Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
№ 847, 2009, с.339-344

УДК 517.954:517.972

Экстремальные задачи с квадратичным функционалом и условием ляпуновкого типа

Ю. И. Черский, О. Н. Яковлева
Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Украина.
Южноукраинский государственный педагогический университет имени К.Д. Ушинского, Украина.

Problems considered with two elements which must be defined. Defining the second element is possible by the decision of extreme problem type of Lyapunov.

Речь пойдет о задачах, которые можно представить в следующей форме с двумя искомыми элементами v и w из вещественных линейных пространств:

$$\left.\begin{aligned} F(w) &\to \inf \\ G(w) - H(v) &= 0 \\ w \in Z,\ v &\in Q. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Здесь F – заданный непрерывный функционал, $F: W \to \mathbf{R}^1$; W - линейное нормированное пространство; G и H - заданные непрерывные операторы, $G: W \to Y$, $H: V \to Y$, где V и Y - линейные нормированные пространства; Q - заданное подмножество, $Q \subset V$; Z - заданное подмножество, $Z \subset W$.

Иногда целесообразно сначала решить задачу (2) с искомым элементом w и при каждом элементе $\sigma \in Y$:

$$F(w) \to \inf,\quad G(w) = \sigma,\quad w \in Z. \qquad (2)$$

Если решение $w = w(\sigma)$ найдено, то вторым этапом будет построение и решение экстремальной задачи с искомым элементом v:

$$F\langle w[H(v)]\rangle \to \inf,\quad v \in Q. \qquad (3)$$

Если элемент v найден, то элемент w можно построить по формуле

$$w = w[H(v)].$$

В качестве первой иллюстрации рассмотрим новую задачу с квадратичным функционалом, но с дополнительным условием (6) – как в ляпуновской задаче:

$$\begin{cases} \int\limits_{\Omega} |(Au)(x) + (Bv)(x) - g(x)|^2 dx \to \inf & (4) \\ \int\limits_{\Omega} [\varphi(x)u(x) + \psi(x)v(x)] dx = \gamma & (5) \\ p(x) \le v(x) \le q(x),\ x \in \Omega. & (6) \end{cases}$$

Требуется найти принадлежащие вещественному пространству $L^2(\Omega)$ функции $u(x)$ и v(x). Ω - измеримое по Лебегу множество, $\Omega \subset \mathrm{P}^n$, n - целое положительное число. Функции $g(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $p(x)$ и $q(x)$ заданы в $L^2(\Omega)$, $\|\varphi\|>0$. Задано γ - вещественное число. A и B - заданные линейные ограниченные операторы, действующие из $L^2(\Omega)$ в $L^2(\Omega)$. Для простоты предположим, что существует ограниченный оператор A^{-1}.

Для придания поставленной задаче формы (1) достаточно ввести принадлежащую $L^2(\Omega)$ новую неизвестную функцию

$$w(x)\equiv(Au)(x)+(Bv)(x)-g(x). \tag{7}$$

Получим равносильную экстремальную задачу

$$\left.\begin{array}{r}\int\limits_\Omega w^2(x)dx\to\inf,\\ \int\limits_\Omega a(x)w(x)dx-\int\limits_\Omega\langle b(x)-\psi(x)\rangle v(x)dx-\gamma_0=0\\ p(x)\le v(x)\le q(x),\ x\in\Omega\end{array}\right\} \tag{8}$$

Здесь, очевидно,

$$Z=L^2(\Omega),\quad F(w)\equiv\int\limits_\Omega w^2(x)dx,\quad G(w)\equiv\int\limits_\Omega a(x)w(x)dx,$$

$$H(v)\equiv\int\limits_\Omega\langle b(x)-\psi(x)\rangle v(x)dx+\gamma_0,\quad \gamma_0=\gamma-\int\limits_\Omega a(x)g(x)dx$$

и для упрощения записей введены функции $a(x)=\left(A^{-1^*}\varphi\right)(x)$, $b(x)=\left(B^*A^{-1^*}\varphi\right)(x)$, причем $\|a\|>0$.

Экстремальная задача (2), где теперь σ - произвольное вещественное число, имеет простой вид $\int\limits_\Omega w^2(x)dx\to\inf$, $\int\limits_\Omega a(x)w(x)dx=\sigma$ и безусловное и единственное решение

$$w(x,\sigma)=\frac{\sigma}{\int\limits_\Omega a^2(s)ds}\cdot a(x).$$

Переходя к построению задачи (3) запишем сначала $w[H(v)]$ и $F\langle w[H(v)]\rangle$:

$$w=w(x,H(v))=\frac{a(x)}{\int\limits_\Omega a^2(s)ds}\left\{\int\limits_\Omega\langle b(s)-\psi(s)\rangle v(s)ds+\gamma_0\right\}, \tag{9}$$

$$F\langle w[H(v)]\rangle=\frac{1}{\int\limits_\Omega a^2(s)ds}\left\{\int\limits_\Omega\langle b(s)-\psi(s)\rangle v(s)ds+\gamma_0\right\}^2.$$

Итак, задачу (3) можно представить в следующем виде:

$$\left.\begin{array}{r}\left|\int\limits_\Omega\langle\psi(x)-b(x)\rangle v(x)dx-\gamma_0\right|\to\inf,\\ p(x)\le v(x)\le q(x),\ x\in\Omega.\end{array}\right\} \tag{10}$$

Предполагая задачу (10) разрешимой, рассмотрим три случая.

Случай 1. $\int\limits_{\Omega}\langle\psi(x)-b(x)\rangle v(x)dx>\gamma_0$.

Задача (10) становится ляпуновской:

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_{\Omega}\langle\psi(x)-b(x)\rangle v(x)dx\to\inf,\\ p(x)\le v(x)\le q(x),\ x\in\Omega,\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

имеющей безусловное решение

$$v_-(x)=\begin{cases}p(x)\ \text{там, где}\ \psi(x)-b(x)>0,\\ q(x)\ \text{там, где}\ \psi(x)-b(x)<0,\end{cases}$$

На множестве значений *x,* где $\psi(x)-b(x)=0$, функция $v_-(x)$ может принимать любые значения при условиях $v_-(x)\in L^2(\Omega)$ и $p(x)\le v(x)\le q(x)$.

Если при этом выполняется неравенство $\int\limits_{\Omega}\langle\psi(x)-b(x)\rangle v_-(x)dx>\gamma_0$ (возможный произвол функции $v_-(x)$ здесь влияния не оказывает), то задача (10) разрешима, решением является функция (семейство функций) $v_-(x)$ и других решений нет.

Случай 2. $\int\limits_{\Omega}\langle\psi(x)-b(x)\rangle v_-(x)dx>\gamma_0$.

Теперь под знаком модуля в задаче (10) стоит отрицательное число и вместо (11) получим задачу

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_{\Omega}\langle\psi(x)-b(x)\rangle v(x)dx\to\sup,\\ p(x)\le v(x)\le q(x),\ x\in\Omega\end{aligned}\right\}$$

с безусловным решением

$$v_+(x)=\begin{cases}p(x),\quad \text{если}\ \psi(x)-b(x)>0\\ q(x),\quad \text{если}\ \psi(x)-b(x)<0,\end{cases}$$

а при $\psi(x)-b(x)=0$ функция $v_+(x)$, подобно $v_-(x)$, произвольна в рамках неравенств $p(x)\le v(x)\le q(x)$ и условия $v_+(x)\in L^2(\Omega)$.

Если окажется, что

$$\int\limits_{\Omega}\langle\psi(x)-b(x)\rangle v_+(x)dx<\gamma_0,$$

то задача (10) имеет своим решением функцию (семейство функций) $v_+(x)$, и только $v_+(x)$.

Случай 3 – последний из возможных –

$$\int\limits_{\Omega}\langle\psi(x)-b(x)\rangle v_-(x)dx\le\gamma_0\le\int\limits_{\Omega}\langle\psi(x)-b(x)\rangle v_+(x)dx.$$

Здесь очевидно, что инфимум в задаче (10) равен нулю и её решение $v_0(x)$ - неединственное , такое, что $v_0(x) \in L^2(\Omega)$,

$$\int_\Omega \langle \psi(x) - b(x) \rangle v_0(x) dx = \gamma_0 , \ p(x) \le v(x) \le q(x) .$$

Итак, $v(x)$ - одна из искомых функций в экстремальной задаче (4), (5), (6) – во всех случаях определена. Вторая искомая функция - $u(x)$ - теперь строится по формулам (9) и

$$u(x) = A^{-1}\{w(x) - (Bv)(x) + g(x)\}. \tag{12}$$

Более кратко рассмотрим ещё одну экстремальную задачу [1] также с искомыми функциями u и v, но теперь функция v окажется обобщённой – линейным функционалом (всё вещественно):

$$\left.\begin{aligned} \int_\Omega |(Au)(x) + (Bv)(x) - g(x)|^2 dx \to \inf, \\ \int_\Omega \varphi(x) u(x) dx + (v, \psi) = \gamma, \\ (v, m) = \mu, \\ (v, \tau) \ge 0, \ \text{ если } \ \tau(x) \in C(\Omega) \text{ и } \tau(x) \ge 0 \end{aligned}\right\}$$

(последнюю строку далее будем записывать кратко: $v \ge 0$).

Теперь Ω - замыкание ограниченной области с кусочно-гладкой границей, $\Omega \subset \mathrm{P}^n$. $C(\Omega)$ - пространство непрерывных на Ω функций с обычной нормой. Сопряженное пространство обозначим через K^*. Даны: числа γ и μ; функции $g(x)$ и $\varphi(x)$ из $L^2(\Omega)$; функции $\psi(x)$ и $m(x)$ из $C(\Omega)$; линейные ограниченные операторы A из $L^2(\Omega)$ в $L^2(\Omega)$ и B из K^* в $L^2(\Omega)$. Ищутся $u(x) \in L^2(\Omega)$ и $v \in K^*$.

Предполагается также существование ограниченного оператора A^{-1} и справедливость неравенства $\|\varphi\| > 0$.

По аналогии с предыдущим определим равенством (7) функцию $w(x)$ и придем к задаче (ср. с (8)):

$$\left.\begin{aligned} \int_\Omega w^2(x) dx \to \inf, \\ \int_\Omega a(x) w(x) dx + (v, \psi - b) - \gamma_0 = 0, \\ (v, m) = \mu, \ v \ge 0, \end{aligned}\right\}$$

где $a(x) \in L^2(\Omega)$, $b(x) \in C(\Omega)$, $\|a\| > 0$.

Вместо (9) и (10) теперь

$$w(x) = -\frac{a(x)}{\int_\Omega a^2(s) ds}\{(v, \psi - b) - \gamma_0\}, \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} \left|(v,\psi-b)-\gamma_0\right| &\to \inf, \\ (v,m)=\mu,\ v &\geq 0. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Снова три случая.

Случай 1. $(v,\psi-b)>\gamma_0$.

Задача (14) примет вид

$$(v,\psi-b)\to\inf\,,\qquad (v,m)=\mu\,,\qquad v\geq 0\,. \tag{15}$$

Приведем основной результат этой статьи.

Теорема. *Пусть существует единственная точка $\xi\in\Omega$ такая, что*

$$m(\xi)\neq 0\,,\quad \psi(x)-b(x)-\frac{\psi(\xi)-b(\xi)}{m(\xi)}m(x)\geq 0\,,\qquad \forall x\in\Omega\,.$$

Тогда для разрешимости задачи (15) достаточно неравенства

$$\frac{\mu}{m(\xi)}>0\,;$$

при этом единственным решением будет импульсивная функция (линейный функционал)

$$v_-=\frac{\mu}{m(\xi)}\cdot\delta(x-\xi)\,.$$

Предполагаем условия теоремы выполненными. Если окажется, что имеет место неравенство $(v_-,\psi-b)>\gamma_0$, то функция v_- будет единственным решением задачи (14).

Случай 2. $(v_-,\psi-b)<\gamma_0$.

Вместо (15) теперь будет задача

$$(v,\psi-b)\to\sup\,,\qquad (v,m)=\mu\,,\qquad v\geq 0\,, \tag{16}$$

а в условиях теоремы вместо ξ будет фигурировать единственная точка $\sigma\in\Omega$ такая, что

$$m(\sigma)\neq 0\,,\quad \psi(x)-b(x)-\frac{\psi(\sigma)-b(\sigma)}{m(\sigma)}m(x)\leq 0\,,\qquad \frac{\mu}{m(\sigma)}\geq 0\,.$$

Предполагая эти условия выполненными, получим единственное решение задачи (16):

$$v_+=\frac{\mu}{m(\sigma)}\cdot\delta(x-\sigma)\,,$$

причем очевидно, что $(v_+,\psi-b)\geq(v_-,\psi-b)$.

Если $(v_+,\psi-b)<\gamma_0$, то функционал v_+ будет единственным решением задачи (14).

Случай 3. $(v_-,\psi-b)\leq\gamma_0\leq(v_+,\psi-b)$.

В этом случае задача (14) имеет равный нулю инфимум и неединственное решение – все обобщенные функции v такие, что

$$v\in K^*\,,\qquad (v,\psi-b)=\gamma_0\,,\qquad (v,m)=\mu\,,\qquad v\geq 0\,.$$

Вторая искомая функция $U(x)$ строится согласно формуле (12), где функция *w(x)* определена равенством (13).

ЛИТЕРАТУРА

1. Черский Ю.И. Экстремальная задача с сингулярным решением // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. Сб.наук.пр. Вип.11. – Чернівці, 2004. С.200-203.

Надійшла у першій редакції 08.04.2009, в останній – 16.04.2009.