

УДК 519.6

Об одной краевой задаче теории нестационарного переноса на графе

Ю. А. Гладышев

Калужский государственный педагогический университет им. Циолковского, Россия

Представлено построение решения краевой задачи на графе с циклами. Использован метод построения рядов Фурье. Рассмотрены некоторые примеры.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, задача Неймана, краевая задача на графе, ациклический граф, ряд Фурье.

Надано побудову розв'язку граничної задачі на графі з циклами. Викорис тано метод побудови рядів Фур'є. Розглянуто певні приклади.

Ключові слова: рівняння теплопровідності, задача Неймана, крайова задача на графі, ациклический граф, ряд Фур'є.

The construction of solutions of boundary value problems on graphs with cycles is presented. The method of generalized Fourier development is used. Some special examples are considered.

Keywords: heat equation, Neumann problem, boundary value problem on a graph, acyclic graph, Fourier series.

Многие задачи теории переноса в сложных системах приводят к необходимости найти решение с особенностью на геометрическом графе. Таковыми являются задачи оребрения труб, конструирование различных радиаторов при решении задач теплопроводности. Технологические задачи создания материалов с заданными свойствами приводят к необходимости искать решения задач диффузии в системах контактирующих элементов. Аналогичные задачи возникают при изучении движения электрического тока в сетях, особенно с точки зрения выделения тепла.

В математических руководствах [1], [2], посвященных теории решения краевых задач на геометрическом графе доказано существование решений с особенностями в любой точке графа.

Наибольшую трудность при построении фундаментального решения представляет наличие циклов, то есть замкнутых контуров. С точки зрения приложений этот случай наиболее интересен.

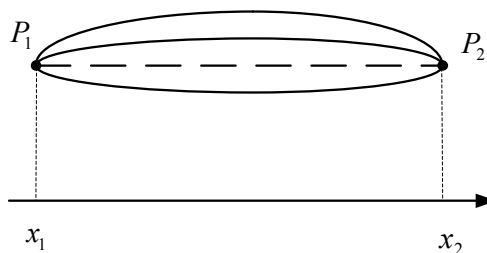


Рис. 1. Пучок стержней.

В работе рассмотрен случай S циклов и дан конкретный способ построения решения с особенностью. Рассмотрен один из методов, состоящий в использовании разложения в обобщенный ряд Фурье на графе. При построении

решения использовано представление основных функций в виде ряда по обобщенным степеням Берса.

В работе дан метод решения краевых задач типа Неймана (задача N) для пучка стержней, соединенных в своих концах (рис.1). Обратим внимание, что задача Дирихле для такой системы легко сводится к задачам Дирихле для одного стержня.

Для общности считаем, что общее количество ребер графа равно S . Для процесса переноса на каждом ребре задан потенциал процесса $\varphi^{(i)}(x, t), i = 1, \dots, S$, подчиненный уравнению параболического типа, определяющего диссипативный процесс:

$$a_{2i}(x) \frac{\partial}{\partial x} \left(a_{1i}(x) \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial x} \right) = \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial t}. \quad (1)$$

Здесь a_{1i}, a_{2i} функции от x , определяющие физические свойства стержней, а t – время. В случае задачи теплопроводности имеем:

$\varphi^{(i)} = T^{(i)}$, где $T^{(i)}$ – температура i -го стержня и

$$a_{11} = \frac{K_i S_i}{H_i}, \quad a_{22} = \frac{1}{C_i \rho_i H_i}, \quad (2)$$

где $K_i, S_i, C_i, \rho_i, H_i$ – коэффициент теплопроводности, площадь сечения, теплоемкость, плотность и коэффициент Ламе для i -го стержня.

На границах в точках P_1, P_2 примем условие отсутствия суммарного внешнего потока:

$$-\sum_{i=1}^S a_{1i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \Big|_{x_1} = -\sum_{i=1}^S a_{1i} \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial x} \Big|_{x_2} = 0. \quad (3)$$

Таким образом, поставленная задача является задачей Неймана, мало исследованная в математической постановке. В отличие от задачи D, как это уже говорилось, которая решается без трудностей и сводится к известной задаче для одного стержня, построение задачи N нетривиально.

Начальные условия состоят, как обычно в задании значения начального потенциала как функции координаты:

$$\varphi_i \Big|_{t=0} = f_i(x), \quad i = 1, \dots, N. \quad (4)$$

Поскольку поставлена задача получения фундаментального решения, то будем иметь дело в основном когда f_1 задано δ -функцией, а на остальных ребрах начальные значения потенциала равно нулю.

Решение поставленной задачи будем искать в виде обобщенного ряда Фурье:

$$\varphi^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n U_n^{(i)}(x) e^{-\lambda_n^2 t}. \quad (5)$$

При соответствующем данном ниже методе нахождения коэффициентов C_n . С этой целью на графе задано естественное определение скалярного произведения как суммы интегралов по всем ребрам с весом a_{2i}^{-1} .

Частное решение ищем в виде:

$$\varphi^{(i)}(x, t) = U^{(i)}(x) e^{-\lambda^2 t}. \quad (6)$$

Используя аппарат рядов Берса [2] запишем $U^{(i)}$ в виде:

$$U^{(i)} = A_i \cos \lambda X(x, x_1) + B_i \sin \lambda X(x, x_1), \quad i = 1, \dots, S. \quad (7)$$

Из условия согласования в точках x_1 и x_2 следует равенство потенциалов.

Отсюда имеем:

$$A_i = A, \quad i = 2, \dots, S, \quad \text{и} \quad (8)$$

$$A \cos \lambda X_1(x_2, x_1) + B_1 \sin \lambda X_1(x_2, x_1) = A \cos \lambda X_i(x_2, x_1) + B_i \sin \lambda X_i(x_2, x_1) \quad (9)$$

Условие (3) для потока дает еще два уравнения:

$$B_1 + B_2 + \dots + B_S = 0, \quad (10)$$

$$-A \sum_{i=1}^S \sin \lambda \tilde{X}_i(x_2, x_1) + \sum_{i=1}^S B_i \cos \lambda \tilde{X}_i(x_2, x_1) = 0. \quad (11)$$

Для определения $S+1$ неизвестных постоянных A, B_1, \dots, B_S имеем равные $S+1$ линейных уравнений. Поскольку система однородна, то для наличия нетривиального решения необходимо потребовать обращение в нуль определителя системы. Поэтому укажем структуру этого определителя. Обозначим элементы определителя как a_{ij} . Элементы первой строки имеют значения:

$$a_{11} = 0, \quad a_{1i} = 1, \quad i = 2, \dots, S+1. \quad (12)$$

Первый столбец составлен как:

$$a_{k1} = \cos \lambda X_1(x_2, x_1) - \cos \lambda X_k(x_2, x_1), \quad k = 2, \dots, S, \quad (13)$$

$$a_{(S+1)1} = -\sum_{i=1}^S \sin \lambda \tilde{X}_i(x_2, x_1). \quad (14)$$

Остальные элементы последней строки запишем как:

$$a_{(S+1)i} = \cos \lambda \tilde{X}_{i-1}, \quad i = 2, \dots, S+1. \quad (15)$$

Основную часть занимает полоса диагональных элементов вида:

$$a_{ik} = \sin \lambda X_i(x_2, x_1), \quad i = k, \quad i = 2, \dots, S, \quad (16)$$

$$a_{ik} = \sin \lambda X_i(x_2, x_1), \quad i = 2, \dots, S, \quad k = i+1. \quad (17)$$

Остальные элементы определителя исчезают.

Условие равенства определителя нулю является основным уравнением для определения собственных значений.

Приведем ряд примеров. Если $S=1$, то получим обычное условие для определения λ для одного стержня:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\sin \lambda \tilde{X}_1(x_1, x_2) & \cos \lambda X_1(x_1, x_2) \end{vmatrix} = -\sin \lambda \tilde{X}_1(x_2, x_1) = 0. \quad (18)$$

В системе двух стержней, которые как видно дают пример цикла, значения λ определены трансцендентным уравнением вида:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \cos \lambda X_1 - \cos \lambda X_2 & \sin \lambda \tilde{X}_1 & -\sin \lambda X_2 \\ -\sin \lambda \tilde{X}_1 - \sin \lambda \tilde{X}_2 & \cos \lambda \tilde{X}_1 & \cos \lambda \tilde{X}_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (19)$$

Для системы трех стержней, включающей три цикла, выражение становится более сложным:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \cos \lambda X_1 - \cos \lambda X_2 & \sin \lambda X_1 & -\sin \lambda X_2 & 0 \\ \cos \lambda X_2 - \cos \lambda X_3 & 0 & \sin \lambda X_2 & -\sin \lambda X_3 \\ -\sum_{i=1}^3 \sin \lambda \tilde{X}_i & \cos \lambda \tilde{X}_1 & \cos \lambda \tilde{X}_2 & \cos \lambda \tilde{X}_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (20)$$

Другой, более простой способ построения основной системы состоит в выборе для каждого стержня решения в «каноническом» виде:

$$\varphi^{(i)} = A \frac{\sin \lambda X_i(x, x_2)}{\sin \lambda X_i(x_1, x_2)} + B \frac{\sin \lambda X_i(x, x_1)}{\sin \lambda X_i(x_1, x_2)}. \quad (21)$$

Очевидно, что условие непрерывности потенциалов процесса переноса в точках P_1, P_2 выполнено. Остается найти константы A, B таким образом, чтобы условие потоков (суммарной непрерывности) было выполнено. Если решение имеет вид (21), то потоки найдем из выражения D_1 производной:

$$\begin{aligned} I_{1i} &= -D_{1i} \varphi \Big|_{x_1} = -A \frac{\lambda \cos \lambda \tilde{X}_i(x_1, x_2)}{\sin \lambda X_i(x_1, x_2)} - B \frac{\lambda}{\sin \lambda X_i(x_2, x_1)} \\ I_{2i} &= -D_{1i} \varphi \Big|_{x_2} = -A \frac{\lambda}{\sin \lambda X_i(x_1, x_2)} - B \frac{\lambda \cos \lambda \tilde{X}_i(x_2, x_1)}{\sin \lambda X_i(x_2, x_1)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Введем матрицу с элементами (матрицу проводимости):

$$\begin{aligned} P_{11}^{(i)} &= \frac{\lambda \cos \lambda X_i(x_2, x_1)}{\sin \lambda X_i(x_2, x_1)}, & P_{12}^{(i)} &= -\frac{\lambda}{\sin \lambda X_i(x_2, x_1)} \\ P_{21}^{(i)} &= \frac{\lambda}{\sin \lambda X_i(x_2, x_1)}, & P_{22}^{(i)} &= -\frac{\lambda \cos \lambda \tilde{X}_i(x_2, x_1)}{\sin \lambda X_i(x_2, x_1)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Поэтому запишем:

$$\left. \begin{aligned} A \sum_{i=1}^S P_{11}^{(i)} + B \sum_{i=1}^S P_{12}^{(i)} &= 0 \\ A \sum_{i=1}^S P_{21}^{(i)} + B \sum_{i=1}^S P_{22}^{(i)} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (24)$$

Следовательно, для определителя примем:

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^S P_{11}^{(i)} & \sum_{i=1}^S P_{12}^{(i)} \\ \sum_{i=1}^S P_{21}^{(i)} & \sum_{i=1}^S P_{22}^{(i)} \end{vmatrix} = 0. \quad (25)$$

Можно показать, это также следует из единственности решения поставленной задачи, что два выражения для нахождения собственных значений полностью эквивалентны.

После нахождения собственных значений необходимо найти связь значений A, B из однородной системы и записать решения. Далее следует провести нормировку решения, используя результаты работы [3].

Таким образом, остается, используя понятие скалярного произведения на графе, найти коэффициенты разложения заданных на ребрах графа функций.

Разложение имеет общий вид:

$$\varphi^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{1}{N_n} \varphi^{(i)}. \quad (26)$$

Для построения решения с особенностью возьмем в качестве исходных функций без ограничения общности:

$$f_1 = M\delta(x - x_0), f_i = 0, i \geq 2. \quad (27)$$

Поэтому для коэффициентов C_n разложение в ряд имеем:

$$C_n = \frac{M}{N_1 a_2^{(1)}(x_0)} \left[\frac{A \sin \lambda X_1(x_0, x_2)}{\sin \lambda(x_1, x_2)} + \frac{B \sin \lambda X(x_0, x_1)}{\sin \lambda X(x_2, x_1)} \right]. \quad (28)$$

Напомним, что если стержни однородны, то функции $\sin \lambda X_i, \cos \lambda X_i$ имеют вид:

$$\cos \lambda X_i(x, x_1) = \cos \lambda \tilde{X}_i(x, x_1) = \cos \frac{1}{\sqrt{a_{1i} a_{2i}}} (x - x_1), \quad (29)$$

$$\sin \lambda X_i(x, x_1) = \sqrt{\frac{a_{2i}}{a_{1i}}} \sin \lambda \frac{x - x_1}{\sqrt{a_{1i} a_{2i}}}. \quad (30)$$

Приведем частный, но важный в практике случай, когда все стержни одинаковы по своим параметрам. Следовательно, система симметрична и это приводит к вырождению собственных значений, то есть совпадению ряда ранее различных собственных значений.

Тогда уравнения, определяющие процесс в стержне совпадают и имеют вид:

$$\frac{d^2 U^{(i)}}{dx^2} + \lambda^2 U^{(i)} = 0. \quad (31)$$

Положим для простоты $x_1 = 0, x_2 = \pi$. Искомое решение, если взять первый вариант решения, имеет вид:

$$U^{(i)} = A_i \cos \lambda x + B_i \sin \lambda x. \quad (32)$$

Подстановка в определитель дает для собственного значения:

$$\lambda = n, n = 0, 1, \dots$$

Для коэффициентов A, B_1, \dots, B_S имеем:

$$\begin{aligned} A \neq 0, B_i &= 0; \\ A = 0, B_1 + B_2 + \dots + B_S &= 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Одному собственному значению соответствует S различных собственных функций. Однако, решения должны быть ортогонализированы. Приведем результат этой операции.

Имеем симметричное, то есть одинаковое на всех стержнях решение:

$$U_{n,0}^{(i)} = A \cos nx. \quad (34)$$

Остальные $S-1$ решений несимметричны. Если k – номер линейно независимого решения при данном n , а i – номер стержня (ребра), то система линейно независима и система ортогональных решений имеет вид:

$$U_{n,k}^{(i)} = \begin{cases} 0, i < k, \\ (S-i) \sin nx, i = k, \\ -\sin nx, i > k, k = 1, \dots, S-1. \end{cases} \quad (35)$$

Вместе с симметричным решением ($k=0$) имеем ровно S линейно независимых решений.

Например, если $S=3$, результат можно записать:

$$\begin{aligned} U_0^{(i)} &= A \cos nx, i = 1, 2, 3, \\ U_1^{(i)} &= 2B_1 \sin nx, \\ U_i^{(2)} &= U_1^{(3)} = -B_1 \sin nx, \\ U_2^{(1)} &= 0, U_2^{(2)} = B_2 \sin nx, U_2^{(3)} = -B_2 \sin nx. \end{aligned} \quad (36)$$

При наличии 4 параллельно соединенных стержней определим решение как:

$$\begin{aligned} U_{n0}^{(i)} &= A \cos nx, i = 1, 2, 3, 4. \\ \left. \begin{aligned} U_{n1}^{(1)} &= 3B_1 \sin nx \\ U_{n1}^{(2)} &= U_{n1}^{(3)} = U_{n1}^{(4)} = -B_2 \sin nx \end{aligned} \right\} \\ \left. \begin{aligned} U_{n2}^{(1)} &= 0 \\ U_{n2}^{(2)} &= 2B_2 \sin nx \\ U_{n2}^{(3)} &= U_{n2}^{(4)} = -B_2 \sin nx \end{aligned} \right\} \\ \left. \begin{aligned} U_{n3}^{(1)} &= 0 \\ U_{n3}^{(2)} &= 0 \\ U_{n3}^{(3)} &= B_3 \sin nx \\ U_{n3}^{(4)} &= -B_3 \sin nx \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (37)$$

Необходимо провести нормировку этих ортогональных решений. Для симметричного решения найдем:

$$N_{0S}^2 = \frac{\pi}{2} S. \quad (38)$$

Для несимметричных решений, нумеруя их от 1 до $S-1$ имеем:

$$N_{iaS}^2 = \frac{\pi}{2} (S-i)(S+1-i). \quad (39)$$

Обратим внимание, что норма не зависит от n , что упрощает расчеты. Например, для случая двух стержней:

$$N_{0S}^2 = \pi, N_{1S}^2 = \pi. \quad (40)$$

Соответственно для трех стержней вычисления дают:

$$N_{0S}^2 = \frac{3}{2} \pi, N_{1aS}^2 = 3\pi, N_{2aS}^2 = \pi. \quad (41)$$

Общее решение запишем как сумму:

$$\varphi^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{S-1} C_{nk} \frac{U_{nk}^{(i)}}{N_k} e^{-\lambda_n^2 t}. \quad (42)$$

Здесь коэффициенты C_{nk} разложения заданных функций $f^{(i)}$ определены:

$$C_{nk} = \sum_{i=1}^S \frac{1}{N_k} \int_0^{\pi} f^{(i)} U_{nk}^{(i)}(x) dx. \quad (43)$$

Например, если только $f^{(1)} \neq 0$ и положим $f^{(1)} = 1, f^{(i)} = 0, i = 2, \dots, S$, то имеем:

$$C_{nk} = \frac{1}{N_k} \int_0^{\pi} U_{nk}^{(1)}(x) dx, k = 0, \dots, S-1. \quad (44)$$

Эти интегралы легко вычисляются, поэтому имеем:

$$C_{n0} = 0, C_{2k,1} = 0, C_{2k+1,1} = \frac{2}{N_1}. \quad (45)$$

Для получения искомого решения уравнения (1) достаточно ввести в полученные разложения начальных значений временный множитель согласно (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Покорный Ю.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. – М.: Физматлит, 2004.
2. Гладышев Ю.А. Формализм Бельтрами-Берса и его приложений в математической физике. – Калуга, 1997.
3. Гладышев Ю.А. Некоторые интегральные свойства обобщенных степеней Берса. Вестник КГПУ – Калуга, 2005.

Надійшла 20.05.2009.

© Гладышев Ю. А., 2009