УДК 519.6

Интеграл Дюамеля и операционно-структурный метод в математическом моделировании нестационарных температурных процессов для областей неканонической формы

Т. В. Бутенко, А. П. Слесаренко

Ин-т проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины

Предложен аналитический метод для решения нестационарных задач теплопроводности для областей сложной конфигурации с нестационарными граничными условиями и источниками энергии. Метод основан на совместном применении интеграла Дюамеля и операционно-структурного метода.

Ключевые слова: *задача теплопроводности, область сложной формы, нестационарные граничные условия и источники энергии, интеграл Дюгамеля, метод Бубнова-Галёркина*

Запропоновано аналітичний метод для вирішення нестаціонарних задач теплопровідності для областей складної конфігурації з нестаціонарними крайовими умовами та джерелами енергії. Метод базується на одночасному використанні інтеграла Дюамеля та операційно-структурного метода.

Ключові слова: *задача теплопровідності, область складної форми, нестаціонарні граничні умови і джерела енергії, інтеграл Дюгамеля, метод Бубнова-Гальоркіна*

An analytical method is suggested of solution of the unsteady-state heat conduction problems for the complex-configuration regions with unsteady-state boundary conditions and energy sources. The method is based on the simultaneous use of the Duhamel integrals and operational-structural method. The calculation results are presented for one variant.

Keywords: *heat conduction problem, a complex domain, time-dependent boundary conditions and sources of energy, the integral Duhamel, the method of Bubnov-Galerkin*

При решении нестационарных задач теплопроводности для неклассических областей операционно-структурным методом [1] совместно применяется преобразование Лапласа и структурный метод. Последний позволяет при использовании методов Ритца или Бубнова-Галеркина для решения задачи в области изображений преодолеть трудности построения системы координатных функций, связанные со сложностью геометрической формы конструктивного элемента и характера краевых условий на его поверхности. Однако при сложной зависимости от времени температуры внешней среды, теплового потока и интенсивности внутренних источников энергии возникают существенные трудности, связанные с применением преобразования Лапласа. В данной статье решение задачи теплопроводности со сложными нестационарными граничными условиями и источниками энергии выводится с использованием операционно-структурного метода в виде интегралов Дюамеля [2]. Это позволяет, получая решение исходной задачи в аналитическом виде, сохранить в нем параметры, характеризующие нестационарность температуры внешней среды, теплового потока и интенсивности внутренних источников энергии.

Рассмотрим задачу распределения температурного поля $u(M,t)$ в области Ω при изменении времени в интервале $0<t<\infty$:

$$\rho\frac{\partial u(M,t)}{\partial t}=\mathrm{A}u(M,t)+\sum_{m_1=1}^{r}F_{m_1}(M)Q_{m_1}(t);\quad u(M,t)\big|_{t=0}=0, \tag{1}$$

$$L_j u(M,t)\Big|_{\Gamma_j} = \sum_{m_2=1}^{l_j} f_{jm_2}(M) q_{jm_2}(t),\ j=1,\dots,s, \tag{2}$$

где $\mathrm{A}u(M,t)=\lambda[\Delta(M,t)-\varsigma(M)u(M,t)]$; L_j – линейный дифференциальный оператор 1-го порядка, не зависящий от t; $\bigcup_{j=1}^{s}\Gamma_j=\partial\Omega.$ Применим к уравнению и граничным условиям (1), (2) интегральное преобразование Лапласа по переменной t:

$$\overline{u}(M,p)\neq u(M,t);\quad \overline{Q}_{m_1}(p)\neq Q_{m_1}(t);\quad \overline{q}_{jm_2}(p)\neq q_{jm_2}(t).$$

Тогда в области изображений получим

$$\mathrm{A}\overline{u}(M,p)-p\rho\overline{u}(M,p)+\sum_{m_1=1}^{r}F_{m_1}(M)\overline{Q}_{m_1}(p)=0 \tag{3}$$

$$L_j\overline{u}(M,p)\Big|_{\Gamma_j}=\sum_{m_2=1}^{l_j}f_{jm_2}(M)\overline{q}_{jm_2}(p),\quad j=1,\dots,s. \tag{4}$$

Решение задачи (3), (4), согласно [1], будем искать в виде

$$\overline{u}^{(n)}(M,p)=\sum_{j=1}^{s}\sum_{m_1=1}^{l_j}\Phi_{jm_2}(M)q_{jm_2}(p)+\sum_{i=1}^{n}\overline{C}_i(p)\chi_i(M), \tag{5}$$

где $\chi_i(M)$ - координатные функции, удовлетворяющие однородным граничным условиям задачи (3), (4), а $\Phi_{jm_2}(M)$ удовлетворяет условиям

$$L_j\Phi_{jm_2}(M)\Big|_{\Gamma_k}=\begin{cases} f_{jm_2}(M), & k=j,\\ 0, & k\neq j.\end{cases}$$

Система Бубнова-Галеркина для определения коэффициентов-изображений $\overline{C}_i(p)$ имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{A}_{ik}+pB_{ik}\right)\overline{C}_i(p)=E_k(p), \tag{6}$$

где

$$\mathrm{A}_{ik}=\lambda\int_{\Omega}(\Delta\chi_i-\varsigma\chi_i)\chi_k d\Omega;\qquad B_{ik}=-\int_{\Omega}\rho\chi_i\chi_k d\Omega;$$

$$E_k(p)=\sum_{m_1=1}^{r}\overline{Q}_{m_1}(p)\alpha_{km_1}+\sum_{i=1}^{s}\sum_{m_2=1}^{l_j}q_{jm_2}(p)\beta_{kjm_2};$$

$$\alpha_{km_1}=-\int_{\Omega}F_{m_1}\chi_k d\Omega;\qquad \beta_{kjm_2}=\int_{\Omega}[-\mathrm{A}\Phi_{jm_2}+p\rho\Phi_{jm_2}]\chi_k d\Omega.$$

Для решения системы (6) получим

$$\overline{C}_i(p)=\left[\sum_{k=1}^{n}E_k(p)\Delta_{ik}(p)\right]\left[\Delta(p)\right]^{-1}, \tag{7}$$

где $\Delta(p)$ - определитель матрицы системы (6), а $\Delta_{ik}(p)$ - соответствующие алгебраические дополнения. Представим (7) в виде

$$\overline{C}_i(p)=\left[\sum_{k=1}^{n}(\sum_{m_1=1}^{r}Q_{m_1}(p)\dot{\alpha}_{km_1}+\sum_{j=1}^{s}\sum_{m_2=1}^{l_j}q_{jm_2}(p)\beta_{kjm_2})\Delta_{ik}(p)\right]\left[\Delta(p)\right]^{-1}=$$

$$=\sum_{m_1=1}^{r}p\overline{Q}_{m_1}(p)\sum_{k=1}^{n}\alpha_{km_1}\frac{\Delta_{ik}(p)}{p\Delta(p)}+\sum_{j=1}^{s}\sum_{m_2=1}^{l_j}pq_{jm_2}(p)\sum_{k=1}^{n}\beta_{kjm_2}\frac{\Delta_{ik}(p)}{p\Delta(p)}=$$

$$=\sum_{m_1=1}^{r}p\overline{Q}_{m_1}(p)\overline{C}^{I}_{im_1}(p)+\sum_{j=1}^{s}\sum_{m_2=1}^{l_j}pq_{jm_2}(p)\overline{C}^{II}_{ijm_2}(p).$$

Используя теоремы о дифференцировании и свертке оригиналов, получим

$$C_i(t)=\sum_{m_1=1}^{r}\int_0^t Q_{m_1}(\tau)\frac{d}{dt}C^{I}_{im_1}(t-\tau)d\tau+$$

$$+\sum_{j=1}^{s}\sum_{m_2=1}^{l_j}\int_0^t q_{jm_2}(\tau)\frac{d}{dt}C^{II}_{ijm_2}(t-\tau)d\tau,$$

где

$$\overline{C}_i(p)\neq C_i(t);\qquad \overline{C}^{I}_{im_1}(p)\neq C^{I}_{im_1}(t);\qquad \overline{C}^{II}_{ijm_2}(p)\neq C^{II}_{ijm_2}(t).$$

Решение исходной задачи (1), (2) находим из (5):

$$\begin{aligned}u^{(n)}(M,t)&=\sum_{m_1=1}^{r}\int_0^t Q_{m_1}(\tau)\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}C^{I}_{im_1}(t-\tau)\chi_i(M)d\tau+\\&+\sum_{j=1}^{s}\sum_{m_2=1}^{l_j}\left[\int_0^t q_{jm_2}(\tau)\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}C^{II}_{ijm_2}(t-\tau)\chi_i(M)d\tau+\Phi_{jm_2}(M)q_{jm_2}(t)\right]=\\&=\sum_{m_1=1}^{r}\int_0^t Q_{m_1}(\tau)\frac{\partial}{\partial t}W^{(n)}_{m_1}(M,t-\tau)d\tau+\\&+\sum_{j=1}^{s}\sum_{m_2=1}^{l_j}\left[\int_0^t q_{jm_2}(\tau)\frac{\partial}{\partial t}V^{(n)}_{jm_2}(M,t-\tau)d\tau+q_{jm_2}(0)f_{jm_2}(M)\right],\end{aligned}\tag{8}$$

где

$$W^{(n)}_{m_1}(M,t)=\sum_{i=1}^{n}C^{I}_{im_1}(t)\chi_i(M)\tag{9}$$

- решение задачи

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u(M,t)}{\partial t}=\mathrm{A}u(M,t)+F_{m_1}(M);\quad u(M,t)\big|_{t=0}=0;\\&L_iu(M,t)\big|_{\Gamma_i}=0,\quad i=1,\dots,s,\end{aligned}\tag{10}$$

а

$$V^{(n)}_{jm_2}(M,t)=\sum_{i=1}^{n}C^{II}_{ijm_2}(t)\chi_i(M)+\Phi_{jm_2}(M)\tag{11}$$

- решение задачи

$$\frac{\partial u(M,t)}{\partial t} = \mathrm{A}u(M,t); \quad u(M,t)\Big|_{t=0} = 0;$$
$$L_i u(M,t)\Big|_{\Gamma_i} = \begin{cases} f_{jm_2}(M), & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i = 1,\ldots,s. \tag{12}$$

Таким образом, решение (9), (11) строятся при помощи операционно-структурного метода с единой системой координатных функций $\chi_i(M)$, а решение исходной задачи (1), (2) представляется в виде интегралов Дюамеля через решения (9), (11) задач (10), (12). Представление решения исходной задачи в виде (8) избавляет от необходимости нахождения изображений для функций $Q_{m_1}(t), q_{jm_2}(t)$, делает процедуру обратного преобразования стереотипной и дает возможность производить анализ решения исходной задачи при различных $Q_{m_1}(t), q_{jm_2}(t)$.

По предложенному выше методу решения нестационарных задач теплопроводности для неклассических областей разработаны алгоритмы, которые реализованы в виде программ для персонального компьютера в среде Delphi 7. Тестовая проверка алгоритмов, которая проводилась на задачах с различными нестационарными граничными условиями и нестационарными источниками энергии, показала, что погрешность расчета температурных полей практически определяется сложностью геометрической информации и мало

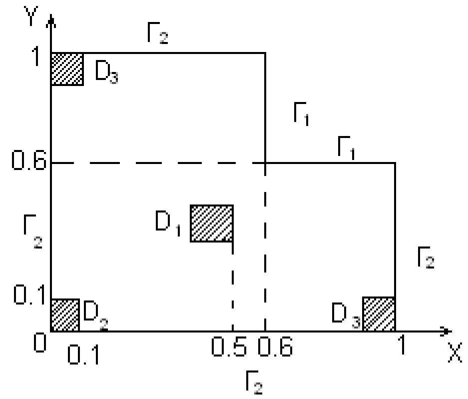

Рис.1.Конструктивная схема элемента с источниками энергии

зависит от вида нестационарных составляющих в граничных условиях и функциях источников энергии $Q_{m_1}(t), q_{jm_2}(t)$.

В качестве примера применения изложенного метода рассмотрим случай, когда определение температурного поля $u(x,y,t)$ в пластине с системой источников энергии (рис. 1) сводится к решению следующей нестационарной задачи теплопроводности:

$$\frac{\partial u(x,y,F_0)}{\partial F_0} = \Delta u(x,y,F_0) - b^2 u(x,y,F_0) + \sum_{m=1}^{3} f_m(x,y)\varphi_m(F_0), \tag{13}$$

$$u(x,y,F_0)\big|_{F_0=0}=0,\quad f_m(x,y)=\begin{cases}\dfrac{P}{0{,}01\lambda d}, & (x,y)\in D_m,\\ 0, & (x,y)\notin D_m,\end{cases} \tag{14}$$
$$u(x,y,F_0)\big|_{\Gamma_1}=0,\qquad \left.\frac{\partial u(x,y,F_0)}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_2}=0,$$

где u -температура; ρ - плотность; λ - коэффициент теплопроводности; c – удельная теплоемкость; $F_0=t\dfrac{\lambda}{\rho\, cL}$ - критерий Фурье; ν - направление внутренней нормали к контуру Γ_2; L - характерный размер пластины; d - толщина пластины; α - сумма полных коэффициентов теплоотдачи с поверхности пластины; $Bi=\dfrac{\alpha L^2}{\lambda d}=b^2$ - критерий Био.

Решение задачи (13), (14), согласно (8), можно представить в виде

$$u^{(n)}(x,y,F_0)=\sum_{m=1}^{3}\int_0^{F_0}\varphi_m(\tau)\frac{\partial}{\partial F_0}W_m^{(n)}(x,y,F_0-\tau)d\tau, \tag{15}$$

где n – количество координатных функций.

$$W_m^{(n)}(x,y,F_0=\sum_{i,j}C_{ijm}(F_0)\chi_{ij}(x,y)$$

- решение задачи

$$\frac{\partial W_m}{\partial F_0}=\Delta W_m-b^2W_m+f_m;\quad W_m\big|_{F_0=0}=0; \tag{16}$$

$$W_m\big|_{\Gamma_1}=0;\qquad \left.\frac{\partial W_m}{\partial\nu}\right|_{\Gamma_2}=0; \tag{17}$$

$\chi_{ij}(x,y)$ - координатные функции, точно удовлетворяющие граничным условиям (14);

$$\chi_{ij}=\frac{\omega_1}{\omega_1+\omega_2^2}\Phi_{ij}=\frac{\omega_1}{\omega_1+\omega_2^2}-\left[\left(P_i-\omega_{11}\frac{d\omega_{11}}{dx}\frac{dP_i}{dx}\right)\times\right.$$
$$\times\left(V_j-\omega_{12}\frac{d\omega_{12}}{dy}\frac{dV_j}{dy}\right)+\left(P_j-\omega_{11}\frac{d\omega_{11}}{dx}\frac{dP_j}{dx}\right)\times$$
$$\left.\times\left(V_i-\omega_{12}\frac{d\omega_{12}}{dy}\frac{dV_i}{dy}\right)\right]; \tag{18}$$

$$\omega_2=\omega_{11}\omega_{12};\quad \omega_3=\omega_{21}+\omega_{22}+\sqrt{\omega_{21}^2+\omega_{22}^2};$$
$$\omega_{11}=x(1-x);\quad \omega_{12}=y(1-y);\quad \omega_{21}=0.6-x;\quad \omega_{22}=0.6-y;$$

$P_i(x),\quad V_i(y)$ - полиномы Лежандра.

Коэффициенты $C_{ijm}(F_0)\neq\overline{C}_{ijm}(p)$, согласно (7), определяются по формуле

$$\overline{C}_{ijm}(p)=\sum_{k,s}Z_{ijks}(p)\int_{\Omega}\left[-f_m\chi_{ks}\right]d\Omega;\quad Z_{ijks}(p)=\frac{\Delta_{ijks}(p)}{p\Delta(p)}.$$

Обратное преобразование осуществляется разложением $Z_{ijks}(p)$ на простые дроби.

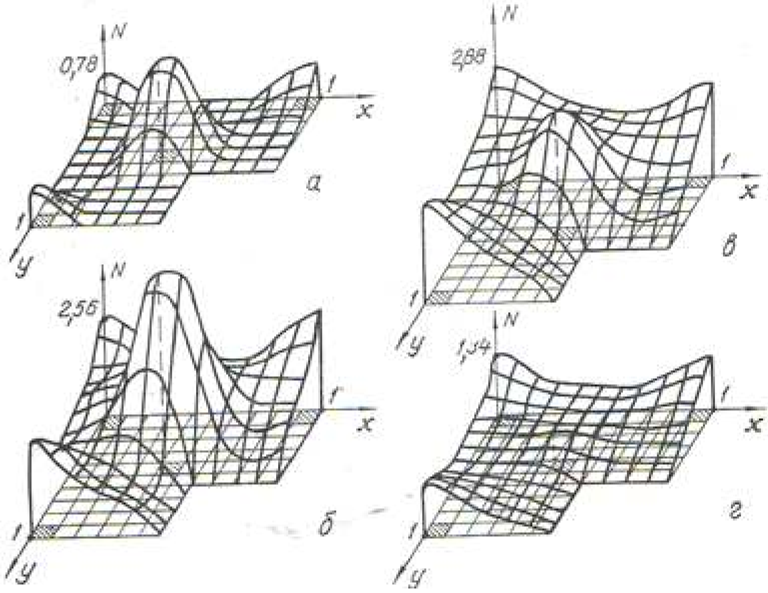

Рис.2. Распределение температурного поля в элементе (рис.1) при а - F_0 =0.01; б – 0.1; в – 1.0; г – 10

При отыскании корней p_i уравнения $\Delta(p)=0$ определяются собственные значения $p_i^*=-(p_i+b^2)$ задачи

$$\Delta W-p*W=0;\qquad W\big|_{\Gamma_1}=0;\qquad \left.\frac{\partial W}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_2}=0.$$

Собственные значения $p_i^*(l=1,\dots,n)$ - вещественные положительные и представляют собой отрезок монотонно возрастающей последовательности. При увеличении числа координатных функций значения p_i^* стабилизируются.

На рис.2, *а – г* в пространственных проекциях представлено распределение температурного поля в виде безразмерной критериальной функции $N(x,y,F_0)=u(x,y,F_0)\lambda d/P$ от координат x,y при $Bi=b^2=5;$ $\varphi_m(F_0)=1+\mathrm{A}_m\exp(-F_0),$ $\mathrm{A}_1=19,$ $\mathrm{A}_2=0.5,$ $\mathrm{A}_3=1;$ $n=21$ для $F_0=0.01;0.1;1.0;10.$ Для тестовой проверки алгоритмов рассматривалась задача с системой источников энергии для квадратной пластины с теплоизоляцией на торцах (пластина без выреза), при этом координатные функции для такой задачи выбирались в виде Φ_{ij} из выражения (18). Относительная погрешность тестовой задачи при сравнении с методом Фурье при n = 20, $F_0\geq 0.01$ не превышала 2%, а для тестовой и основной задач (13), (14) при малых F_0 значения температуры, рассчитанные в точке, наиболее удаленной от выреза ($x = 0, y = 0$), практически совпали.

ЛИТЕРАТУРА

1. Слесаренко А.П. Бутенко Т.В. Моделирование нелинейных тепловых процессов на базе совместного применения метода возмущений, регионально-структурного и вариационного методов// Вестник Харьк. нац. ун-та.,-2008.-№833.Сер. «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления», вып.10.- С.89-96
2. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. - М.: Наука,1970.-512с.
3. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. - М.: Наука, 1974.-524 с.

Надійшла 12.08.2009.