

УДК 519.862:866

Пошаговая дискретная модель оптимального управления динамическим балансом страховой компании

С. В. Волкотруб, С. Н. Герасин

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Украина

Построена динамическая модель управления инвестиционным портфелем страховой компании, позволяющая оптимально перераспределять средства в портфеле за счет безрискового актива. Решение рассмотренной в работе задачи оптимального стохастического управления активами и пассивами страховщика позволяет найти оптимальную стратегию управления активами на каждом шаге. Она обеспечивает максимальный размер капитала при минимизации затрат на управление с учетом заданного инвестором минимального уровня инвестиционного дохода.

Ключевые слова: математическая модель, дискретная модель, страховщик, активы и пассивы, оптимальная стратегия управления, капитал, затраты, требования инвестора.

Побудована динамічна модель керування інвестиційним портфелем страхової компанії, яка дозволяє оптимально перерозподіляти кошти за рахунок без ризикового активу. Розв'язок розглянутої у роботі задачі оптимального стохастичного керування активами та пасивами страховика дозволяє знайти оптимальну стратегію керування активами на кожному кроці. Вона забезпечує максимальний розмір капіталу при мінімізації витрат на керування з урахуванням заданого інвестором мінімального рівня інвестиційного прибутку.

Ключові слова: математична модель, дискретна модель, страхівник, активи та пасиви, оптимальна стратегія управління, капітал, витрати, вимоги інвестора.

There was constructed the investment portfolio dynamic control model for insurance company, which let us optimally reallocate portfolio funds at the cost of certain assets. Solution of examined optimal stochastic assets and liabilities control problem for insurer makes it possible to find optimal assets control strategy at every step. It ensures maximal capital value provided control cost minimization subject to the given by investor floor of investment income.

Keywords: mathematical model, discrete model, insurer, assets and liabilities, the optimal management strategy, capital, expenditures, investor requirements.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

Развитие страхового рынка Украины, концентрация значительных финансовых ресурсов у страховщиков приводит к тому, что страховые компании являются крупными инвесторами на финансовом рынке. Построение оптимального инвестиционного портфеля, эффективное управление инвестиционной деятельностью – эти вопросы являются актуальными для всех страховых компаний Украины. Каждая страховая компания стремится к повышению своей финансовой устойчивости, платежеспособности и конкурентоспособности. Заинтересованность страховщиков в оптимальном управлении инвестиционной деятельностью основана на следующих положениях. Во-первых, инвестиционная деятельность определяет саму возможность предоставления страховых услуг за счет обеспечения формирования достаточного денежного фонда для выполнения страховых обязательств (прежде всего это касается страхования жизни, поскольку планируемая доходность от инвестиций учитывается при расчете тарифов). Во-вторых, успешная инвестиционная деятельность влияет на

конкурентоспособность страхового продукта на рынке; в-третьих, инвестирование дает возможность владельцам страховой компании развивать свой бизнес.

Для инвестирования страховая компания может использовать денежные средства, связанные с выполнением страховых обязательств, и собственный капитал. Собственный капитал представлен относительно свободными от страховых обязательств денежными средствами. Рассмотрим денежные средства, связанные с выполнением страховых обязательств. В соответствии с действующими «Правилами формирования, учета и размещения страховых резервов» [1] под размещением страховых резервов понимаются активы, принимаемые в покрытие (обеспечение) страховых резервов. Активы, принимаемые в покрытие страховых резервов, должны удовлетворять условиям диверсификации, возвратности, прибыльности и ликвидности, входить в разрешенный список активов и удовлетворять тем требованиям, которые предъявляются к каждому из видов активов.

Под динамическим балансом страховой компании будем понимать совокупность активов, принимаемых в покрытие страховых резервов, и пассивов (страховых резервов), при этом величина активов корректируется и учитывается возможность перестройки инвестиционного портфеля с течением времени в зависимости от следующих факторов: транзакционных издержек, законодательного регулирования, полученного инвестиционного дохода, соответствия величине страховых резервов.

Пошаговая дискретная модель оптимального управления динамическим балансом подразумевает определение оптимальной стратегии управления активами на каждом шаге с учетом всех требований и пожеланий инвестора, таким образом, на каждом шаге производится корректировка структуры инвестиционного портфеля, сформированного из активов, принимаемых в покрытие страховых резервов, в зависимости от вышеперечисленных факторов.

Математическую модель будем строить для определенной линии бизнеса страховой компании – предоставление услуг смешанного страхования жизни для группы лиц определенного возраста, поэтому $p_{дож}$ (вероятность дожития до определенного возраста) и $q_{см}$ (вероятность смерти) являются постоянными величинами.

2. Истоки исследования авторов

Проблемой управления инвестиционным портфелем занимались многие исследователи, среди которых следует отметить работы Герасимова Е.С.[3], Мельникова А.В.[2], Ширяева А.Н.[5], Марковица Г.[7], Тобина Д.[8] и других. Результаты их работ отражают как фундаментальные основы теории портфельных инвестиций, так и практические рекомендации и выводы по формированию инвестиционных портфелей в рыночных условиях. В то же время эти результаты не всегда могут быть использованы на отечественных финансовых рынках.

Вопросами динамической оптимизации портфеля занимались Уилки Д.[9], Демпстер М.[11] и другие. Однако результаты работ не могут быть использованы для управления инвестиционной деятельностью украинской

страховой компании по страхованию жизни, поскольку не учитывают специфику украинского страхового рынка, но могут выступать теоретической и методологической базой исследования.

3. Нерешенные проблемы и цели

На современном этапе все большее число предприятий осознают необходимость сознательного перспективного управления инвестиционной деятельностью на основе научной методологии предвидения ее направлений и форм, адаптации к общим целям развития предприятия и изменяющимся условиям внешней инвестиционной среды.

Изучение вопросов особенностей управления инвестиционной деятельностью страховой организации на финансовом рынке Украины является недостаточно проработанным. Во многих страховых компаниях используются оптимизационные модели, не учитывающие возможность будущей перестройки инвестиционного портфеля, то есть однопериодные [7]. Инвестиционная деятельность страховщика, связанная с выполнением страховых обязательств, имеет ряд особенностей и регулируется законодательно. В этом случае в процессе формирования и управления инвестиционным портфелем страховщик сталкивается с рядом нерешенных проблем. Данная работа посвящена решению задачи построения математической модели и оптимального управления инвестиционной деятельностью страховщика, направленной на выполнение страховых обязательств.

Необходимость создания динамической модели управления активами и пассивами и метода оптимального управления инвестиционной деятельностью, учитывающего особенности рыночных отношений в украинской экономике с учетом характерных для нее рисков и возможности будущей перестройки портфеля, и предопределило цель и задачи данной работы.

4. Построение инвестиционного портфеля, отвечающего страховым обязательствам страховщика

Сформулируем поставленные задачи, возникающие при составлении математической модели для решения задачи оптимального управления рассматриваемой инвестиционной деятельностью страховой компании. Поскольку мы рассматриваем страховые резервы по страхованию жизни (математические резервы), то при моделировании необходимо учитывать законодательное регулирование размещения, формирования и учета страховых резервов. Выбор оптимальной стратегии управления будем производить с учетом желаемого для инвестора минимального инвестиционного дохода. Однако необходимо учитывать тот факт, что в конце каждого промежутка времени необходимо сравнить балансовую стоимость активов с суммой страховых обязательств (страховыми резервами). В построенной математической модели рассматривается динамическая модель капитала страховой компании, таким образом, при моделировании мы учитываем изменение количества договоров за период, а также страховые выплаты за рассматриваемый промежуток времени.

Построим дискретную математическую модель управления инвестиционной деятельностью страховой компании при размещении страховых резервов по страхованию жизни. Управление активами будет происходить путем перераспределения средств за счет безрискового актива (банковского депозита). Будем использовать принцип оптимальности Беллмана – каково бы ни было состояние системы перед очередным шагом, надо выбрать управление на этом шаге так, чтобы доход на данном шаге плюс оптимальный доход на всех последующих шагах был максимальный. В построенной модели доход на каждом шаге будет оптимальным, таким образом, сумма оптимальных изменений дохода на каждом шаге даст нам максимальный доход в конце периода моделирования.

Учет законодательного регулирования осуществляется согласно [1]. В данной работе при построении инвестиционного портфеля выбраны активы следующих категорий: а) банковские вклады (депозиты); б) акции (2-х эмитентов); в) кредиты страхователям-гражданам, которые заключили договоры страхования жизни, в пределах выкупной суммы на момент выдачи кредита и под залог выкупной суммы.

В качестве модели эволюции цен акций использована классическая модель геометрического (экономического) броуновского движения и ее аналог в дискретном времени (модель Гаусса) [2,5]. Модифицируем модель эволюции рискованных вложений, введя управляющую аддитивную компоненту:

$$x_i(t) = \left[1 + \mu_i(t) + \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_{ij}(t) w_j(t) \right] (x_i(t-1) + u_i(t)), \quad i = \overline{1, n} \quad (1)$$

здесь $\mu_i(t) > 0$ характеризует коэффициент возрастания акции на интервале $(t-1, t)$, $w_i(t)$ – последовательность независимых нормально распределенных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией, $\|\sigma_{ij}(t)\|_{n \times n}$ – матрица волатильности, $u_i(t)$ – сумма капитала, которая перераспределяется в i -м активе в момент времени t за счет банковского счета, выбирается так, чтобы средства, размещенные в соответствующей категории активов, в каждый момент времени не превосходили нормативного значения, $i = \overline{1, n}$, $\sum_{i=1}^n x_i(t)$ – средства, полученные при инвестировании в n ценных бумаг (n акций).

Эволюция средств, которые используются для кредитования страхователей, задается аналогичным соотношением:

$$x_{n+1}(t) = (1 + \beta(t))(x_{n+1}(t-1) + u_{n+1}(t)), \quad (2)$$

где $\beta(t)$ – процент кредитования, $u_{n+1}(t)$ – сумма капитала, которая перераспределяется в момент времени t за счет банковского вклада.

Динамика объема страховых резервов, размещенных на депозитных счетах в банковских структурах, описывается соотношением:

$$x_{n+2}(t) = (1 + r(t))(x_{n+2}(t-1) - \sum_{i=1}^{n+1} u_i(t)), \quad (3)$$

где $r(t)$ – банковский процент.

Составим портфель, состоящий из описанных выше активов (1)-(3). Сумму активов на каждом шаге будем называть управляемым капиталом, поскольку управление построенным портфелем будем осуществлять за счет перераспределения денежных средств между используемыми категориями активов за счет безрискового актива – банковского вклада [3]. Если значение функции управления $u_i(t)$ в момент времени t положительно, то это означает перевод капитала с банковского счета в i -й вид рисковых вложений, если отрицательно, то это означает перераспределение капитала с i -го рискового вложения на банковский счет.

Капитал управляемого портфеля строится следующим образом:

$$K(t) = \sum_{i=1}^{n+2} x_i(t) + \Pi_t - B_t, \quad (4)$$

где $\Pi_t = \sum_{i=1}^N \Pi_i e^{-\delta(T-t)} p_{дож}$ – нетто-премии, собранные за период $(t-1, t)$, а

$$B_t = \sum_{i=1}^{N_{vub}} B_i q_{см} - \text{страховые выплаты за период } (t-1, t), \quad N - \text{ количество}$$

заключенных договоров страхования за период $(t-1, t)$, N_{vub} – количество выплат по договорам страхования за период $(t-1, t)$ [4]. Заметим, что $K(t)$ является нормально распределенной случайной величиной.

Определим значение управляемого капитала в начальный момент времени.

$$K_0(0) = \sum_{i=1}^{N_0} B1_i e^{-\delta T} p_{дож} + \sum_{i=1}^{N_0} B_i e^{-\delta T} q_{см} - \sum_{i=1}^{N_0} \Pi_i e^{-\delta T} p_{дож}, \quad (5)$$

где $K_0(0)$ – страховые резервы в начальный момент времени для модели смешанного страхования жизни, N_0 – количество договоров страхования в начальный момент времени, $B1_i$ – выплаты в случае дожития человека до определенного возраста (зависит от линии страхования), B_i – выплата в случае смерти, Π_i – нетто-премия по договору страхования, δ – сила роста процентов, T – время моделирования, $p_{дож}$ – вероятность дожития до определенного возраста, $q_{см}$ – вероятность смерти.

$$x_i(0) = \gamma_i K_0(0), \quad i = \overline{1, n+2}, \quad (6)$$

здесь γ_i – доля страховых резервов, размещенная в соответствующей категории активов ($\sum_{i=1}^{n+2} \gamma_i = 1$).

5. Пошаговая модель оптимального управления динамическим балансом страховой компании

Определим на каждом шаге размер капитала в виде функции $\phi_i(u)$. Будем учитывать возможность корректировки капитала за счет свободных от страховых обязательств средств в зависимости от предпочтений инвестора касательно желаемых границ инвестиционного дохода:

$$\phi_i(u) = \begin{cases} (1 + \alpha)K_{i-1}, & K_i - \bar{u}_{i-1}^T R \bar{u}_{i-1} - (1 + \alpha)K_{i-1} \rightarrow \max_u \leq 0 \\ K_i, & 0 < K_i - \bar{u}_{i-1}^T R \bar{u}_{i-1} - (1 + \alpha)K_{i-1} \rightarrow \max_u \leq (1 + \mu)K_{i-1} \\ (1 + \mu)K_{i-1}, & K_i - \bar{u}_{i-1}^T R \bar{u}_{i-1} - (1 + \alpha)K_{i-1} \rightarrow \max_u > (1 + \mu)K_{i-1} \end{cases} \quad (7)$$

здесь α – желаемый для инвестора минимальный уровень инвестиционного дохода, μ – позволяет регулировать максимальный уровень желаемого инвестиционного дохода, устанавливается инвестором, R – симметричная положительноопределенная матрица размерности $(n+1) \times (n+1)$, регулирующая затраты на операции управления вложениями.

В ходе решения задачи максимизации функции $K_i - \bar{u}_{i-1}^T R \bar{u}_{i-1} - (1 + \alpha)K_{i-1}$ по управлению получаем вектор \bar{u} , состоящий из оптимальных управлений для каждого вида актива. Это позволяет нам переформировать портфель с целью получения максимального капитала на шаге i с учетом затрат на управление и желаемым для инвестора минимальным инвестиционным доходом. Максимум данной функции ищем при ограничениях, обусловленные спецификой инвестиционной деятельности страховой компании:

$$x_i(t) \leq \gamma_i K(t), \quad i = \overline{1, n+1}, \quad (8)$$

$$\theta x_{n+2}(t-1) \geq \sum_{i=1}^{n+1} u_i(t), \quad (9)$$

где θ – указанная страховщиком желаемая часть безрискового актива, за счет которой происходит управление другими активами.

Смешанное ограничение (8) регулируют объемы вложений согласно законодательным нормам, в свою очередь, (9) регулирует перераспределение средств таким образом, чтобы суммарный объем перераспределенных средств из банковского счета не превышал заданной доли θ средств на этом счету.

Введем в рассмотрение функцию $\phi_i(u)$, определяющую на каждом шаге связь размеров активов и пассивов. Сравнивая размер оптимального на данном шаге капитала (активы) с размером страховых резервов (пассивы), мы осуществляем регулирование:

$$\phi_i(u) = \begin{cases} CP_i, & \phi_i < CP_i \\ \phi_i, & \phi_i \geq CP_i \end{cases} \quad (10)$$

здесь CP_i – сумма страховых резервов в момент времени i . Рассчитывается по формуле:

$$CP_i = \sum_{k=1}^{N_i} B1_k e^{-\delta(T-i)} p_{дож} + \sum_{k=1}^{N_i} B_k e^{-\delta(T-i)} q_{см} - \sum_{k=1}^{N_i} \Pi_k e^{-\delta(T-i)} p_{дож} \quad (11),$$

где N_i – количество договоров в момент времени i , остальные переменные описаны выше.

Целевой функционал построим следующим образом:

$$J(u) = M \left\{ K_0(0) + \sum_{i=1}^T (\varphi_i(u) - \varphi_{i-1}(u)) \right\} \rightarrow \max_u \quad (12)$$

Разница $\varphi_i - \varphi_{i-1}$ дает оптимальный прирост капитала на шаге i , отвечающий всем представленным требованиям.

Сформулированная таким образом математическая модель позволяет найти оптимальную стратегию управления активами на каждом шаге, таким образом, чтобы все представленные при постановке задачи требования были удовлетворены.

6. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Предложенная постановка задачи оптимального управления и построенная на ее базе математическая модель позволяют страховым компаниям эффективно управлять инвестиционной деятельностью при размещении страховых резервов по страхованию жизни для выбранной линии бизнеса. Пошаговая модель оптимального управления динамическим балансом имеет ряд преимуществ: позволяет находить оптимальную стратегию управления на каждом шаге для дальнейшего изменения вложений в каждый вид активов, при этом перестройка портфеля происходит в соответствии с законодательным регулированием, величиной страховых резервов, желаемым инвестиционным доходом инвестора.

Представленная модель не учитывает темпы роста инфляции при формировании страховых резервов по страхованию жизни. Учет этого фактора позволяет создать модель более адекватную реальности. Возможно также дополнительно учесть прогнозирование количества заключенных договоров и страховых выплат за промежуток времени для данной модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. «Правила формирования, учета и размещения страховых резервов по страхованию жизни», утвержденные распоряжением Государственной комиссии по урегулированию рынков финансовых услуг Украины от 16.05.2006 г. №5770.
2. Мельников А. В. Риск-Менеджмент: стохастический анализ рисков в финансах и страховании, - М.: АНКЛ, 2001. – 345с.
3. Герасимов Е.С., Домбровский В.В. Динамическая сетевая модель управления портфелем ценных бумаг в непрерывном времени при квадратичной функции риска // Вестник Томского государственного университета. – Томск, 2000, №269. – С.71-74.
4. Гербер Х. Математика страхования жизни, – М.: Мир, 1995. – 467с.
5. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики: В 2 т.– М.: Фазис, 1998.
6. Бертсекас Д., Шрив С. Стохастическое оптимальное управление, – М.: Наука, 1985. – 280 с.

7. Markowitz H. Portfolio selection // J. Finance. 1952. Vol. 7. P. 77-91.
8. Tobin J. Liquidity preference as behavior towards risk // Rev. Economic Stud. 1958.
9. Wilkie A.D. A stochastic investment model for actuarial use // Transactions of the Faculty of Actuaries. 1986. V.39.P. 391-403.
10. Merton R. C. An intertemporal capital asset pricing model // Econometrica, 1973. Vol. 41, N 5. P. 867-886.
11. Dempster M.A.H., Consigli G. The CALM stochastic programming model for dynamic asset-liability management//In: Ziemba W.T., Muley J.M. (eds.) Worldwide asset and liability modeling.– Cambridge University Press, 1998. P.464-500.

Надійшла у першій редакції 29.05.2009, в останній – 31.08.2009.

© Волкотруб С. В., Герасин С. Н., 2009