

УДК 532.527

Метод дискретных вихревых рамок со вставкой промежуточных точек на вихревой пелене

Г. Г. Буланчук, О. Н. Буланчук, С. А. Довгий
*Приазовский государственный технический университет
 Институт гидромеханики НАН Украины*

В работе рассматривается методика, которая позволяет избежать неоправданного удлинения вихревых отрезков в методе дискретных вихревых рамок. Суть методики заключается во вставке и слиянии промежуточных узлов внутри вихревых отрезков, которые затем движутся по траекториям жидких частиц. При этом количество вихревых рамок и циркуляции вихревых отрезков не изменяются. Эта методика позволяет также предотвратить пересечение вихревыми отрезками поверхностей тел обтекания.

Ключевые слова: *невязкая несжимаемая жидкость, трехмерная задача, методе дискретных вихревых рамок, вихревой отрезок.*

У роботі розглянуто методику яка дозволяє уникнути надмірного видовження вихрових відрізків при застосуванні методу дискретних вихрових рамок. Суть методики полягає у вставці та злитті проміжних вузлів всередині вихрових відрізків, які потім рухаються по траєкторіям рідких частинок. При цьому кількість вихрових рамок та циркуляції вихрових відрізків не змінюються. За допомогою цієї методики можна уникнути перетину вихровими відрізками поверхонь тіл обтікання.

Ключові слова: *ідеальна рідина, трьохвимірні задача, метод дискретних вихрових рамок вихровий відрізок.*

In the work it is considered technique which allows to prevent extraordinary elongation of vortex segments in the discrete vortex frame method. The main idea is the insertion and merging intermediate nodes into the vortex segments. Then these nodes move along liquid particles trajectory so as the main nodes. Under this operation the number of the main vortex frames and vortex element circulation is not varied. The insertion intermediate nodes technique give possibility to prevent the vortex segments intersections of body surface.

Keywords: *inviscid incompressible fluid, three-dimensional problem, the method of discrete vortex frameworks, vortex segment of the surface.*

1. Постановка задачи

Рассматривается трехмерная задача обтекания тела потоком невязкой несжимаемой жидкости в нелинейной нестационарной постановке. Скорость набегающего потока обозначим \vec{U} . Решение поставленной задачи ищется в виде суммы потенциала набегающего потока и потенциала возмущенных скоростей Φ , вызванного телом и его следом при заданных начальных условиях. Будем полагать, что потенциал набегающего потока известен. Потенциал возмущенных скоростей Φ должен удовлетворять уравнению Лапласа во всем пространстве D вне тела за исключением поверхности тела σ_S и поверхностей тангенциального разрыва σ_L — вихревых пелен:

$$\Delta\Phi = 0, \quad D \setminus \sigma_L \cup \sigma_S$$

При этом в любой момент времени на поверхности тела должно выполняться условие непротекания:

$$(\nabla\Phi(M), \vec{n}_M) = -(\vec{U}, \vec{n}_M), \quad M \in \sigma_S$$

где \vec{n}_M – нормаль к поверхности тела. Решение задачи удобно искать в виде потенциала слоя диполей (двойного слоя):

$$\Phi(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma_s} g_s(M, \tau) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_M} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) dS_M + \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma_L} g_L(M) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_M} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) dS_M,$$

$$M_0 \in D \setminus \sigma_L$$

где $g_s(M, \tau)$, $g_L(M)$ — плотность двойного слоя на поверхности тела и пелены соответственно. Будем полагать, что обе поверхности являются поверхностями Ляпунова. Поскольку поле скоростей двойного слоя совпадет с полем скоростей вихревого слоя, интенсивность которого однозначно выражается через плотность двойного слоя, то с физической точки зрения моделирование тела двойным слоем эквивалентно замене тела суммарным вихревым слоем, состоящим из присоединенных и свободных вихрей.

Поле скоростей \vec{V} от потенциала двойного слоя удовлетворяет условию убывания на бесконечности:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \vec{V} = \lim_{R \rightarrow \infty} \nabla \Phi = 0$$

и условию непрерывности нормальной составляющей на поверхности:

$$(\nabla \Phi, \vec{n})_+ = (\nabla \Phi, \vec{n})_-$$

Вихревые пелены формируются в результате схода слоя свободных вихрей с острых кромок тела. Будем полагать, что на линии схода вихревой пелены L выполняется гипотеза Чаплыгина-Жуковского о конечности скоростей (что эквивалентно требованию обращения в нуль интенсивности присоединенного вихревого слоя). На вихревой пелене и на линии схода должно выполняться условие непрерывности давления:

$$p(M)_- = p(M)_+, \quad M \in L \cup \sigma_L$$

Условие непрерывности для нормальной составляющей скорости выполняется автоматически, так как свободные вихри движутся вместе с жидкими частицами. Траектория свободных вихрей, а значит и форма вихревой пелены определяются путем решения задачи Коши:

$$\frac{d\vec{r}(\tau)}{d\tau} = \vec{U} + \vec{V}(\vec{r}, \tau) \quad \vec{r} \in L \cup \sigma_L$$

При этом циркуляции свободных вихрей не изменяются с течением времени.

2. Дискретизация задачи

При численном решении производится дискретизация поверхности тела, в результате которой она разбивается на малые площадки (четырёхугольной или треугольной формы), в пределах которых полагают плотность двойного слоя постоянной [1,2]. Поле скоростей такого участка совпадает с полем замкнутой вихревой нити (вихревой рамки), расположенной по границе данного элемента поверхности. При этом циркуляция вихревой рамки равна плотности двойного слоя. Для расчета поля скоростей от отрезков вихревой рамки используется формула Био-Саварра. Вследствие дискретизации по времени вихревая пелена также состоит из множества вихревых рамок, которые сходят по местной

скорости с линии отрыва. На каждом временном шаге рассчитывается скорость в узлах вихревой сетки (моделирующей пелену), которые затем смещаются на расстояние $\vec{v}\Delta\tau$. При этом предполагается, что вихревой отрезок, соединяющий соседние узлы, сохраняет свою форму (т.е. остается отрезком). При таком моделировании характерной является ситуация, когда в процессе движения пелены стороны некоторых вихревых рамок становятся аномально большими. Например, при обтекании потоком перпендикулярно поставленной к нему квадратной пластины максимальная длина продольного вихревого отрезка пелены достигает величины $\Delta l_{\max} \approx 1.1$, что в 11 раз превышает начальную длину вихревого элемента $\Delta l_0 = 0.1$.

Одним из методов борьбы с этим побочным эффектом дискретизации в методе вихревых рамок является удаление чрезмерно длинных отрезков, изменения циркуляции отрезков, удаление точек, повлекших развал пелены [3,4], замена вихревых отрезков вихрями [5]. Следует отметить, что при замене отрезков вихрями проблема чрезмерного растяжения не исчезает: приходится искусственно ограничивать удлинение вихря [5]. Однако такого рода процедуры приводят к нарушению теоремы Томсона. В связи с вышеизложенным представляет интерес вопрос о возможности предотвращения неоправданного удлинения стороны рамки путем помещения внутрь вихревых отрезков дополнительных узловых точек и отслеживания их движения.

2. Вставка промежуточных узлов и результаты численного моделирования

Идея методики заключается в том, что при удлинении вихревого отрезка (имеющего начальную длину Δl_0) до некоторой критической длины Δl_k осуществляется вставка промежуточной точки. В результате такой вставки отрезок разбивается на два отрезка одинаковой длины с циркуляциями, равными циркуляции исходного отрезка (Рис. 1а).

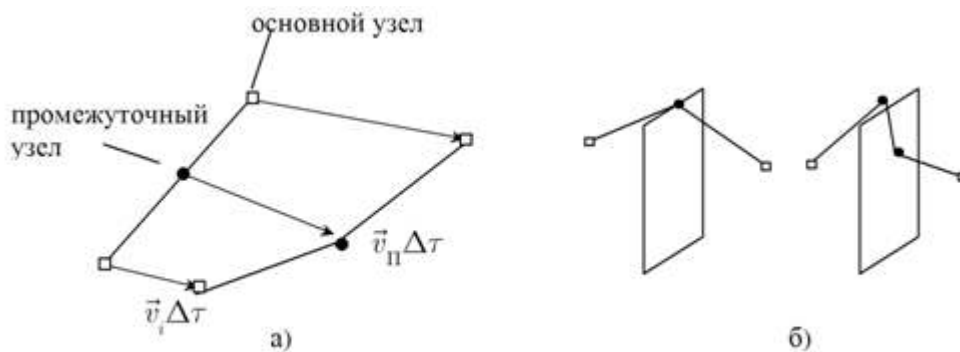


Рис. 1. Вставка промежуточных узлов

Условимся далее называть точки, которые вставляются, промежуточными узлами, а остальные — основными узлами. Длины образовавшихся отрезков приближенно будут равны длине вихревого отрезка присоединенной рамки,

порождающей данную свободную вихревую рамку. Расчет движения образовавшихся вихревых отрезков осуществляется по стандартной методике [1,2]. Если в дальнейшем длина образовавшегося вихревого отрезка опять превысит критическое значение, то он снова разбивается на два отрезка и т.д.

Таким образом, в результате нескольких вставок стороны вихревых рамок становятся ломаными линиями. На каждом шаге осуществляется проверка длин вихревых отрезков и осуществляется вставка промежуточных узлов.

С помощью данной методики удалось также реализовать алгоритм огибания пеленой пластины и тел, поверхность которых можно составить из плоских поверхностей. При пересечении вихревым отрезком плоской поверхности промежуточный узел ставился в точке пересечения вихревого отрезка с ребром пластины или на некотором расстоянии от ребра в плоскости пластины (Рис.1б). В этом случае пелена как бы натягивается на тело или поверхность, что приводит к увеличению времени счета по сравнению с методикой, изложенной в [4].

3. Форма вихревой нити при моделировании обтекания прямоугольной пластины

Были проведены методические исследования, на примере квадратной пластинки, поставленной перпендикулярно набегающему потоку. Как видно из Рис. 2–7, что вставка промежуточных узлов уменьшает длины вихревых отрезков и позволяет лучше моделировать процесс сворачивания пелены. Для удобства сопоставления формы вихревой нити расчет производился при постоянном шаге по времени, равном стороне присоединенной рамки d . Для облегчения понимания динамики пелены вначале анализировался случай вставки дополнительных узлов для продольных вихревых нитей.

На Рис.2-7 показана формы вихревых продольных нитей при наличии промежуточных узлов и расчете по обычной схеме в момент времени $\tau = 2.6$. Графики представлены для случая шага по времени $\Delta\tau = 0.1$, длине стороны присоединенной рамки $d = 0.1$ и радиусе вихревых отрезков $r_0 = \sqrt{7}h$, где $h = 0.49d$. Пунктирной линией и кружечками обозначена вихревая линия (начиная от угла пластинки), вычисленная по классической методике, сплошной линией — со вставкой промежуточных узлов. Вставка промежуточных узлов производилось при $\Delta l_k = 2d$.

Расчеты показали, что максимальное количество узлов, которые были вставлены до указанного выше расчетного момента равно шести. При увеличении счета до $\tau = 4$ это число увеличилось до тридцати, что существенно замедляется скорость счета. Из рисунков также видно, что на позже сошедших участках форма вихревой нити практически осталась неизменной, наибольшие изменения произошли ближе к концу нити. При этом, ломаная вихревая линия становится более гладкой и больше напоминает спираль. Для отслеживания формы вихревой нити была создана поисковая программа, позволяющая путем изменения параметров расчета одновременно наблюдать движение двух нитей с одинаковыми номерами, полученных при различных методиках.

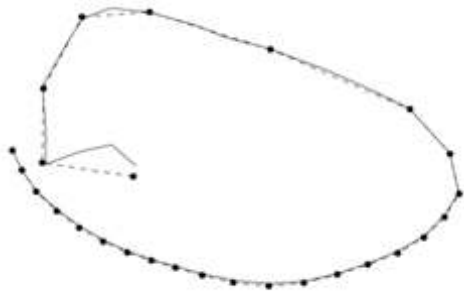


Рис. 2. Форма первой вихревой линии

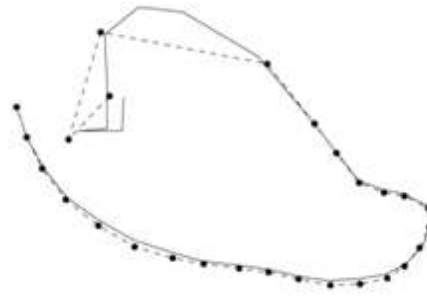


Рис. 3. Форма второй вихревой линии

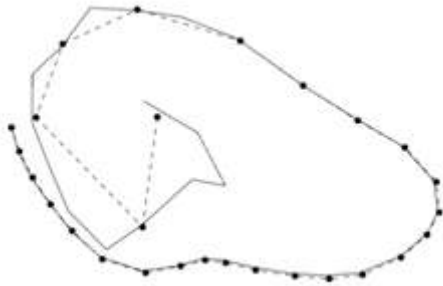


Рис. 4. Форма третьей вихревой линии

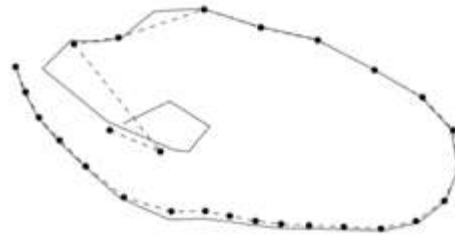


Рис. 5. Форма четвертой вихревой линии

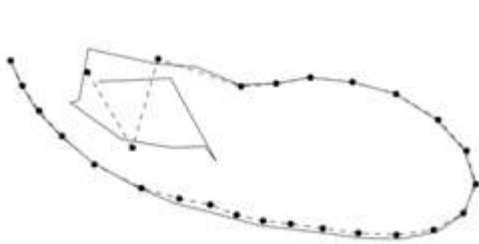


Рис. 6. Форма пятой вихревой линии

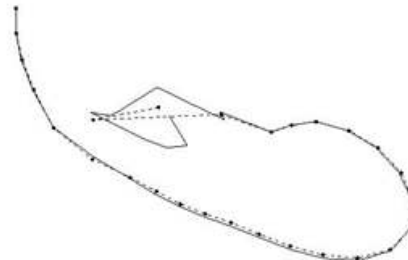


Рис. 7. Форма шестой вихревой линии

Наблюдения показали, что при моделировании по стандартной методике концевой вихревой отрезок пятой вихревой линии до момента времени $\tau = 2.6$ совершает полный оборот вокруг предпоследнего узла, что означает самопересечение пелены. В случае применяемой методики такого самопересечения до данного момента времени не происходит. Вихревая линия более плавно закручивается в спираль. Однако, на Рис.6 и Рис.7 заметно, что на вихревой нити появились резкие изломы. Наблюдения показали, что такое искажение формы пелены является следствием сближения узлов на расстояние меньше d . Поэтому была разработана методика слияния промежуточных узлов, сближившихся на расстояние меньше d .

Слияние узлов осуществлялось, если расстояние между ними меньше некоторого критического значения l_M . При этом, если сливаются

дополнительные узлы кроме первого и последнего, то координаты нового узла вычисляются по формуле среднего арифметического: $\vec{r}^* = 0.5(\vec{r}_i + \vec{r}_{i+1})$. Если расстояние от соответствующего основного узла до первого и последнего дополнительного узла меньше критического минимального l_M , то полагалось, что они сливаются с основными узлами. В этом случае пелена получается более регулярной, количество промежуточных узлов уменьшается (Рис.8).

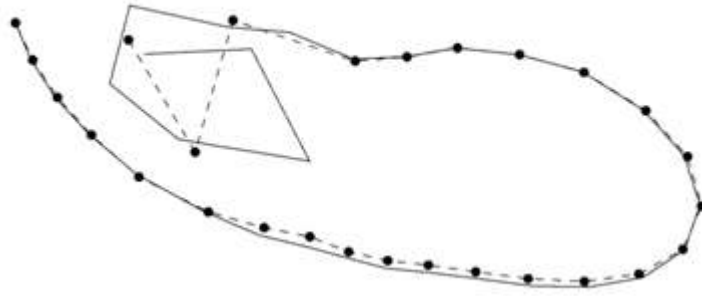


Рис. 8. Форма пятой вихревой линии при слиянии промежуточных узлов.

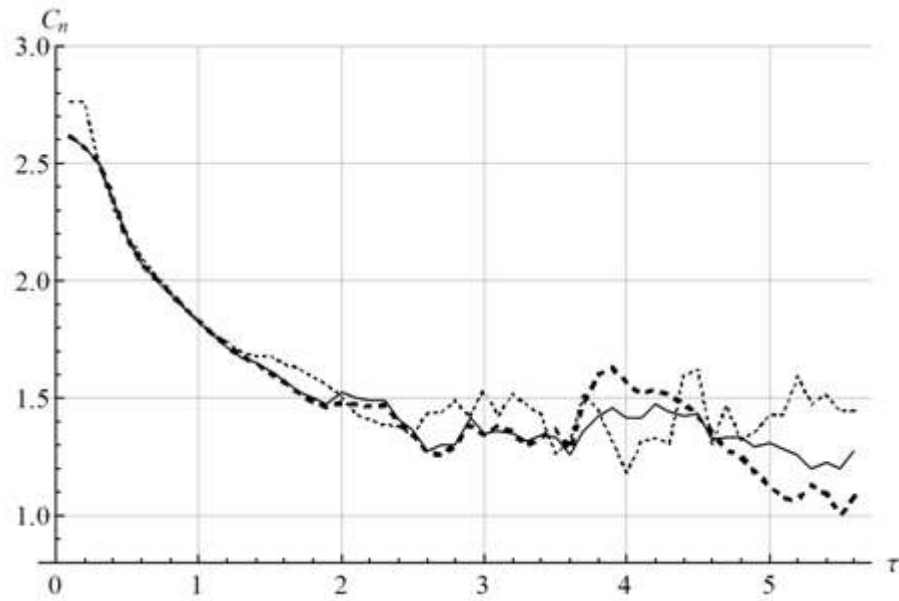


Рис. 9. Зависимость коэффициента нормальной силы от времени

Как показывают расчеты, методика вставки промежуточных узлов и слияния узлов слабо влияет на зависимость коэффициента нормальной силы от времени до момента, когда пелена начинает разрушаться. На Рис.9 сплошной линией показана зависимость коэффициента нормальной силы от времени при применении данной методики, толстой пунктирной линией — по стандартной схеме (никакие дополнительные меры для стабилизации пелены [4] не

предпринимались) для случая $r_0 = \sqrt{7}h$, мелкой пунктирной расчет с применением предлагаемой методики при меньшем радиусе вихря $r_0 = 2h$. Все кривые были получены при $d = 0.1$, $\Delta\tau = 0.1$, $l_K = 0.2$, $l_M = 0.08$. Из рисунка видно, что до момента $\tau \approx 3.5$ две первые кривые практически совпадают. При больших временах пульсации коэффициента нормальной силы для первого случая (сплошная кривая) оказываются меньше и лежат в диапазоне $1.25 \div 1.5$, для стандартной пелены $1.0 \div 1.6$.

Из Рис.9 также видно, что уменьшение радиуса вихря приводит к увеличению пульсаций коэффициента нормальной силы (мелкий пунктир). Таким образом, существенное влияние на пелену, которая моделируется со вставкой промежуточных узлов, оказывает радиус вихревых отрезков (аналогично обычной схеме). Его увеличение приводит к большей гладкости пелены и уменьшению пульсаций коэффициента нормальной силы.

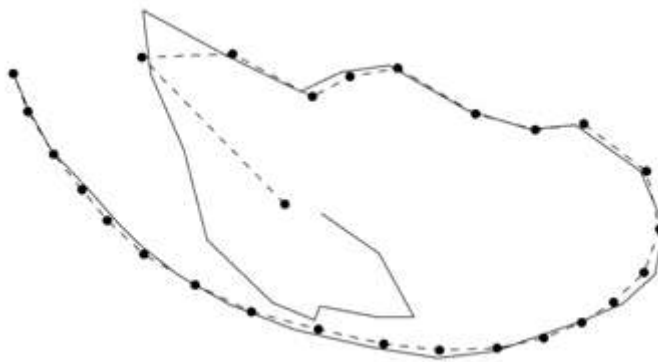


Рис. 10. Форма пятой вихревой линии при уменьшении радиуса вихря

На рис.10 показана форма пятой вихревой нити при уменьшении радиуса вихря до $r_0 = 2h$ для момента $t = 2.6$. Видно, что уменьшение r_0 приводит к тому, что вихревая линия сильно деформируется, принимая зигзагообразный вид (сравните с Рис.8), как по стандартной методике (пунктирная линия) так и по методике со вставкой (сплошная линия). Такого рода эффекты связаны с неустойчивостью вихревой пелены. Аналогичная ситуация имеет место при малых значениях Δl_K , что также приводит к существенному увеличению количества промежуточных узлов и формированию зигзагообразности вихревых линий, которая начинает проявляться при $\Delta l_K \leq \sqrt{1.4}d$ (при $r_0 = 2h$).

Была также рассмотрена ситуация, когда сходящиеся вихревые отрезки изначально разбивались на два или большее число. В этом случае исследовалась возможность сохранения формы пелены при моделировании движения точек, являющихся промежуточными между основными узлами. Фактически рассматривался вопрос о том, действительно ли в процессе движения пелены можно говорить (хотя бы приближенно) о существовании вихревых отрезков, или же они таковыми не являются. На Рис.11 показана форма шестой вихревой

нити в момент времени $\tau = 2.6$ и $r_0 = \sqrt{7}h$. При сходе вихревых отрезков ставились два промежуточных узла, количество которых далее не изменялось.

Из рисунка видно, что нить неправдоподобно деформируется, приобретая зигзагообразную форму. При уменьшении радиуса вихря искажение формы вихревого отрезка наступает еще быстрее.

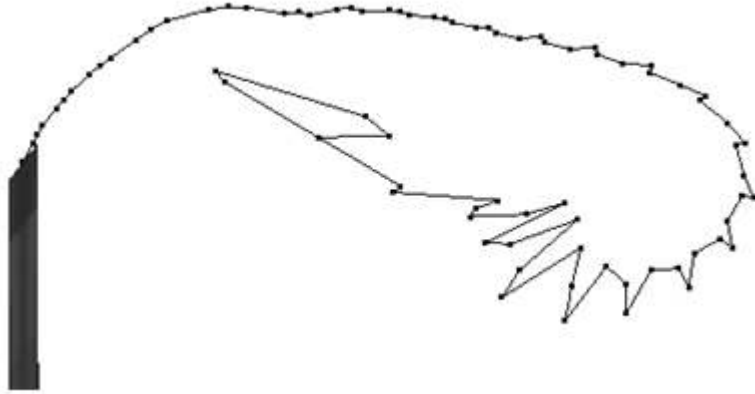


Рис. 11. Искажение пелены при малом радиусе вихря и начальной ставке двух точек.

4. Влияние разбиения поперечных вихревых нитей

Расчеты показывают, что вставка промежуточных узлов в поперечные вихревые нити приводит к сильной дестабилизации вихревой пелены. Вихревые нити скручиваются в жгуты, которые затем сворачиваются в клубки (Рис. 12).

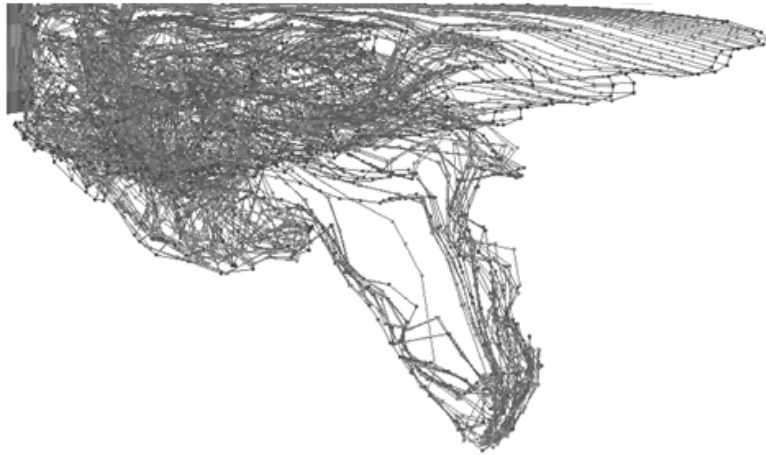


Рис. 12. Вид сбоку пелены, сошедшей с одного ребра пластины в момент времени $\tau = 5.6$ при максимальном допустимом числе промежуточных узлов равном 30.

Происходит быстрое нарастание численных погрешностей при $\tau > 4.5$, пелена теряет симметрию. Вихревые згустки проходят через наружную поверхность и формируются весьма причудливые структуры. Скорость счета резко падает.

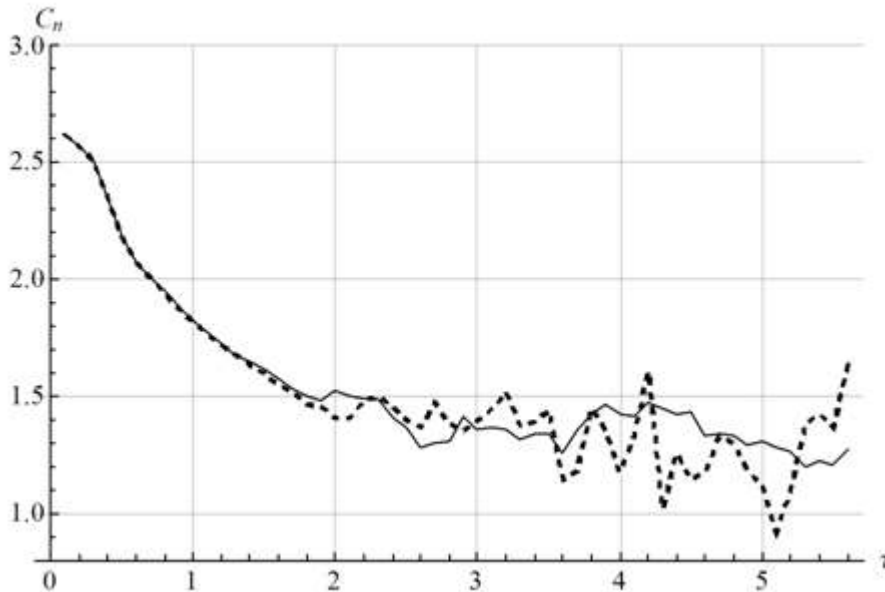


Рис. 13. Зависимость коэффициента нормальной силы от времени

На Рис.13 показана зависимость коэффициента нормальной силы от времени для двух случаев: 1) со вставкой и слиянием промежуточных узлов для продольных вихревых нитей 2) со вставкой и слиянием для продольных нитей и вставкой для поперечных нитей при $\Delta l_K = 2d$ ($d = 0.1$), $l_M = 0.5$. Расчет был выполнен с постоянным шагом по времени $\Delta \tau = 0.1$. Сплошной линией обозначен коэффициент нормальной силы для первого случая, штриховой — для второго случая. Из рисунка видно, что до момента $\tau \approx 2$ кривые практически совпадают. При увеличении времени счета пульсации коэффициента нормальной силы при вставке промежуточных узлов в поперечные нити увеличиваются. Увеличение l_M приводит к уменьшению пульсаций.

5. Выводы

Вставка и слияние промежуточных узлов на продольных вихревых нитях позволяет избавиться от появления больших вихревых отрезков и более правдоподобно моделировать движение хвоста пелены. Большинство вихревых линий дольше сохраняют гладкую форму. Данная методика почти не влияет на зависимость коэффициента нормальной силы от времени до момента разрушения пелены. На этапе разрушения пелены пульсации коэффициента нормальной силы оказываются меньше. Недостатком методики является увеличение времени счета.

Вставка промежуточных узлов на ранних этапах движения пелены без введения большого радиуса вихревых отрезков приводит к неправдоподобному искажению пелены.

При одновременном применении методики для продольных и поперечных вихревых отрезков форма вихревых нитей значительно усложняется, а

пульсации коэффициента нормальной силы увеличиваются (особенно при малом радиусе вихря).

ЛИТЕРАТУРА

1. И.К. Лифанов. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент – М., 1995.– 519 с.
2. С.А. Довгий, И.К. Лифанов. Методы решения интегральных уравнений – К.: Наукова думка, 2002.– 343 с.
3. В.Ю.Кирякин, А.В.Сетуха. О моделировании следов за плохообтекаемыми телами методом дискретных вихрей. //Труды XII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики», -2005.- С. 173– 176.
4. А.И. Гладышев. В.А.Удовенко. Математическая модель взаимодействия вихревых пелен с несущими поверхностями. //Труды XIII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики», -2007.- С. 110– 113.
5. В.Ю.Кирякин. Численное моделирование обтекания системы двух дисков методом дискретных вихрей с моделированием вихревой пелены изолированными вихревыми частицами. //Труды XIII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики», -2007.- С. 170– 173.

Надійшла 30.06.2009.

© Буланчук Г. Г., Буланчук О. Н., Довгий С. А., 2009