для проверки выполнения соотношения (4.2) удобно использовать Ф-функцию [1, 9].

Пусть множество Ω выпукло и задается следующей системой неравенств:

$\begin{cases}a_1x+b_1y+d_1\geq 0\\ a_2x+b_2y+d_2\geq 0\\ \dots\dots\dots\dots\\ a_\tau x+b_\tau y+d_\tau\geq 0\end{cases}$ и набором вершин $(x^j,y^j,z^j), j=1,2,..,\tau,$

Тогда, [9], Φ-функции для множеств Ω и $C_l, l=1,2,..33$ имеют вид:

- для $l=1,2,..,6$:

$\Phi_1(x)=x^g-a_i+x_i-x, \Phi_2(x)=x^f-a_j-x_j+x, \Phi_3(y)=y^s-b_l+y_l-y,$

$\Phi_4(y)=y^q-b_t-y_t+y,\ \Phi_5(z)=z^m-c_r+z_r-z,\ \Phi_6(z)=z^e-c_p-z_p+z;$

- для $l=7,8,..,33$:

$$\Phi_7(x,z)=\max\begin{Bmatrix}x^g-a_i+x_i-x, z^e-c_p-z_p+z,\\ a_{\rho k}(x-a_i+x_i)+b_{\rho k}(z+z_p-c_p)+d_{\rho k}\end{Bmatrix},$$

……………………………………………………………………………………….…;

$\Phi_{19}(x,y,z)=\max\{x^f-a_j-x_j+x, y^q-b_t-y_t+y, z^e-c_p-z_p+z, a_{\rho k}(x-a_j+x_j)+$
$+b_{\rho k}(z+z_p-c_p)+d_{\rho k}, a_{\sigma k}(x-a_j+x_j)+b_{\sigma k}(y-b_t+y_t)+d_{\sigma k}, a_{\zeta k}(y-b_t+y_t)+$
$b_{\zeta k}(z+z_p-c_p)+d_{\zeta k}\},$

………………………………………………………………………………………....;

$\Phi_{27}(x,y,z)=\max\{x^g-a_i+x_i-x,x^f-a_j-x_j+x,y^s-b_l+y_l-y,y^q-b_t-y_t+y,$
$z^m-c_r+z_r-z,a_{\sigma k}(x-a_i+x_i)+b_{\sigma k}(y+b_l-y_l)+d_{\sigma k},a_{\alpha k}(x-a_i+x_i)+$
$b_{\alpha k}(y+b_l-y_l)+d_{\alpha k},a_{\beta k}(x-a_i+x_i)+b_{\beta k}(y+b_l-y_l)+d_{\beta k},a_{\gamma k}(x-a_i+x_i)+$
$b_{\gamma k}(y+b_l-y_l)+d_{\gamma k},a_{\rho k}(x-a_i+x_i)+b_{\rho k}(z+c_r-z_r)+d_{\rho k},a_{\mu k}(x-a_i+x_i)+$
$b_{\mu k}(z+c_r-z_r)+d_{\mu k},a_{\zeta k}(y+b_l-y_l)+b_{\zeta k}(z+c_r-z_r)+d_{\zeta k},a_{\xi k}(y+b_l-y_l)+$
$b_{\xi k}(z+c_r-z_r)+d_{\zeta k}\},$
…………………………………………………………………………………...……..;
$\Phi_{33}(x,y,z)=\max\{x^g-a_i+x_i-x,x^f-a_j-x_j+x,y^s-b_l+y_l-y,y^q-b_t-y_t+y,$
$z^m-c_r+z_r-z,a_{\sigma k}(x-a_i+x_i)+b_{\sigma k}(y+b_l-y_l)+d_{\sigma k},a_{\alpha k}(x-a_i+x_i)+$
$b_{\alpha k}(y+b_l-y_l)+d_{\alpha k},a_{\beta k}(x-a_i+x_i)+b_{\beta k}(y+b_l-y_l)+d_{\beta k},a_{\gamma k}(x-a_i+x_i)+$
$b_{\gamma k}(y+b_l-y_l)+d_{\gamma k},a_{\rho k}(x-a_i+x_i)+b_{\rho k}(z+c_r-z_r)+d_{\rho k},a_{\mu k}(x-a_i+x_i)+$
$b_{\mu k}(z+c_r-z_r)+d_{\mu k},a_{\zeta k}(y+b_l-y_l)+b_{\zeta k}(z+c_r-z_r)+d_{\zeta k},a_{\xi k}(y+b_l-y_l)+$
$b_{\xi k}(z+c_r-z_r)+d_{\zeta k}\}.$

Тогда Φ-функция для множеств $\Omega(v)$ и $h^0=h(u^0)\in H_q^{3n}(u^0)$, где $u=u^0$ - фиксированный вектор параметров размещения, имеет вид: $\Phi_q(v)=\min\{\Phi_{qj},j=1,2,..,\lambda_q\}$, где $\Phi_{qj}(v)$ - Φ-функция для множеств $\Omega(v)$ и $C_{ij}^0=C_{ij}(u^0)$. Так, если найдется $\exists v^*:\Phi_q(v^*)\ge 0$, то множества $\Omega(v^*)$ и $h(u^0)$ не пересекаются, т.е. выполнено соотношение (4.2) и $P(u^0)$ - покрытие $\Omega(v^*)$.

Для $\forall u\in R_q^{3n}$ множества $h(u)$ имеют пространственную форму одного и того же типа и могут отличаться только метрическими характеристиками, и определяются одним и тем же набором множеств из семейства $C_l,l=1,2,..,33$. Значит, Φ-функции $\Phi_{qj}(v),j=1,2,..,\lambda_q$ для $\forall u\in \operatorname{int} R_q^{3n}$ имеют один и тот же вид и могут отличаться только значениями коэффициентов. Следовательно, взяв u в качестве параметра в функциях $\Phi_{qj}(v),j=1,2,..,\lambda_q$, получим следующую функцию:

$$F_q(u,v)=\min\{F_{qj}(u,v),j=1,2,..,\lambda_q\}. \tag{4.6}$$

Легко видеть, что если $\exists(u^*,v^*):F_q(u^*,v^*)\ge 0$, то $\Omega(v^*)\bigcap H_q^{3n}(u^*)=\varnothing$.

Построим функцию:

$$F(u,v)=\begin{cases}F_1(u,v), для u\in R_1^{3n}\\ F_2(u,v), для u\in R_2^{3n}\\ \dots\dots\dots\dots\\ F_\eta(u,v), для u\in R_\eta^{3n}\end{cases},\eta\le 31^\sigma,\sigma=n(n-1)/2.$$

Определение. Функция $F(u,0)$ называется Γ-функцией для множеств Ω и $P_i(u_i),i=1,2,..,n$ и обозначается $\Gamma(u)$.

То есть,

$$\Gamma(u)=\begin{cases}\Gamma_1(u), для u \in R_1^{3n}\\ \Gamma_2(u), для u \in R_2^{3n}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \Gamma_\eta(u), для u \in R_\eta^{3n}\end{cases}.$$

Из вышесказанного следует, что если $\exists u^*:\Gamma(u^*)\ge 0$, то множество $P(u^*)$ покрывает область Ω.

Теорема1. Γ-функция терпит разрыв первого рода.

Для доказательства рассмотрим Γ-функцию для множеств Ω и $P_i(u_i)$, Ω и $P_j(u_j)$, то есть при $n=2$. В этом случае, в зависимости от метрических характеристик параллелепипедов $P_i(u_i)$ и $P_j(u_j)$ будем иметь различные разбиения всего пространства, а значит:

$$\Gamma(u)=\begin{cases}\Gamma_1(u), для u \in R_{ij}^{1}\\ \Gamma_2(u), для u \in R_{ij}^{2}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \Gamma_{28}(u), для u \in R_{ij}^{28}\end{cases}, \text{ или } \Gamma(u)=\begin{cases}\Gamma_1(u), для u \in R_{ij}^{1}\\ \Gamma_2(u), для u \in R_{ij}^{2}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \Gamma_{14}(u), для u \in R_{ij}^{14}\\ \Gamma_{16}(u), для u \in R_{ij}^{16}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \Gamma_{29}(u), для u \in R_{ij}^{29}\end{cases},$$

$$\text{или } \Gamma(u)=\begin{cases}\Gamma_1(u), для u \in R_{ij}^{1}\\ \Gamma_2(u), для u \in R_{ij}^{2}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \Gamma_{14}(u), для u \in R_{ij}^{14}\\ \Gamma_{16}(u), для u \in R_{ij}^{16}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \Gamma_{29}(u), для u \in R_{ij}^{29}\\ \Gamma_{30}(u), для u \in R_{ij}^{30}\end{cases}, \text{ или } \Gamma(u)=\begin{cases}\Gamma_1(u), для u \in R_{ij}^{1}\\ \Gamma_2(u), для u \in R_{ij}^{2}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \Gamma_{14}(u), для u \in R_{ij}^{14}\\ \Gamma_{16}(u), для u \in R_{ij}^{16}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \Gamma_{29}(u), для u \in R_{ij}^{29}\\ \Gamma_{31}(u), для u \in R_{ij}^{31}\end{cases}. \quad (4.7)$$

Из построения функций $\Gamma_k(u)$ следует, что функция $\Gamma(u)$ кусочно-гладкая на множествах $\operatorname{int} R_{ij}^k, k\in I$. Это означает, что функция $\Gamma(u)$ кусочно-гладкая на множестве $\bigcup_{k=1}^{28}\operatorname{int} R_{ij}^k$ и $\bigcup_{k=1,k\ne 15}^{29}\operatorname{int} R_{ij}^k$, и $\bigcup_{k=1,k\ne 15,29}^{30}\operatorname{int} R_{ij}^k$, и $\left(\bigcup_{k=1,k\ne 15}^{28}\operatorname{int} R_{ij}^k\right)\cup R_{ij}^{31}$. Рассмотрим теперь функцию $\Gamma(u)$ в точках, принадлежащих множествам $frR_{ij}^t \cap frR_{ij}^q, t\ne q, t,q\in I.$

Пусть точка $u^0 \in frR_{ij}^t \bigcap frR_{ij}^q, t \neq q, t, q \in I \setminus \{1\}$. В силу соотношений (4.7), если $t = 15$, то $q \neq \{29,30,31\}$, если $t = 29$, то $q \neq \{15,30,31\}$, если $t = 30$, то $q \neq \{15,29,31\}$, если $t = 31$, то $q \neq \{15,29,30\}$, и наоборот. Очевидно, в этом случае множества $h^t(u^0)$ и $h^q(u^0)$ такие, что $frh^t(u^0) = frh^q(u^0)$. Это означает, что функция $F_q(u^0, v)$ для множеств $\Omega(v)$ и $h_{ij}^q(u^0)$ и функция $F_t(u^0, v)$ для множеств $\Omega(v)$ и $h_{ij}^t(u^0)$ такие, что $F_q(u^0, v) = F_t(u^0, v)$ (не тождественно). Следовательно, в точке u^0 функция $\Gamma(u)$ непрерывна.

Пусть точка $u^0 \in frR_{ij}^1 \bigcap frR_{ij}^q, t, q \in \{2,3,..,14,16,17,..,28\}$. Если $q \in \{2,3,..,14,16,17,..,28\}$, то может $frh_{ij}^1(u^0) = frh_{ij}^q(u^0)$, но в силу определения, множеств $h_{ij}^1(u^0)$ и $h_{ij}^q(u^0)$ имеют различные пространственные формы, следовательно, $\Gamma_1(u^0) \neq \Gamma_q(u^0)$, то есть в точке u^0 функция $\Gamma(u)$ разрывна.

Рассуждая аналогично, получаем, что Γ-функция $\Gamma(u)$ для множеств Ω и $P_i(u_i), i = 1,2,..,n$ кусочно-гладкая на множестве $G = (\bigcup_{q=1}^{\eta} R_q^{3n}) \setminus Q$, где

$$Q = \left\{ u \in frR_q^{3n}, q = 1,2,..,\eta \mid \exists i, j, i \neq j \in \{1,2,..,n\} : (u_i, u_j) \in frR_{ij}^1 \bigcap frR_{ij}^q, q \in \{2,3,..,31\} \right\}$$

Как следует из построения функции $\Gamma(u)$ и свойств Φ-функции[4], решение задачи 2 может быть сведено к решению задачи:

$$\max \Gamma(u), u \in R^{3n} \tag{4.8}$$

При этом процесс решения может быть окончен, как только найден вектор $u^0 : \Gamma(u^0) \geq 0 \ \Gamma(u^j) \geq 0$, а, значит, не обязательно решать задачу (4.8) полностью.

Если множество Ω односвязно, то используя предыдущее утверждение и свойства Γ-функции, задача (4.8) может быть сведена к последовательности подзадач:

$$\chi^* = \max\{\chi_{i_q}^*, q = 1,2,..,\eta_1\}, \tag{4.9}$$

где $\chi_{i_q}^* = \Gamma_{i_q}(u^*) = \max \Gamma_{i_q}(u), u \in R_q^{3n}, q = 1,2,..,\eta_1 < \eta$, (4.10)

η_1 число функций F_q. Процесс решения заканчивается, как только $\chi_{i_q}^* \geq 0$.

Рассмотрим некоторые свойства задачи (4.9-4.10).

Поскольку функция $\Gamma_q(u) = \min\left\{\Gamma_{qi}(u), i = 1,2,..,\lambda_q\right\}$ (4.6), то число μ_q локальных максимумов функции на множестве R_q^{3n} не более $\tau_q = \prod_{j=1}^{\lambda_q} l_{qj}$, где l_{qj} количество линейных функций, формирующих функции $\Phi_{qj}(v), j = 1,2,..,\lambda_q$

Доказательство. Поскольку $\Gamma_q(u) = \min\{\Gamma_{qi}(u), i = 1,2,.., \lambda_q\}$, а множество R_q^{3n} задается системой неравенств $A_q(u) + B_q \geq 0$ [10], то поиск $\max \Gamma_q(u), u \in R_q^{3n}$ сводится к поиску

$$\max \chi_q, \chi_q \in W_q, \tag{4.11}$$

где W_q задается системой неравенств:

$$\begin{cases} \Gamma_q(u) - \chi \geq 0 \\ A_q(u) + B_q \geq 0 \end{cases}.$$

Поскольку $\Gamma_q(u) = \min\{\Gamma_{qi}(u), i = 1,2,.., \lambda_q\}$, то W_q фактически задается следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} \Gamma_{q1}(u) - \chi_q \geq 0 \\ \Gamma_{q2}(u) - \chi_q \geq 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Gamma_{q\lambda_q}(u) - \chi_q \geq 0 \\ A_q(u) + B_q \geq 0 \end{cases}.$$

Где каждое неравенство $\Gamma_{qj}(u) - \chi_q \geq 0$ - это совокупность $1 \leq l_{qj} \leq 12$ неравенств. Тогда полученная система может быть представлена в виде совокупности, состоящей из не более чем $\tau = \prod_{j=1}^{\lambda_q} l_{qj}$ систем линейных неравенств, которая в общем случае имеет вид:

$$\begin{cases} a_{qj_1}(-a_{qi_1} + x_{i_1}) + b_{qj_1}(b_{qi_1} - y_{i_1}) + c_{qj_1}(c_{qi_1} - z_{i_1}) + d_{qj_1} - \chi \geq 0 \\ a_{qj_2}(-a_{qi_2} + x_{i_2}) + b_{qj_2}(b_{qi_2} - y_{i_2}) + c_{qj_2}(c_{qi_2} - z_{i_2}) + d_{qj_2} - \chi \geq 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad , \xi = \lambda_q. \\ a_{qj_\xi}(-a_{qi_\xi} + x_{i_\xi}) + b_{qj_\xi}(b_{qi_\xi} - y_{i_\xi}) + c_{qj_\xi}(c_{qi_\xi} - z_{i_\xi}) + d_{qi_{\xi 1}} - \chi \geq 0 \\ A_q(u) + B_q \geq 0 \end{cases}$$

Обозначим полученную систему: $\begin{cases} Q_q(u) + T_q \geq 0 \\ A_q(u) + B_q \geq 0 \end{cases}.$

Следует отметить, что некоторые системы могут совпадать, быть несовместными или определять множества, содержащиеся друг в друге. Это может существенно уменьшить число τ.

В силу предыдущего решение задачи сводится к последовательности задач линейного программирования (4.11).

5. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Построены специальные функции, зависящие от параметров размещения параллелепипедов заданного семейства, исследованы их свойства. Построена математическая модель задачи покрытия. Решение трехмерной задачи покрытия сведено к последовательности задач линейного программирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stoyan Yu. Covering a polygonal region by a collection of various rectangles // Проблемы машиностроения. – 2007.т.10, №2 – С.67-82.
2. Кривуля А.В. Математическая модель задачи покрытия многоугольной области прямоугольными объектами // Системи обробки інформації. – 2007.т.66, №8 – С.143-145.
3. Романова Т.Е., Злотник М.В., Панкратов А.В., Кривуля А.В. Стратегия решения задачи покрытия многосвязной многоугольной области // Бионика интеллекта. – 2007.т.67, №2 – С.51-55.
4. Романова Т.Е., Злотник М.В., Кривуля А.В. Аналитическое описание условия покрытия прямоугольной области прямоугольными объектами // Искусственный интеллект. – 2006.№4 – С.175-183.
5. Daniels K., Inkulu R. An incremental algorithm for translational polygon covering //University of Massachusetts at Lowell Computer Science Technical Report // 2001.№1
6. Hochbaum D Fast approximation algorithms for a nonconvex covering problem //Journal of algorithms // 1987.vol.8 – P.305-323.
7. Cao An Wang, Bo-Ting Yang, Binzhai Zhu. On some polyhedra covering problems //Journal of Combinatorial Optimization.-2000. №4 – P.437-447.
8. Toth G. F. Packing and covering //Handbook of discrete and computational geometry //CRC Press New York // 1997.
9. Stoyan Yu., Scheithauer G., Pridatko D., Romanova T. Φ-function for primary 3D-objcts //Technische Universität Dresden // MATH-NM – 2002.№15 – P.7-11.
10. Сосюрка Е.С. Аналитическое описание взаимного расположения прямых парллелепипедов в задаче покрытия компактного многогранного множества // Вестник Харьковского национального университета. – 2008.№833 – С.247-257.

Надійшла у першій редакції 23.02.2009, в останній – 02.03.2009.