

УДК 519.6

## Просторові узагальнення крайових задач на конформні відображення з особливостями

А. Я. Бомба, А. В. Теребус

*Рівненський державний гуманітарний університет, Україна*

Методами побудови просторових рівномірних динамічних сіток одержано розв'язки просторових аналогів крайових задач на конформні відображення з особливостями для областей обмежених еквіпотенціальними поверхнями та поверхнями течії.

**Ключові слова:** *ідеальна течія, обтікання трьохвимірних тіл, аналоги конформних відображень, особливості, криволінійний паралелепіпед, еквіпотенціальні поверхні.*

Методами построения пространственных равномерных динамических сеток найдены решения пространственных аналогов краевых задач на конформные отображения с особенностями для областей ограниченных эквипотенциальными поверхностями и поверхностями течения.

**Ключевые слова:** *идеальное течение, обтекание 3D тел, эквипотенциальные поверхности, аналоги конформных отображений, особенности, криволинейный параллелепипед.*

The solution of boundary-value problems spatial analogues on conformal mappings with peculiarities for areas restricted by equipotential surfaces and surfaces of flow are received by means of spatial proportional conformal grids building.

**Keywords:** *ideal flow, flow around a 3D body, equipotential surface, analogues of conformal maps, singularities, curvilinear parallelepiped.*

### 1. Вступ

Просторові аналоги модельних задач на конформні відображення в механіці суцільних середовищ займають важливе місце [5, 6]. Теорія обтікання трьохвимірних тіл, є одним із мало розвинених розділів гідро- і аеродинаміки по причині неспроможності математичних методів розв'язування таких задач взагалі і відсутності просторового аналога методу годографа зокрема.

У роботах [1, 3, 4] йдеться про моделювання та прогнозування ідеальної течії у криволінійному паралелепіпеді, обмеженому попарно ортогональними між собою еквіпотенціальними поверхнями та поверхнями течії. Для розв'язання відповідних крайових задач на просторові конформні відображення (криволінійного паралелепіпеда на прямокутний) було узагальнено та модифіковано два підходи: метод гармонічних многочленів та різницевий метод.

У представленій роботі дані задачі доповнено «ділянками великих потенціалів» (особливостями) та узагальнено методологію побудови просторових рівномірних  $\varepsilon$ -конформних динамічних сіток стосовно їх розв'язання.

### 2. Загальна постановка задачі

Для криволінійного паралелепіпеда  $G_z = ABMCDA_*B_*M_*C_*D_*$  (рис. 1 а), обмеженого еквіпотенціальними поверхнями  $AA_*B_*B$  ( $f_1(x, y, z) = 0$ ),  $CC_*D_*D$  ( $f_2(x, y, z) = 0$ ) та поверхнями течії  $ABMCD$  ( $f_3(x, y, z) = 0$ ),  $A_*B_*M_*C_*D_*$  ( $f_4(x, y, z) = 0$ ),  $ADD_*A_*$  ( $f_5(x, y, z) = 0$ ),  $BMCC_*M_*B_*$  ( $f_6(x, y, z) = 0$ ) при наявності лінійного джерела (лінії з рівномірним розподілом точкових джерел)  $MM_* \in BCB_*C_*$ , розглядається модельна задача:  $\vec{v} = \text{grad} \varphi$ ,  $\text{div} \vec{v} = 0$ ,  $z \in G_z$ ,

$\varphi|_{ABB_*A_*} = \varphi_*$ ,  $\varphi|_{DCC_*D_*} = \varphi^*$ ,  $\varphi|_{MM_*} = -\infty$  (при заданих умовах стосовно інтенсивності відповідного джерела),  $\varphi'_n|_{ADD_*A_* \cup A_*B_*M_*C_*D_* \cup BMM_*B_* \cup MCC_*M_* \cup ABMCD} = 0$ , де  $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$  і  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  – відповідно вектор і потенціал швидкості ідеальної течії в точці  $\mathbf{z} = (x, y, z)$ , ( $0 < \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* < \infty$ ). Шляхом введення пари функцій  $\psi = \psi(x, y, z)$ ,  $\chi = \chi(x, y, z)$  (“просторово комплексно спряжених” із  $\varphi = \varphi(x, y, z)$ ) таких, що  $\text{grad}\varphi(x, y, z) = \text{grad}\psi(x, y, z) \times \text{grad}\chi(x, y, z)$ ,  $\text{grad}\psi(x, y, z) \times \text{grad}\chi(x, y, z) = 0$ , умовних розрізів вздовж поверхонь розділу течії та заміною третьої із граничних умов на умови:  $\psi|_{M_*MBB_*} = 0$ ,  $\psi|_{ADD_*A_*} = Q'$ ,  $\psi|_{MCC_*M_*} = Q_0$ ,  $\psi|_{MNN_*M_*} = Q''$ ,  $\chi|_{MBNADKC} = 0$ ,  $\chi|_{M_*B_*N_*A_*D_*K_*C} = Q^0$  (для зручності викладок, далі вважатимемо  $Q^0 = 1$ ), де  $Q'$ ,  $Q''$ ,  $Q_0$  – величини відповідних перетоків (наприклад, згідно рис. 1 а) - б),  $Q''$  – потік від  $MM_*$  до  $NN_*B_*B$ ), отримаємо відповідну задачу на “просторово конформне” відображення області  $G_r$  на відповідну область “просторового комплексного потенціалу”  $G_\omega$  (рис. 1 б), в), г)) (для випадків зображених на рис. 2 а) - б), в) - г):  $Q' = Q''$  і з'являється ще один невідомий параметр  $\tilde{\varphi}$  – потенціал на лінії «призупинки і розходження течії»  $KK_* \in AA_*D_*D$ ).

### 3. Системний аналіз

Очевидно, що в залежності від значень параметра  $Q_0$  (як параметра керування), матимемо різні випадки формування течії в  $G_r$ , а отже, форми області комплексного потенціалу  $G_\omega$ . Так, на рис. 1 а) - г) зображені випадки, коли  $Q_0$  є настільки малим, що має місце перетік від  $AA_*B_*B$  до  $CC_*D_*D$ . Зокрема, на рис. 1,3 зображено один із ключових (оптимізаційних) випадків  $Q_0 = Q_0^*$ , коли результуючий потік  $Q'$  через  $AA_*B_*B$  дорівнює нулю, а на рис. 1 а) - б) та рис. 1 а) - г), коли  $Q'$  відповідно менший та більший нуля. На рис. 2 а) - г) зображено усі можливі ситуаційні стани за умови відсутності перетоку між  $AA_*B_*B$  та  $CC_*D_*D$ , зокрема, на рис. 5,6 маємо другий ключовий випадок, коли значення  $Q_0 = Q_0^{**}$  є мінімальним серед відповідних значень  $Q_0$ . При цьому підкреслимо, що заданими є: рівняння усіх обмежуючих  $G_r$  поверхонь, величини потенціалів  $\varphi_*$  та  $\varphi^*$  на відповідних екіпотенціальних поверхнях та координати  $(x_M, y_M, z_M)$  точки  $M \in BC$  (далі розглядаємо спрощений випадок, коли лінія-джерело  $MM_*$  належить до екіпотенціальної поверхні, що проходить через задану точку  $M$  за умови відсутності даного джерела). Параметри ж  $Q'$ ,  $Q''$ ,  $Q_0$ ,  $\tilde{\varphi}$  шукаються в процесі розв'язку задачі у ключових випадках, а в інших (проміжних) один із них (або певна їх комбінація) задається.

Аналогічно до [2, 4] переходимо до відповідних обернених задач на відображення  $G_{\varphi} \rightarrow G_z$ , наприклад, у випадку зображеному на рис. 1 а), г) для знаходження відображення  $x = x(\varphi, \psi, \chi)$ ,  $y = y(\varphi, \psi, \chi)$ ,  $z = z(\varphi, \psi, \chi)$

матимемо задачу:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \chi} - \frac{\partial y}{\partial \chi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial \chi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \chi},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \chi} - \frac{\partial x}{\partial \chi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \left( \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \chi} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \chi} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \psi} - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \chi} - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \chi} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \psi} \right) + \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \chi} - \frac{\partial x}{\partial \chi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x(\varphi_*, \psi, \chi), (\varphi_*, \psi, \chi), (\varphi_*, \psi, \chi)) = 0, Q' \leq \psi \leq Q'' \vee 0 \leq \psi \leq Q'', 0 \leq \chi \leq Q^0, \\ f_2(x(\varphi^*, \psi, \chi), (\varphi^*, \psi, \chi), (\varphi^*, \psi, \chi)) = 0, Q' \leq \psi \leq Q_0, 0 \leq \chi \leq Q^0, \\ f_3(x(\varphi, \psi, 0), (\varphi, \psi, 0), (\varphi, \psi, 0)) = 0, (-\infty \leq \varphi \leq \varphi_*, 0 \leq \psi \leq Q'') \vee (-\infty < \varphi \leq \varphi^*, \\ Q'' \leq \psi \leq Q_0) \vee (\varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_*, Q' \leq \psi \leq Q''), f_4(x(\varphi, \psi, Q^0), (\varphi, \psi, Q^0), (\varphi, \psi, Q^0)) = 0, \\ (-\infty \leq \varphi \leq \varphi_*, 0 \leq \psi \leq Q') \vee (-\infty < \varphi \leq \varphi^*, Q'' \leq \psi \leq Q_0) \vee (\varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_*, Q' \leq \psi \leq Q''), \\ f_5(x(\varphi, Q', \chi), (\varphi, Q', \chi), (\varphi, Q', \chi)) = 0, \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_*, 0 \leq \chi \leq Q^0, \\ f_6(x(\varphi, 0, \chi), (\varphi, 0, \chi), (\varphi, 0, \chi)) = 0, -\infty \leq \varphi \leq \varphi_*, 0 \leq \chi \leq Q^0, \\ f_6(x(\varphi, Q_0, \chi), (\varphi, Q_0, \chi), (\varphi, Q_0, \chi)) = 0, -\infty < \varphi \leq \varphi^*, 0 \leq \chi \leq Q^0. \end{array} \right.$$

При цьому підкреслимо, що у кожному із описаних вище випадків область просторового комплексного потенціалу  $G_{\varphi}$  є многогранником, сторони якого паралельні координатним площинам. Неповна визначеність геометричної конфігурації цієї області (а саме, її залежність від співвідношення величин параметрів  $Q'$ ,  $Q''$ ,  $Q_0$ ,  $\varphi$ ) зумовлює необхідність побудови як алгоритмів числового розв'язання задачі для кожного із зазначених випадків окремо, так і «алгоритму вибору», призначеного для вибору одного із описаних вище випадків. Як і в [2] головним моментом при вирішенні цієї проблеми в цілому виходимо в першу чергу із розв'язання ключових (оптимізаційних) задач, що визначаються додатковою умовою на знаходження того із значень параметра керування, при якому досягається мінімум або максимум величин перетоків (хоч часто розв'язки оптимізаційних задач одержуються в граничному випадку при розв'язанні відповідних проміжних задач).

#### 4. Алгоритми вибору та розв'язання проміжних задач.

Алгоритм вибору побудуємо так: позначимо  $Q_0 = q$ ; розв'язуємо «ключову» задачу (1-а, 1-в) (тут і надалі нумерація задач ототожнюється із нумерацією відповідних рисунків) при «компенсаційній» умові  $\psi|_B = \psi|_A$ , де значення  $Q_0 = Q_0^*$  знаходиться в процесі розв'язання даної задачі; якщо задане значення  $q < Q_0^*$ , то розв'язуємо задачу (1-а, 1-б) при невідомих значеннях  $Q'$ ,  $Q''$  (у

випадку  $q = Q_0^*$  задача є розв’язаною); якщо задане значення  $q > Q_0^*$ , то розв’язуємо “ключову” задачу (2-а, 2-б), де значення  $Q_0 = Q_0^{**}$  знаходиться в процесі розв’язання даної задачі; якщо задане значення  $q < Q_0^{**}$  ( $q > Q_0^{**}$ ), то розв’язуємо задачу (1-а, 1-г) при невідомих значеннях  $Q', Q''$  ((2-в, 2-г) при невідомих значеннях  $Q', \bar{\varphi}$ ). У випадку  $q = Q_0^{**}$  задача є розв’язаною.

Алгоритми розв’язання проміжних задач для вибраних конкретних випадків формування течії ґрунтуються на ідеї почергової параметризації граничних вузлів, внутрішніх вузлів динамічної сітки, параметрів конформності та керування.

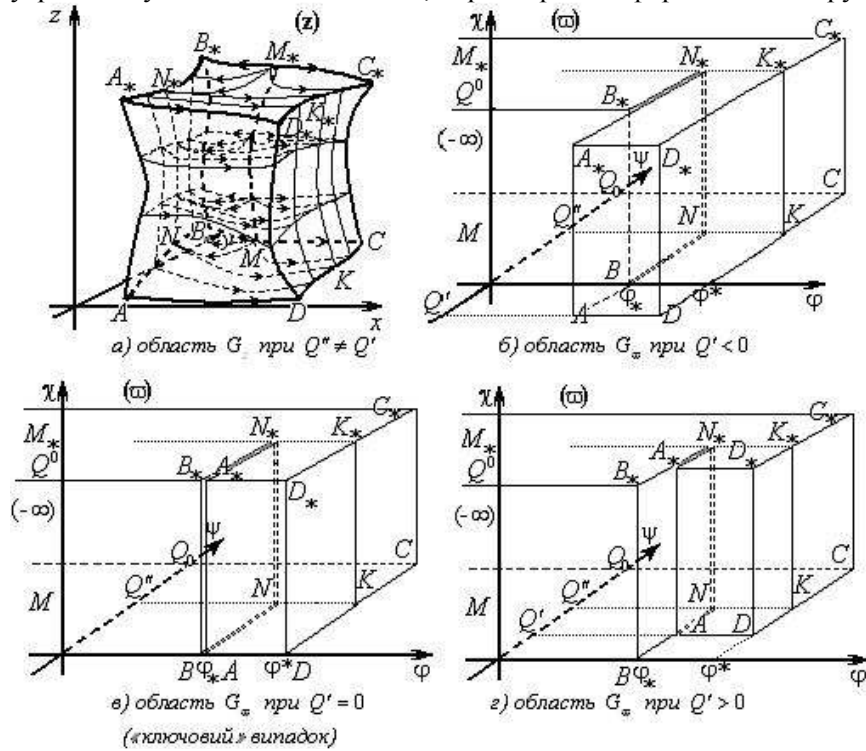


Рис. 1. Ситуаційні стани формування течії за умов наявності перетоку

Наведемо фрагменти алгоритму розв’язку поставленої задачі для випадку зображеному на рис. 1 а), г) (алгоритму просторового конформного відображення  $G_\omega$  на  $G_z$ ), як узагальнення відповідного «плоского алгоритму» (див., напр., [2]). 1. Нехай  $m, m_*$  ( $m_* \rightarrow \infty$ ),  $n, n_0, n_1, l$  – параметри сіткової області

$$G_\omega^\gamma = \bigcup_{s=1}^3 G_\omega^{(s)} \quad (\text{відповідної } G_\omega), \quad \text{де } G_\omega^{(1)} = \left\{ (\varphi_i, \psi_j, \chi_k) : \varphi_i = \varphi_* + \Delta\varphi i, \quad i = \overline{0, m}; \right.$$

$$\Delta\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{m}; \quad \psi_j = Q' + \Delta\psi^{(1)}(j - n_0), \quad j = \overline{n_0, n_1}, \quad \Delta\psi^{(1)} = \frac{Q'' - Q'}{n_1 - n_0}; \quad \chi_j = \Delta\chi k,$$

$$\left. k = \overline{0, l}, \quad \Delta\chi = \frac{Q^0}{l}, \quad \gamma_\psi^{(1)} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi^{(1)}}, \quad \gamma_\chi = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\chi} \right\}, \quad G_\omega^{(2)} = \left\{ (\varphi_i, \psi_j, \chi_k) : \varphi_i = \varphi^* + \right.$$

$$+\Delta\varphi(i-m), \quad \Delta\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{m}; \quad \psi_j = Q_0 + \Delta\psi^{(2)}(j-n_1), \quad j = \overline{n_1, n}, \quad \Delta\psi^{(2)} = \frac{Q_0 - Q''}{n-n_1};$$

$$\chi_j = \Delta\chi k, \quad k = \overline{0, l}, \quad \Delta\chi = \frac{Q^0}{l}, \quad \gamma_\psi^{(2)} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi^{(2)}}, \quad \gamma_\chi = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\chi}; \quad G_\omega^{(3)} = \left\{ (\varphi_i, \psi_j, \chi_k) \right\};$$

$$\varphi_i = \varphi_* + \Delta\varphi i, \quad i = \overline{-m_*, 0}; \quad \Delta\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{m}; \quad \psi_j = \Delta\psi^{(3)} j, \quad j = \overline{0, n_1}, \quad \Delta\psi^{(3)} = \frac{Q''}{n_1};$$

$$\chi_j = \Delta\chi k, \quad k = \overline{0, l}, \quad \Delta\chi = \frac{Q^0}{l}, \quad \gamma_\psi^{(3)} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi^{(3)}}, \quad \gamma_\chi = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\chi}; \quad \varepsilon - \text{параметр точності};$$

$$x_{i,j,k}^{(s)} = x^{(s)}(\varphi_i, \psi_j, \chi_k), \quad y_{i,j,k}^{(s)} = y^{(s)}(\varphi_i, \psi_j, \chi_k), \quad z_{i,j,k}^{(s)} = z^{(s)}(\varphi_i, \psi_j, \chi_k) \quad (s = 1, 2, 3).$$

2. Початкові наближення координат граничних вузлів задаємо так, щоб виконувались рівності:  $f_1(x_{0,j,k}^{(1)}(0), y_{0,j,k}^{(1)}(0), z_{0,j,k}^{(1)}(0)) = 0, \quad j = \overline{n_0, n_1}, \quad k = \overline{0, l},$   
 $f_1(x_{0,j,k}^{(2)}(0), y_{0,j,k}^{(2)}(0), z_{0,j,k}^{(2)}(0)) = 0, \quad j = \overline{0, n_1}, \quad k = \overline{0, l};$   
 $f_2(x_{m,j,k}^{(1)}(0), y_{m,j,k}^{(1)}(0), z_{m,j,k}^{(1)}(0)) = 0, \quad j = \overline{n_0, n_1}, \quad k = \overline{0, l}$   
 $f_2(x_{m,j,k}^{(2)}(0), y_{m,j,k}^{(2)}(0), z_{m,j,k}^{(2)}(0)) = 0 \quad j = \overline{n_1, n}, \quad k = \overline{0, l};$   
 $f_3(x_{i,j,0}^{(1)}(0), y_{i,j,0}^{(1)}(0), z_{i,j,0}^{(1)}(0)) = 0, \quad i = \overline{0, m}, \quad j = \overline{n_0, n_1},$   
 $f_3(x_{i,j,0}^{(2)}(0), y_{i,j,0}^{(2)}(0), z_{i,j,0}^{(2)}(0)) = 0, \quad i = \overline{-m_*, m}, \quad j = \overline{n_1, n},$   
 $f_3(x_{i,j,0}^{(3)}(0), y_{i,j,0}^{(3)}(0), z_{i,j,0}^{(3)}(0)) = 0, \quad i = \overline{-m_*, 0}, \quad j = \overline{0, n_1};$   
 $f_4(x_{i,j,l}^{(1)}(0), y_{i,j,l}^{(1)}(0), z_{i,j,l}^{(1)}(0)) = 0, \quad i = \overline{0, m}, \quad j = \overline{n_0, n_1},$   
 $f_4(x_{i,j,l}^{(2)}(0), y_{i,j,l}^{(2)}(0), z_{i,j,l}^{(2)}(0)) = 0, \quad i = \overline{-m_*, m}, \quad j = \overline{n_1, n},$   
 $f_4(x_{i,j,l}^{(3)}(0), y_{i,j,l}^{(3)}(0), z_{i,j,l}^{(3)}(0)) = 0, \quad i = \overline{-m_*, 0}, \quad j = \overline{0, n_1};$   
 $f_5(x_{i,n_0,k}^{(1)}(0), y_{i,n_0,k}^{(1)}(0), z_{i,n_0,k}^{(1)}(0)) = 0, \quad i = \overline{0, m}, \quad k = \overline{0, l};$   
 $f_6(x_{i,0,k}^{(3)}(0), y_{i,0,k}^{(3)}(0), z_{i,0,k}^{(3)}(0)) = 0, \quad i = \overline{-m_*, 0}, \quad k = \overline{0, l},$   
 $f_6(x_{i,n,k}^{(2)}(0), y_{i,n,k}^{(2)}(0), z_{i,n,k}^{(2)}(0)) = 0, \quad i = \overline{-m_*, m}, \quad k = \overline{0, l}.$

3. Нехай  $(x_{i,j,k}^{(s)}(0), y_{i,j,k}^{(s)}(0), z_{i,j,k}^{(s)}(0))$  – початкові наближення координат внутрішніх вузлів

у кожній з трьох виділених підобластей  $G_\omega^{(s)}$ :  $i = \overline{1, m-1}, \quad j = \overline{n_0+1, n_1-1},$   
 $k = \overline{1, l-1}$  для  $s = 1$ ;  $i = \overline{-m_*, m-1}, \quad j = \overline{n_1+1, n-1}, \quad k = \overline{1, l-1}$  для  $s = 2$ ;  
 $i = \overline{-m_*, -1}, \quad j = \overline{1, n_1-1}, \quad k = \overline{1, l-1}$  для  $s = 3$ . 4. Аналогічно до [1 - 4] визначаємо

наближення параметрів конформності  $\gamma_\psi^{(s)}(p) = \gamma(x_{i,j,k}^{(s)}(p), y_{i,j,k}^{(s)}(p), z_{i,j,k}^{(s)}(p)) = \gamma_\psi^{(1)}$  та  $\gamma_\chi^{(s)}(p) = \gamma(x_{i,j,k}^{(s)}(p), y_{i,j,k}^{(s)}(p), z_{i,j,k}^{(s)}(p)) = \gamma_\chi^{(s)}$  (тут і далі  $p = 1, \dots$  - крок ітерації) як усереднені відношення діагоналей відповідних «малих паралелепіпедів»:

$$\gamma_\psi^{(1)} = \frac{1}{(n_1 - n_0)m} \sum_{i=1}^m \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k=1}^l \gamma_{\psi_{i,j,k}}^{(1)}, \quad \gamma_\chi^{(1)} = \frac{1}{(n_1 - n_0)l} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^m \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k=1}^l \gamma_{\chi_{i,j,k}}^{(1)}, \quad \gamma_\psi^{(2)} = \frac{1}{(n - n_1)(m + m_*)} \sum_{i=-m_*+1}^m \sum_{j=n_1+1}^n \sum_{k=1}^l \gamma_{\psi_{i,j,k}}^{(2)}, \quad \gamma_\chi^{(2)} = \frac{1}{(n - n_1)l} \times$$

$$\times \sum_{i=-m^*+1}^m \sum_{j=n_1+1}^n \sum_{k=1}^l \gamma_{\chi_{i,j,k}}^{(2)}, \quad \gamma_{\psi}^{(3)} = \frac{1}{n_1 m^*} \sum_{i=-m^*+1}^0 \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=1}^l \gamma_{\psi_{i,j,k}}^{(3)}, \quad \gamma_{\chi}^{(3)} = \frac{1}{n_1 l} \sum_{i=-m^*+1}^0 \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=1}^l \gamma_{\chi_{i,j,k}}^{(3)},$$

де  $\gamma_{\psi_{i,j,k}}^{(s)} = a^{(s)}/b^{(s)}$ ,  $\gamma_{\chi_{i,j,k}}^{(s)} = a^{(s)}/c^{(s)}$ ,  $a^{(s)} = \left( \left( x_{i,j-1,k-1}^{(s)} - x_{i-1,j-1,k-1}^{(s)} \right)^2 + \left( y_{i,j-1,k-1}^{(s)} - y_{i-1,j-1,k-1}^{(s)} \right)^2 + \left( z_{i,j-1,k-1}^{(s)} - z_{i-1,j-1,k-1}^{(s)} \right)^2 \right)^{1/2} + \left( \left( x_{i,j-1,k}^{(s)} - x_{i-1,j-1,k}^{(s)} \right)^2 + \left( y_{i,j-1,k}^{(s)} - y_{i-1,j-1,k}^{(s)} \right)^2 + \left( z_{i,j-1,k}^{(s)} - z_{i-1,j-1,k}^{(s)} \right)^2 \right)^{1/2} + \left( \left( x_{i,j,k-1}^{(s)} - x_{i-1,j,k-1}^{(s)} \right)^2 + \left( y_{i,j,k-1}^{(s)} - y_{i-1,j,k-1}^{(s)} \right)^2 + \left( z_{i,j,k-1}^{(s)} - z_{i-1,j,k-1}^{(s)} \right)^2 \right)^{1/2} + \left( \left( x_{i,j,k}^{(s)} - x_{i-1,j,k}^{(s)} \right)^2 + \left( y_{i,j,k}^{(s)} - y_{i-1,j,k}^{(s)} \right)^2 + \left( z_{i,j,k}^{(s)} - z_{i-1,j,k}^{(s)} \right)^2 \right)^{1/2}$ ,  $b^{(s)} = \left( \left( x_{i,j-1,k-1}^{(s)} - x_{i,j,k-1}^{(s)} \right)^2 + \left( y_{i,j-1,k-1}^{(s)} - y_{i,j,k-1}^{(s)} \right)^2 + \left( z_{i,j-1,k-1}^{(s)} - z_{i,j,k-1}^{(s)} \right)^2 \right)^{1/2} + \left( \left( x_{i,j-1,k}^{(s)} - x_{i,j,k}^{(s)} \right)^2 + \left( y_{i,j-1,k}^{(s)} - y_{i,j,k}^{(s)} \right)^2 + \left( z_{i,j-1,k}^{(s)} - z_{i,j,k}^{(s)} \right)^2 \right)^{1/2} + \left( \left( x_{i-1,j-1,k-1}^{(s)} - x_{i-1,j,k-1}^{(s)} \right)^2 + \left( y_{i-1,j-1,k-1}^{(s)} - y_{i-1,j,k-1}^{(s)} \right)^2 + \left( z_{i-1,j-1,k-1}^{(s)} - z_{i-1,j,k-1}^{(s)} \right)^2 \right)^{1/2} + \left( \left( x_{i-1,j-1,k}^{(s)} - x_{i-1,j,k}^{(s)} \right)^2 + \left( y_{i-1,j-1,k}^{(s)} - y_{i-1,j,k}^{(s)} \right)^2 + \left( z_{i-1,j-1,k}^{(s)} - z_{i-1,j,k}^{(s)} \right)^2 \right)^{1/2} + \left( \left( x_{i-1,j,k-1}^{(s)} - x_{i,j,k-1}^{(s)} \right)^2 + \left( y_{i-1,j,k-1}^{(s)} - y_{i,j,k-1}^{(s)} \right)^2 + \left( z_{i-1,j,k-1}^{(s)} - z_{i,j,k-1}^{(s)} \right)^2 \right)^{1/2} + \left( \left( x_{i-1,j,k}^{(s)} - x_{i,j,k}^{(s)} \right)^2 + \left( y_{i-1,j,k}^{(s)} - y_{i,j,k}^{(s)} \right)^2 + \left( z_{i-1,j,k}^{(s)} - z_{i,j,k}^{(s)} \right)^2 \right)^{1/2}$ .

5. Проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів  $(x_{i,j,k}^{(s)}(p), y_{i,j,k}^{(s)}(p), z_{i,j,k}^{(s)}(p))$  ( $s = \overline{1,3}$ ) шляхом обчислення їх, як середньо зважених координат навколишніх вузлів в кожній з трьох розглядуваних підобластей:

$$x_{i,j,k}^{(s)}(p+1) = \left( \left( x_{i+1,j,k}^{(s)}(p) + x_{i-1,j,k}^{(s)}(p) \right) + \gamma_{\psi}^2 \left( x_{i,j+1,k}^{(s)}(p) + x_{i,j-1,k}^{(s)}(p) \right) + \gamma_{\chi}^2 \left( x_{i,j,k+1}^{(s)}(p) + x_{i,j,k-1}^{(s)}(p) \right) \right) / \left( 2(1 + \gamma_{\psi}^2 + \gamma_{\chi}^2) \right),$$

$$y_{i,j,k}^{(s)}(p+1) = \left( \left( y_{i+1,j,k}^{(s)}(p) + y_{i-1,j,k}^{(s)}(p) \right) + \gamma_{\psi}^2 \left( y_{i,j+1,k}^{(s)}(p) + y_{i,j-1,k}^{(s)}(p) \right) + \gamma_{\chi}^2 \left( y_{i,j,k+1}^{(s)}(p) + y_{i,j,k-1}^{(s)}(p) \right) \right) / \left( 2 \times \left( 1 + \gamma_{\psi}^2 + \gamma_{\chi}^2 \right) \right),$$

$$z_{i,j,k}^{(s)}(p+1) = \left( \left( z_{i+1,j,k}^{(s)}(p) + z_{i-1,j,k}^{(s)}(p) \right) + \gamma_{\psi}^2 \left( z_{i,j+1,k}^{(s)}(p) + z_{i,j-1,k}^{(s)}(p) \right) + \gamma_{\chi}^2 \left( z_{i,j,k+1}^{(s)}(p) + z_{i,j,k-1}^{(s)}(p) \right) \right) / \left( 2(1 + \gamma_{\psi}^2 + \gamma_{\chi}^2) \right).$$

6. Уточнення координат граничних вузлів проводимо, виходячи з умов колінеарності «векторів-градієнтів» стосовно відповідних бічних поверхонь і «векторів-нормалей» утворених граничними та відповідними приграничними вузлами в кожній з трьох виділених областей:  $f'_{1x}(x_{0,j,k}^{(1-2)}, y_{0,j,k}^{(1-2)}, z_{0,j,k}^{(1-2)}) / (x_{1,j,k}^{(1-2)} - x_{0,j,k}^{(1-2)}) =$

$$\begin{aligned}
 &= f'_{1y}(x_{0,j,k}^{(1-2)}, y_{0,j,k}^{(1-2)}, z_{0,j,k}^{(1-2)}) / (y_{1,j,k}^{(1-2)} - y_{0,j,k}^{(1-2)}) = f'_{1z}(x_{0,j,k}^{(1-2)}, y_{0,j,k}^{(1-2)}, z_{0,j,k}^{(1-2)}) / (z_{1,j,k}^{(1-2)} - z_{0,j,k}^{(1-2)}), \\
 &f'_{2x}(x_{n,j,k}^{(1-2)}, y_{n,j,k}^{(1-2)}, z_{n,j,k}^{(1-2)}) / (x_{n-1,j,k}^{(1-2)} - x_{n,j,k}^{(1-2)}) = f'_{2y}(x_{n,j,k}^{(1-2)}, y_{n,j,k}^{(1-2)}, z_{n,j,k}^{(1-2)}) / (y_{n-1,j,k}^{(1-2)} - y_{n,j,k}^{(1-2)}) = \\
 &= f'_{2z}(x_{n,j,k}^{(1-2)}, y_{n,j,k}^{(1-2)}, z_{n,j,k}^{(1-2)}) / (z_{n-1,j,k}^{(1-2)} - z_{n,j,k}^{(1-2)}), f'_{3x}(x_{i,m,k}^{(1-3)}, y_{i,m,k}^{(1-3)}, z_{i,m,k}^{(1-3)}) / (x_{i,m-1,k}^{(1-3)} - x_{i,m,k}^{(1-3)}) = \\
 &= f'_{3y}(x_{i,m,k}^{(1-3)}, y_{i,m,k}^{(1-3)}, z_{i,m,k}^{(1-3)}) / (y_{i,m-1,k}^{(1-3)} - y_{i,m,k}^{(1-3)}) = f'_{3z}(x_{i,m,k}^{(1-3)}, y_{i,m,k}^{(1-3)}, z_{i,m,k}^{(1-3)}) / (z_{i,m-1,k}^{(1-3)} - z_{i,m,k}^{(1-3)}), \\
 &f'_{4x}(x_{i,0,k}^{(1-3)}, y_{i,0,k}^{(1-3)}, z_{i,0,k}^{(1-3)}) / (x_{i,1,k}^{(1-3)} - x_{i,0,k}^{(1-3)}) = f'_{4y}(x_{i,0,k}^{(1-3)}, y_{i,0,k}^{(1-3)}, z_{i,0,k}^{(1-3)}) / (y_{i,1,k}^{(1-3)} - y_{i,0,k}^{(1-3)}) = \\
 &= f'_{4z}(x_{i,0,k}^{(1-3)}, y_{i,0,k}^{(1-3)}, z_{i,0,k}^{(1-3)}) / (z_{i,1,k}^{(1-3)} - z_{i,0,k}^{(1-3)}), f'_{5x}(x_{i,j,0}^{(1)}, y_{i,j,0}^{(1)}, z_{i,j,0}^{(1)}) / (x_{i,j,1}^{(1)} - x_{i,j,0}^{(1)}) = \\
 &= f'_{5y}(x_{i,j,0}^{(1)}, y_{i,j,0}^{(1)}, z_{i,j,0}^{(1)}) / (y_{i,j,1}^{(1)} - y_{i,j,0}^{(1)}) = f'_{5z}(x_{i,j,0}^{(1)}, y_{i,j,0}^{(1)}, z_{i,j,0}^{(1)}) / (z_{i,j,1}^{(1)} - z_{i,j,0}^{(1)}), \\
 &f'_{6x}(x_{i,j,l}^{(2-3)}, y_{i,j,l}^{(2-3)}, z_{i,j,l}^{(2-3)}) / (x_{i,j,l-1}^{(2-3)} - x_{i,j,l}^{(2-3)}) = f'_{6y}(x_{i,j,l}^{(2-3)}, y_{i,j,l}^{(2-3)}, z_{i,j,l}^{(2-3)}) / (y_{i,j,l-1}^{(2-3)} - y_{i,j,l}^{(2-3)}) = \\
 &= f'_{6z}(x_{i,j,l}^{(2-3)}, y_{i,j,l}^{(2-3)}, z_{i,j,l}^{(2-3)}) / (z_{i,j,l-1}^{(2-3)} - z_{i,j,l}^{(2-3)}).
 \end{aligned}$$

7. Обчислюємо нові наближення  $\gamma_\psi^{(s)}(p+1)$ ,  $\gamma_z^{(s)}(p+1)$ ,  $Q'(p+1)$ ,  $Q''(p+1)$ . 8. Умови зупинки процесу аналогічні до [1- 4]. Наведемо для прикладу умову стабілізації координат граничних вузлів:

$$\max_{x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k} \in \partial G_z} (|x_{i,j,k}(p+1) - x_{i,j,k}(p)|, |y_{i,j,k}(p+1) - y_{i,j,k}(p)|, |z_{i,j,k}(p+1) - z_{i,j,k}(p)|) < \varepsilon.$$

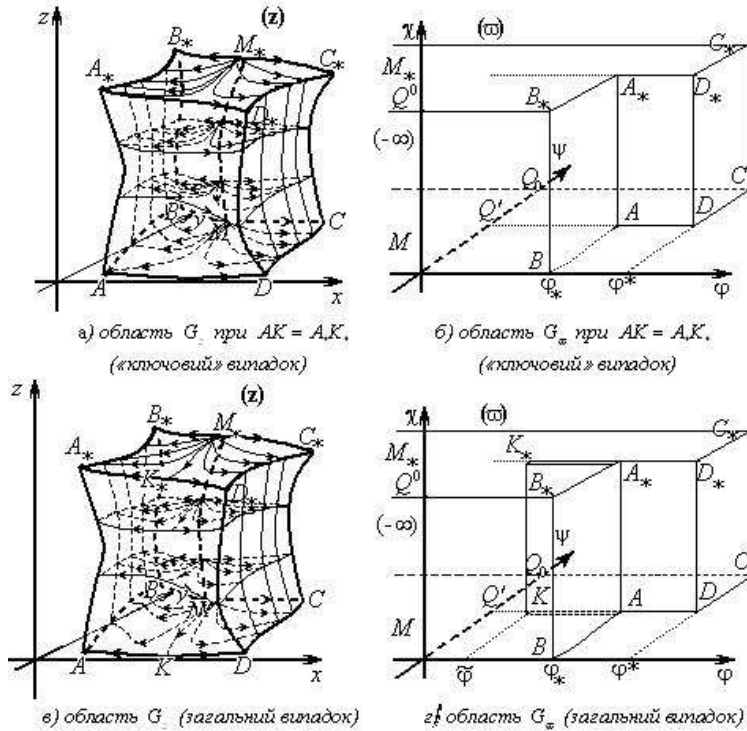


Рис. 2. Ситуаційні стани формування течії за умов відсутності перетоку

При цьому підкреслимо, що перехід від «нескінченної» до відповідної дискретної особливості здійснюється з допомогою «заміни» нескінченної області  $G_\omega$  деякою підобластю, що «відтинається» від  $G_\omega$  площиною  $\varphi = -m_* \Delta\varphi$  (при цьому значення параметра  $m_* < \infty$  підбираються таким чином,

щоб потенціал  $\varphi_*^* = -m_* \Delta \varphi$  на апроксимуючій особливій лінії  $MM_*$  поверхні забезпечував задану інтенсивність джерела).

Уточнення параметрів  $m, m_*, n, n_0, n_1, l$  здійснюємо, в першу чергу, за умови  $\square \psi^{(1)} = \square \psi^{(2)} = \square \psi^{(3)} = \square \psi$  (точність відображення покращиться, якщо вимагати, щоб виконувала ще й рівність  $\square \varphi = \square \psi$ ).

### 5. Висновки.

На основі системного опису всіх можливих випадків формування ідеальної течії в обмеженому поверхнями течії та еквіпотенціальними поверхнями криволінійному паралелепіпеді в залежності від інтенсивності (як параметра керування) додаткового лінійного джерела (розміщеного на одній із граничних поверхонь течії) розв'язана проблема неоднозначності нелінійного обернення відповідних крайових задач на просторові конформні відображення з використанням розробленої процедури автоматизованого вибору відповідного випадку.

При цьому (аналогічно до відповідних «плоских випадків» [2]) виявлено, що розв'язання задач в кожному із окремих випадків формування течії, названих нами «ключовими», є рівносильним розв'язанню вихідної задачі як задачі на керування за умов оптимізації відповідних функціоналів.

Представлені фрагменти алгоритмів розв'язання такого роду задач, що дає можливість будувати динамічну сітку, знаходити лінії розділу течії та обчислювати різного роду відповідні перетоки (втоки, витоки).

### ЛІТЕРАТУРА

1. Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопецький. – Київ : Наукова думка, 2007. – 292 с.
2. Бомба А.Я., Каштан С.С. Про розв'язання одного класу нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення / А.Я. Бомба, С.С. Каштан // Волинський математичний вісник.-1999.- Вип.6. – С. 25-36.
3. Бомба А. Я., Теребус А. В. Просторові гармонічні многочлени та аналоги задач на конформні відображення / А. Я. Бомба, А. В. Теребус // Волинський математичний вісник. Серія “прикладна математика”. – 2008. – 5 (14). – С. 39-63.
4. Климяк Ю.Є., Пригорницький Д. О. Числове розв'язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення криволінійних паралелепіпедів на прямокутні / Ю.Є. Климяк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія “прикладна математика”. – 2008. – 5 (14). – С. 104-143.
5. Лаврентьев М.А., Проблемы гидродинамики и их математические модели / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат.- М.: Наука.- 1977.- 407 с.
6. Рауз Х. Механика жидкости / Х.Рауз.- М.: Стройиздат.- 1967.- 390 с.

Надійшла 03.06.2009.

© Бомба А. Я., Теребус А. В., 2009