

УДК 519.633+533.664:595.7

## Апробация УМДВ для класса задач о колебаниях крыла в вязкой среде с ограниченным решением на кромках

С. А. Довгий, А. В. Шеховцов

*Институт гидромеханики НАНУ, Украина*

На основе усовершенствованного метода дискретных вихрей (УМДВ), минимизирующего ошибки входных данных для задачи Коши, обобщенного для вязких сред, проведен цикл методических исследований и сопоставлений с результатами экспериментальных и численных исследований других авторов, использующих эйлеровый или лагранжево-эйлеровый подходы. Получено удовлетворительное согласование осредненных и мгновенных характеристик колеблющейся пластины в отрывном режиме для различных чисел Рейнольдса, характерных для полета насекомых, при экономии машинного времени в сотни раз.

**Ключевые слова:** усовершенствованный метод дискретных вихрей, вязкая среда, отрывной режим, число Рейнольдса, полёт насекомого, машинное время

На основі удосконаленого методу дискретних вихорів (УМДВ), який зменшує помилки вхідних даних для задачі Коші, узагальненого для в'язкого середовища, був виконаний цикл методичних досліджень та співставлень з результатами експериментальних та чисельних досліджень інших авторів, які застосовують ейлеровий або лагранжево-ейлеровий підходи. Отримано задовільне узгодження осереднених та миттєвих характеристик пластини, яка коливається у відривному режимі для різних чисел Рейнольдса, характерних для польоту комах, при економії машинного часу у сотні разів.

**Ключові слова:** удосконалений метод дискретних вихорів, в'язке середовище, відривний режим, чисел Рейнольдса, політ комахи, машинний час

On a basis the improved method of discrete vortices (IMDV), reducing mistakes input data for Cauchy problem, generalized for viscous medium, the cycle of methodical researches and comparisons to results of experimental and numerical researches of other authors using Euler or Euler-Lagrange approach is performed. It is received satisfactory agreement averaged and instant characteristics of oscillating plates in separation mode for various Reynolds numbers, typical for insects flight, at economy of machine time in hundreds times.

**Keywords:** improved method of discrete vortices, viscous medium, detachable regime, the Reynolds number, the flight of an insect, machine time

### 1. Введение

Как известно, до последних лет основными проблемами метода дискретных вихрей, которые существенно ограничивали сферу его применения, были: 1) проблема значительного завышения расчетных средних подъемных сил на крыльях при закритических углах атаки; 2) проблема удовлетворительного количественного моделирования дисперсии завихренности не только за счет конвекции, но и за счет диффузии для произвольных чисел Рейнольдса и Струхала; 3) проблема корректного моделирования взаимодействия вихрей с твердыми границами, особенно для нестационарных задач.

Первую и вторую проблемы для неустановившегося обтекания неподвижного тонкого крыла удалось успешно решить при помощи УМДВ [1], причем для случая вязкой среды – используя автомодельное решение обобщенного уравнения Гельмгольца [2,3].

Решение третьей проблемы, в частности, необходимо для численного моделирования полета насекомых, так как крылья насекомых совершают колебательные движения в неподвижной среде. Поэтому следующим шагом стало проведение методических исследований и численных сравнительных экспериментов на основе УМДВ для сопоставления с известными экспериментальными и численными результатами, полученными на основе других методов. Однако в этом случае – уже не для осредненных, а для мгновенных нагрузок на неподвижных и машущих крыльях для различных чисел Рейнольдса, характерных для полета насекомых.

Основная особенность УМДВ, минимизирующей ошибки входных данных для задачи Коши состоит в следующем. Как известно, для любого численного метода существуют три типа ошибок. Первый – ошибки входных данных; второй – ошибки усечения или обрыва (ошибки метода); третий – ошибки округления (машинные ошибки). Обычно предполагается, что ошибки входа достаточно малы и основными ошибками, присущими используемому методу, являются ошибки усечения. Поэтому в случае методов решения задачи Коши порядок метода (его точность) определяется ошибками усечения или, точнее, локальными ошибками дискретизации по времени. Однако на самом деле величина ошибок входных данных задачи Коши для системы дискретных вихрей, моделирующих непрерывную вихревую поверхность несоразмерно велика даже по сравнению с ошибками усечения методов интегрирования первого порядка.

Движение ансамбля дискретных вихрей происходит в соответствии с законом дальнего действия (законом Био-Савара), то есть, основной вклад в величину скорости движения каждого вихря вносят ближайшие к нему вихри. В случае их достаточно близкого расположения большую долю в величину скорости будет вносить локальная ошибка дискретизации по пространству, которая и является ошибкой входных данных для задачи Коши.

Именно поэтому, при выборе метода интегрирования для решения задачи Коши для системы дискретных вихрей, моделирующих вихревую поверхность, порядок метода не имеет определяющего значения. Приемлемость применения многошаговых методов определяется весовыми коэффициентами при скоростях на различных шагах по времени: в случае, если есть коэффициенты больше единицы, то метод не следует использовать, так как он будет увеличивать ошибку входных данных (локальную ошибку дискретизации по пространству), величина которой может на один - четыре порядка превышать ошибку метода интегрирования. Для достижения наибольшей точности моделирования вихревой поверхности системой дискретных вихрей необходимо применять двушаговый метод интегрирования с весовыми коэффициентами, равными 0.5, что и было предложено в УМДВ, взамен метода Эйлера в МДВ.

МДВ традиционно применяется для моделирования течений идеальной несжимаемой жидкости, несмотря на то, что поле скорости от вихревой нити может существовать и в вязкой среде. Для учета диффузии можно использовать автомодельное решение обобщенного уравнения Гельмгольца для случая диффузии вихревой нити [4]. Однако, вследствие нелинейности этого уравнения, суперпозиция частных решений может не являться его общим решением, что сразу делает задачу некорректной. С другой стороны, известно,

что вязкость оказывает демпфирующее влияние на характеристики течения и, соответственно, регулирует решение задачи Коши для эволюции завихренности. В [2] было показано, что в случае УМДВ учет вязкости приводит к тому, что суммарная погрешность численного решения за счет неаддитивности гораздо меньше суммарного выигрыша от уменьшения локальных ошибок дискретизации по времени и пространству.

## 2. Постановка задачи о колебаниях крыла в вязкой среде с ограниченным решением на кромках

### 2.1 Физическая постановка задачи

Будем предполагать среду  $D$  сплошной, несжимаемой и невесомой (отсутствуют внешние объемные силы). В начальный момент времени во всех точках среды предполагается отсутствие вихрей, а сама среда – неподвижной.

Пусть крыло  $S$  является бесконечно тонким, непроницаемым, нерастяжимым, прямолинейным и имеет бесконечное удлинение. Такое крыло в общем случае может двигаться с тремя степенями свободы: совершать поступательные перемещения вдоль двух декартовых осей координат и вращение вокруг некоторой оси. При произвольном движении крыла с его обеих кромок будут сходиться (отрываться) слои потока. Поэтому мы будем предполагать выполнение постулата Кутта-Жуковского-Чаплыгина о конечности скорости потока в окрестности обеих кромок крыла, что приводит решение в класс задач с ограниченным решением на кромках крыла.

В общем случае, эпюры скоростей потока в поперечных сечениях указанных слоев будут несимметричными. Это означает, что движение носит там вращательный характер, то есть, является вихревым. Будем считать вихревые слои бесконечно тонкими. Таким образом, с кромок движущегося крыла  $S$ , которое заменим присоединенным вихревым слоем, будут сходиться вихревые пелены  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , точки которых будут двигаться по траекториям жидких частиц (поэтому будем называть их свободными). Нормальные компоненты скорости при переходе через них не меняются, а касательные будут терпеть разрыв  $\gamma$ :

$$\vec{n}(\vec{r}_0, t) \times (\vec{W}_-(\vec{r}_0, t) - \vec{W}_+(\vec{r}_0, t)) = \vec{\gamma}(\vec{r}_0, t) \quad \vec{r}_0 \in S \cup \sigma, \quad (2.1)$$

где  $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ .

Отметим, что  $\gamma$  имеет физический смысл погонной вихревой интенсивности, или плотности вихревого слоя.

Так как среда вязкая, то циркуляция скорости по жидким контурам не будет сохраняться, что обусловлено тем, что завихренность уже не будет сосредоточена все время в свободных вихревых пеленах, а будет распространяться относительно среды с течением времени с некоторой волновой скоростью диффузии  $\vec{V}_d$ .

Дисперсия завихренности в несжимаемой вязкой среде описывается обобщенным уравнением Гельмгольца, которое в двумерном случае имеет вид:

$$\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial t} + W_x \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial x} + W_y \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial y^2} \right), \quad (2.2)$$

$$\text{где } \vec{\Omega} = \left( \frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Для случая изолированной прямолинейной вихревой нити уравнение (2.2) имеет автомодельное решение [4]:

$$\vec{\Omega} = \frac{\vec{\Gamma}_0}{4\pi vt} \exp\left(-\frac{\vec{r}^2}{4vt}\right). \quad (2.3)$$

Оно справедливо для  $t > 0$ , то есть сразу после того, как изъяли источник завихренности, во всем объеме вязкой среды мгновенно возникло указанное распределение завихренности, ядро которого начало диффундировать (расплываться) относительно частиц среды в радиальном направлении с волновой скоростью  $\vec{V}_d$ :

$$\vec{V}_d = -v \frac{\nabla \Omega}{\Omega} = \frac{\vec{r}}{2t}. \quad (2.4)$$

Выражение (2.4) следует из уравнения (2.2), если его слегка преобразовать:

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \left( \left( \vec{W} - v \frac{\nabla \Omega}{\Omega} \right) \cdot \nabla \right) \vec{\Omega} = 0. \quad (2.5)$$

Анализируя решение, можно видеть, что произвольной последовательности фиксированных окружностей с радиусами  $\vec{r}_{m1} < \vec{r}_{m2} < \vec{r}_{m3} \dots$  соответствует последовательность моментов времени  $t_{m1} < t_{m2} < t_{m3} \dots$  таких, что для каждого  $\vec{r}_{mi}$  в момент времени  $t_{mi} = \vec{r}_{mi}^2 / (4v)$  завихренность в точках этих окружностей достигает своего максимума, причем  $\Omega_{m1} > \Omega_{m2} > \Omega_{m3} \dots$ . Таким образом, времена  $t_{mi}$  - это последовательные времена прохождения максимума (ядра) расплывающейся завихренности с волновой скоростью:

$$r_m = \left( \frac{v}{t_m} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2v}{r_m}. \quad (2.6)$$

С другой стороны, согласно (2.4):

$$\vec{V}_d = \frac{\vec{r}_m}{2t_m} = \frac{2v\vec{r}_m}{\vec{r}_m^2}. \quad (2.7)$$

Следовательно  $\vec{V}_d = \vec{r}_m$ .

Теперь покажем, что циркуляция скорости по окружностям с радиусами  $\vec{r}_m = \vec{r}_m(t_m)$  (то есть, по контурам  $C_m$ , расширяющимся с волновой скоростью диффузии  $\vec{V}_d$  относительно среды), не меняется с течением времени.

Учитывая, что при этом  $4vt_m = \vec{r}_m^2$ , имеем:

$$\vec{\Gamma}_m = \vec{k} \oint_{C_m} \vec{V}_m \cdot \delta \vec{r}_m = 2\pi \vec{r}_m \times \vec{V}_m = 2\pi \vec{r}_m \times \frac{\vec{\Gamma}_0 \times \vec{r}_m}{2\pi \vec{r}_m^2} \left( 1 - \exp\left(-\frac{\vec{r}_m^2}{4vt_m}\right) \right) = \vec{\Gamma}_0 (1 - e^{-1}). \quad (2.8)$$

Таким образом, циркуляция скорости по указанным контурам, а следовательно, и суммарная завихренность в пределах своего ядра  $\vec{r} = \vec{r}_m$ , которое распространяется относительно вязкой среды с радиальной волновой

скоростью диффузии  $\vec{V}_d = r_m \vec{e}_r$ , действительно сохраняются.

Распределение скорости, соответствующее автомодельному распределению завихренности (2.3), имеет вид [4]:

$$\vec{W} = \frac{\vec{\Gamma}_0 \times \vec{r}}{2\pi r^2} \left( 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \right). \quad (2.9)$$

Поле скорости (2.9), а также суперпозиция полей скорости от любого конечного числа прямолинейных вихревых нитей будет точно удовлетворять уравнению неразрывности:

$$\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} = 0. \quad (2.10)$$

Кроме того, поля (2.3) и (2.9) для любого момента времени точно удовлетворяют уравнению дисперсии завихренности (2.2) в центрах вихревых нитей, а также на бесконечном удалении от них. В остальных точках суперпозиция полей скорости от конечного числа прямолинейных вихревых нитей, а также соответствующих полей завихренности будут удовлетворять уравнению дисперсии завихренности (2.2) приближенно.

## 2.2 Формулировка начально-краевой задачи

Сформулируем начально-краевую задачу для нахождения общего решения обобщенного уравнения Гельмгольца (2.2) в случае отрывных колебаний крыла.

Вместо условия прилипания для данного класса задач достаточно задавать условие непроницаемости крыла  $S$ , пренебрегая эффектами трения [12]:

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} \vec{W}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n}(\vec{r}_0(t)) = \vec{W}^*(\vec{r}_0(t)) \cdot \vec{n}(\vec{r}_0(t)), \quad \forall t, \vec{r}_0 \in S \setminus (\vec{r}_1 \cup \vec{r}_2), \vec{r} \in D, \quad (2.11)$$

где  $\vec{W}^*$  - вектор скорости точек крыла;  $\vec{r}_1$  - радиус-вектор передней кромки крыла;  $\vec{r}_2$  - радиус-вектор задней кромки крыла;  $\vec{n}$  - вектор нормали к крылу.

Условие движения вихревых пелен  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  по траекториям жидких частиц:

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} \vec{W}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n}(\vec{r}_0(t, \tilde{t})) = \vec{W}(\vec{r}_0(t, \tilde{t}), t) \cdot \vec{n}(\vec{r}_0(t, \tilde{t})), \quad t \geq \tilde{t}, \vec{r}_0 \in \sigma, \vec{r} \in D, \quad (2.12)$$

где  $\vec{W}$  - вектор скорости точек вихревых пелен;  $\vec{n}$  - вектор нормали к вихревым пеленам  $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ ;  $\tilde{t}$  - время, при котором  $\vec{r}_0 = \vec{r}_k$ ,  $k = 1, 2$ .

Условие затухания возмущений на бесконечном удалении от крыла и вихревых пелен:

$$\lim_{\vec{r} - \vec{r}_0 \rightarrow \infty} \vec{W}(\vec{r}, t) = 0, \quad \forall t, \vec{r} \in D, \vec{r}_0 \in S \cup \sigma. \quad (2.13)$$

Условие существования решения внешней краевой задачи (2.11)-(2.13) для уравнения (2.2) следует из закона сохранения массы внутри границы  $S$  (в общем случае - произвольной замкнутой), что в плоском случае для

несжимаемой среды эквивалентно сохранению площади внутри непроницаемого контура  $S$ , или нулевому балансу потока через поверхность крыла:

$$\oint_S \vec{W}^*(\vec{r}_0, t) \cdot \vec{n}(\vec{r}_0(t)) ds = 0, \quad \forall t, \quad \vec{r}_0 \in S. \quad (2.14)$$

В силу принятых ограничений, это условие будет выполняться для любого момента времени, то есть существование решения краевой задачи (2.11)-(2.13) для уравнения (2.2) обеспечено.

Так как в плоском случае область  $D$  является двусвязной, циркуляция скорости по замкнутому контуру  $C$ , охватывающему границу  $S \cup \sigma$ , в общем случае может быть отлична от нуля. Без ограничения общности, в качестве контура  $C$  можно взять бесконечно удаленный контур, циркуляция по которому будет постоянной, в соответствии с (2.8). Отсюда приходим к следующему условию обеспечения единственности решения поставленной задачи:

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \infty} \oint_C \vec{W}(\vec{r}, t) \cdot \delta \vec{r} = const, \quad \forall t, \quad \vec{r} \in C \in D. \quad (2.15)$$

В процессе решения будем полагать  $const = 0$ .

Задача Коши для нахождения формы свободной вихревой пелены  $\sigma$  в произвольный момент времени  $t$ :

$$\begin{cases} \vec{r}_0(t, \tilde{t}) = \vec{r}_k(\tilde{t}), & t = \tilde{t}, \quad k = 1, 2, \\ \frac{d\vec{r}_0(t, \tilde{t})}{dt} = \vec{W}(\vec{r}_0(t, \tilde{t}), t), & t > \tilde{t}, \end{cases} \quad (2.16)$$

где  $\vec{r}_0 \in \sigma$ .

Для внешней начально-краевой задачи (2.2), (2.11)-(2.16) начальным условием будет известное положение крыла и отсутствие вихревых пелен в момент  $t = 0$ :

$$S \cup \sigma = S, \quad t = 0. \quad (2.17)$$

Скорости точек свободных вихревых пелен, входящие в уравнения (2.12) и (2.16), являются функционалами от всех предшествующих положений границ  $S$  и  $\sigma$ , причем форму вихревых пелен  $\sigma$  необходимо находить в процессе решения задачи. Поэтому внешняя начально-краевая задача (2.2), (2.11)-(2.17) является нелинейной.

### 2.3 Определение динамических характеристик при помощи обобщенной формулы Коши-Лагранжа

После решения кинематической задачи (2.2), (2.11)-(2.17), используя обобщенную формулу Коши-Лагранжа [5,6], можно определить поле давления вокруг крыла, колеблющегося по произвольному закону в вязкой несжимаемой среде, и его динамические характеристики.

Впервые формула для определения коэффициента давления в смешанной потенциально-вихревой области течения идеальной несжимаемой жидкости в неинерциальной системе координат была получена в работе [5]. Через несколько лет в работе [6] была получена практически та же самая формула, что и в работе [5], однако в более универсальном виде, который позволял рассчитывать поля

давления вне группы тел произвольной формы. Позже в работе [7] было показано, что эта формула справедлива и для вязких течений.

Приведем ее в интегральной безразмерной форме для случая, когда скорость потока на бесконечности равна нулю, а положительный обход циркуляции – по часовой стрелке:

$$C_p(\vec{r}, \tau) = 2 \left( \int_{S \cup \sigma} \frac{d\vec{r}_0}{d\tau} \cdot \vec{w}(\vec{r}, \vec{r}_0, \tau) d\vec{r}_0 + \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial' \Gamma(\vec{r}_0, \tau)}{\partial \tau} \alpha(\vec{r}, \vec{r}_0, \vec{r}^*) d\vec{r}_0 \right) - \vec{W}^2(\vec{r}, \tau), \quad (2.18)$$

где  $\tau$  - безразмерное время;  $\vec{w}$  - скорость, индуцированная вихревым элементом в расчетной точке;  $\Gamma$  - циркуляция вихревого элемента;  $\alpha$  - угол, под которым видна из точки  $\vec{r}$  линия, соединяющая точки  $\vec{r}_0$  и произвольную точку  $\vec{r}^*$ , такую, что  $\vec{r}_0 - \vec{r}^* \in S$  [6]. Штрих означает, что дифференцирование совершается в системе координат, связанной с подвижным крылом.

Отметим, что данная формула справедлива с точностью до константы, согласно условию (2.15) обеспечения единственности решения задачи и соответствует случаю, когда суммарная циркуляция вихревого течения нулевая.

Применим формулу (2.18) к нижней и верхней поверхностям крыла, учитывая, что абсолютная скорость  $\vec{W}$  есть сумма переносной  $\vec{W}^*$  и относительной  $\vec{W}_r$ , принимая во внимание соотношение (2.1), взаимосвязь:

$$(\vec{W}_{m-}(\vec{r}_0, t) + \vec{W}_{m+}(\vec{r}_0, t)) / 2 = \vec{W}(\vec{r}_0, t), \quad \vec{r}_0 \in S \cup \sigma, \quad (2.19)$$

а также то, что при обходе контура крыла от  $\vec{r}_{0-}$  до  $\vec{r}_{0+}$ ,  $\Delta\alpha = 2\pi$ .

В итоге получим выражение для перепада коэффициента давления на крыле, которое полностью совпадает с аналогичным выражением для случая идеальной среды, потенциальной вне вихревых поверхностей:

$$\Delta C_p(\vec{r}, \tau) = 2 \left( (\vec{\gamma}(\vec{r}, \tau) \times \vec{n}(\vec{r}, \tau)) \cdot \left( \vec{W}(\vec{r}, \tau) - \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial'}{\partial \tau} \left( \int_{\sigma_1}^{\vec{r}} + \int_{\vec{n}} \Gamma_L(\vec{r}_0, \tau) d\vec{r}_0 \right) \right), \quad (2.20)$$

где  $\vec{n}$  - вектор нормали к крылу;  $\Gamma_L$  - циркуляция по контуру, охватывающему вихревую пелену  $\sigma_1$  и часть крыла до расчетной точки, а также всю область вязкого течения  $D$  в предположении, что вихревая пелена  $\sigma_2$  отсутствует (это позволит учесть все поле завихренности от пелены  $\sigma_1$  без суперпозиции с полем от пелены  $\sigma_2$ , в соответствии с автомодельным решением (2.3)).

Для коэффициента нормальной силы будем иметь:

$$C_N(\tau) = \int_S \Delta C_p(\vec{r}, \tau) dr. \quad (2.21)$$

### 3. Сведение задачи к сингулярным интегральным уравнениям для ее решения при помощи УМДВ

Закон дальнего действия для индуцированного поля конвективной окружной скорости от прямолинейной вихревой нити в вязкой среде (2.9) отличается от закона Био-Савара множителем для циркуляции:

$$\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_0 \left( 1 - \exp \left( -\frac{\vec{r}^2}{4\nu t} \right) \right), \quad (3.1)$$

который обеспечивает ее уменьшение с течением времени вследствие диффузионного растекания ядра завихренности с радиальной волновой скоростью  $\vec{V}_d$  (2.4), (2.7) по заранее известному закону.

Данное обстоятельство, в совокупности с доказанным ранее свойством сохранения циркуляции (2.8) по контурам, расширяющимся с волновой скоростью диффузии (а, следовательно, и по бесконечно удаленному контуру), позволяет свести начально-краевую задачу (2.11)-(2.17) для вихревого течения вязкой несжимаемой среды, описываемого обобщенным уравнением Гельмгольца (2.2), к системе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с начальными данными для плотности вихревого слоя  $\gamma$  (2.1), непрерывно распределенного по границам  $S$  и  $\sigma$ , в классе функций, ограниченных на концах интервала.

В соответствии со свойствами вихревого слоя (2.1), (2.19) (аналогам формул Сохоцкого-Племеля) и известным частным решением (2.9) уравнения (2.2), одновременно являющимся фундаментальным решением уравнения (2.10), непрерывное распределение плотности вихревого слоя по контуру крыла  $S$  и по контуру свободных вихревых пелен  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  приведет к следующим предельным интегральным выражениям для скорости на границах:

$$\begin{aligned} \vec{W}_{\pm}(\vec{r}_0(t), t) = & \frac{1}{2\pi} \int_S \gamma(\vec{r}(t), t) \frac{(r_{0y}(t) - r_y(t))\vec{i} - (r_{0x}(t) - r_x(t))\vec{j}}{(\vec{r}_0(t) - \vec{r}(t))^2} dr \pm \frac{1}{2} \bar{m}(\vec{r}_0(t)) \gamma(\vec{r}_0(t), t) + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \gamma(\vec{r}(t, \tilde{t})) \frac{(r_{0y}(t) - r_y(t, \tilde{t}))\vec{i} - (r_{0x}(t) - r_x(t, \tilde{t}))\vec{j}}{(\vec{r}_0(t) - \vec{r}(t, \tilde{t}))^2} \left( 1 - \exp\left(-\frac{(\vec{r}_0(t) - \vec{r}(t, \tilde{t}))^2}{4\nu(t - \tilde{t})}\right) \right) dr, \end{aligned} \quad \vec{r}_0 \in S, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \vec{W}_{\pm}(\vec{r}_0(t, \tilde{t}), t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \gamma(\vec{r}(t, \tilde{t})) \frac{(r_{0y}(t, \tilde{t}) - r_y(t, \tilde{t}))\vec{i} - (r_{0x}(t, \tilde{t}) - r_x(t, \tilde{t}))\vec{j}}{(\vec{r}_0(t, \tilde{t}) - \vec{r}(t, \tilde{t}))^2} \times \\ & \times \left( 1 - \exp\left(-\frac{(\vec{r}_0(t, \tilde{t}) - \vec{r}(t, \tilde{t}))^2}{4\nu(t - \tilde{t})}\right) \right) dr + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_S \gamma(\vec{r}(t), t) \frac{(r_{0y}(t, \tilde{t}) - r_y(t))\vec{i} - (r_{0x}(t, \tilde{t}) - r_x(t))\vec{j}}{(\vec{r}_0(t, \tilde{t}) - \vec{r}(t))^2} dr \pm \\ & \pm \frac{1}{2} \bar{m}(\vec{r}_0(t, \tilde{t})) \gamma(\vec{r}_0(t, \tilde{t})), \end{aligned} \quad \vec{r}_0 \in \sigma. \quad (3.3)$$

Из (3.2), с учетом (2.19), легко получить выражение для скорости в присоединенном вихревом слое крыла  $S$ . Подстановка его в условие непроницаемости крыла (2.11) даст следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$\frac{1}{2\pi} \int_S \gamma(\vec{r}(t), t) \frac{(r_{0y}(t) - r_y(t))n_x(\vec{r}_0(t)) - (r_{0x}(t) - r_x(t))n_y(\vec{r}_0(t))}{(\vec{r}_0(t) - \vec{r}(t))^2} dr = \vec{W}^*(\vec{r}_0(t)) \cdot \vec{n}(\vec{r}_0(t)) -$$



$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \gamma(\vec{r}(t, \tilde{t})) \frac{(r_{0y}(t) - r_y(t, \tilde{t}))n_x(\vec{r}_0(t)) - (r_{0x}(t) - r_x(t, \tilde{t}))n_y(\vec{r}_0(t))}{(\vec{r}_0(t) - \vec{r}(t, \tilde{t}))^2} \times \\
& \quad \times \left( 1 - \exp\left(-\frac{(\vec{r}_0(t) - \vec{r}(t, \tilde{t}))^2}{4\nu(t - \tilde{t})}\right) \right) dr, \quad \vec{r}_0 \in S \setminus (\vec{r}_1 \cup \vec{r}_2). \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Сингулярные интегралы в выражениях (3.2)-(3.4) понимаются в смысле главного значения Коши. Положительный обход циркуляции принят по часовой стрелке.

Условие единственности решения сингулярного интегрального уравнения (3.4) совпадает с условием единственности решения внешней начально-краевой задачи (2.2), (2.11)-(2.17). Из (3.2), (3.3) и (2.19) можно получить выражение для скорости в пространстве  $D$ . Подставив его в условие единственности (2.15), будем иметь:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\tilde{t}_0 \rightarrow \infty} \left\{ \int_S \gamma(\vec{r}(t), t) \frac{(r_{0y} - r_y(t))\vec{i} - (r_{0x} - r_x(t))\vec{j}}{(\vec{r}_0 - \vec{r}(t))^2} dr + \right. \\
& \quad + \int_{\sigma} \gamma(\vec{r}(t, \tilde{t})) \frac{(r_{0y} - r_y(t, \tilde{t}))\vec{i} - (r_{0x} - r_x(t, \tilde{t}))\vec{j}}{(\vec{r}_0 - \vec{r}(t, \tilde{t}))^2} \times \\
& \quad \left. \times \left( 1 - \exp\left(-\frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}(t, \tilde{t}))^2}{4\nu(t - \tilde{t})}\right) \right) dr \right\} \cdot \delta\vec{r}_0 = 0, \quad \forall t, \vec{r}_0 \in C \in D. \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Получив из (3.3) и (2.19) выражения для скоростей в свободных вихревых слоях  $\sigma$ , запишем задачу Коши (2.16)-(2.17) в интегро-дифференциальном виде:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \vec{r}_0(t, \tilde{t}) = \vec{r}_k(\tilde{t}), \quad t = \tilde{t}, \quad \vec{r}_0 \in \sigma, \quad k = 1, 2, \\
& \frac{d\vec{r}_0(t, \tilde{t})}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_S \gamma(\vec{r}(t), t) \frac{(r_{0y}(t, \tilde{t}) - r_y(t))\vec{i} - (r_{0x}(t, \tilde{t}) - r_x(t))\vec{j}}{(\vec{r}_0(t, \tilde{t}) - \vec{r}(t))^2} dr + \\
& \quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \gamma(\vec{r}(t, \tilde{t})) \frac{(r_{0y}(t, \tilde{t}) - r_y(t, \tilde{t}))\vec{i} - (r_{0x}(t, \tilde{t}) - r_x(t, \tilde{t}))\vec{j}}{(\vec{r}_0(t, \tilde{t}) - \vec{r}(t, \tilde{t}))^2} \times \\
& \quad \times \left( 1 - \exp\left(-\frac{(\vec{r}_0(t, \tilde{t}) - \vec{r}(t, \tilde{t}))^2}{4\nu(t - \tilde{t})}\right) \right) dr, \quad t > \tilde{t}, \quad \vec{r}_0 \in \sigma.
\end{aligned} \right. \tag{3.6}$$

Решая совместно систему сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (3.4)-(3.6) с начальными данными (2.17) в классе функций, ограниченных на концах интервала, можно найти распределение плотности вихревого слоя, заменяющего крыло  $S$ , а также плотности вихревого слоя, заменяющего свободные вихревые пелены  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , для каждого момента времени, что дает возможность найти поле течения во всей области  $D$ .

Решение будем осуществлять лагранжевым усовершенствованным методом дискретных вихрей [1].

#### 4. Результаты сравнительных исследований и их обсуждение

Предложенная математическая модель вихревого течения вязкой несжимаемой среды вокруг крыла, колеблющегося по произвольному закону, вначале была апробирована для частного случая – отрывного обтекания пластины под различными углами атаки. Полученные значения нормальной силы оказались в пределах погрешности эксперимента для всего диапазона чисел Рейнольдса для всех закрытых углов атаки [2].

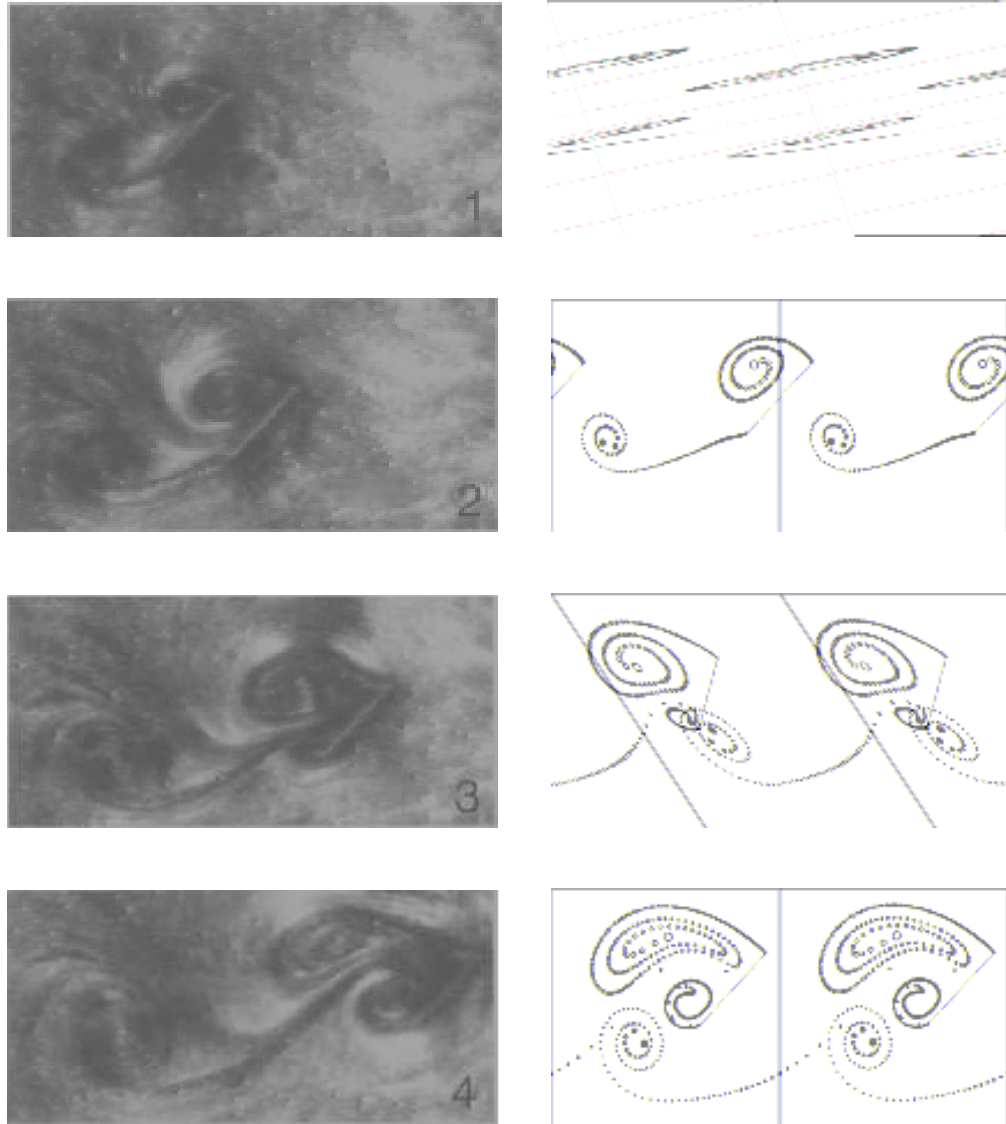


Рис. 1,а

Рис. 1,б

К примеру, для случая перпендикулярного обтекания пластины потоком, теоретическая аппроксимационная кривая оказалась близкой к

экспериментальной аппроксимационной зависимости нормальной силы от числа Рейнольдса [8]:

$$C_N = 1,95 + 50/Re \quad (4.1)$$

в то время как МДВ для этого режима завышает значения нормальной силы на 25% [9].

На рис.1 представлено сравнение с экспериментом Дикинсона и Готца – четыре последовательные картины визуализации вихревого следа (дорожки Кармана) за пластиной удлинения  $\lambda = 3$  для безразмерного времени  $\tau = 1; 2; 3; 4$ . Число Рейнольдса –  $Re = 192$ , угол атаки –  $\alpha = 45^\circ$ . Скорость горизонтального старта пластины – по линейному закону, который в безразмерной форме имеет вид [10]:

$$u(\tau) = \begin{cases} 3,125\tau, & 0 \leq \tau \leq 0,32, \\ 1, & \tau > 0,32. \end{cases} \quad (4.2)$$

Наблюдается хорошее соответствие между экспериментом и расчетом при помощи УМДВ. Поведение коэффициентов мгновенной подъемной силы и силы сопротивления показано на рис. 2. Большие кружки – эксперимент [10],

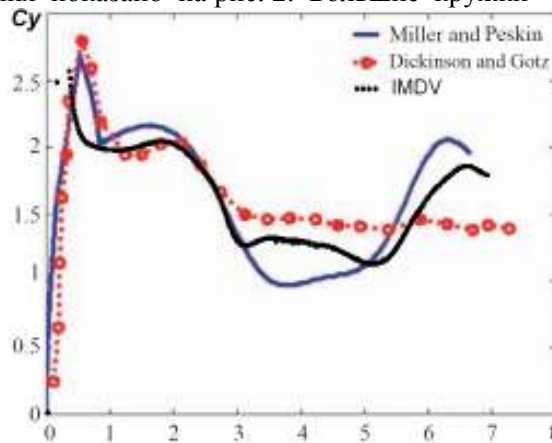


Рис.2,а

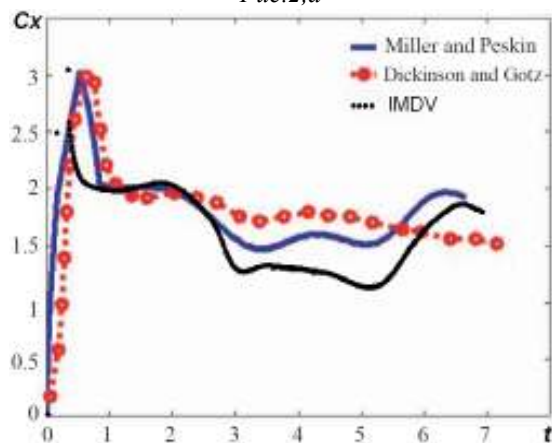


Рис.2,б

сплошная кривая – решение двумерных уравнений Навье-Стокса лагранжевым методом с учетом деформаций пластины (Миллер, Пескин [11]), точки – УМДВ. Видно, что обе теоретические кривые удовлетворительно соответствуют экспериментальной кривой примерно с одинаковым отклонением.

Отличие объясняется тем, что в эксперименте пластина имела недостаточно большое удлинение, что создавало условия для частичного перетекания завихренности через ее торцы. В двумерном случае условия для формирования дорожки Кармана сразу после старта лучше.

На рис.3 показаны коэффициенты силы сопротивления (кривые 1) и подъемной силы (кривые 2) пластины бесконечного удлинения для различных углов атаки через  $\tau=1$  после мгновенного старта, рассчитанные на основе

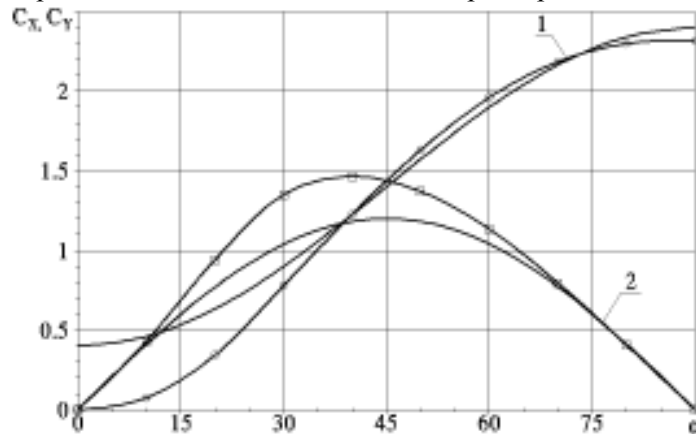


Рис.3

УМДВ (кривые с маркерами) и двумерного эйлерового метода решения уравнений Навье-Стокса (кривые без маркеров) при  $Re = 75$  [12]. Максимумы этих (и аналогичных экспериментальных) кривых использовались в работе [12] для нормировки соответствующих мгновенных характеристик пластины, колеблющейся в покоящейся среде. Ниже представлено сопоставление с результатами указанной работы.

На рис.4-6 демонстрируется сравнение с экспериментом Дикинсона и Беча, а также двумерным расчетом Вонг (эйлеров подход решения уравнений Навье-Стокса) [12]. В эксперименте пластина удлинения  $\lambda=3$  совершала вращательно-поступательные колебания в отрывном режиме при  $Re = 75$  по законам:

$$\begin{aligned} x(\tau) &= a \cos(2\pi f\tau) \\ \beta(\tau) &= \beta_0 + \theta \sin(2\pi f\tau + \varphi), \end{aligned} \quad (4.3)$$

причем вращение происходило вокруг середины хорды пластины.

Законы (4.3) записаны в безразмерном виде: за характерный размер принята хорда пластины, за характерную скорость – максимальная поступательная скорость, то есть  $2\pi fa = 1$ .

Величина линейной амплитуды колебаний составляла  $a = 1,4$ ; угловой –  $\theta = \pi/4$ ; начального угла установки пластины –  $\beta_0 = \pi/2$ ; период колебаний –  $T = 1/f = 8,8$ . Сдвиг фазы вращательных колебаний относительно поступательных  $\varphi$  варьировался и был равен:  $\varphi = \pi/4$  (рис.4);  $\varphi = 0$  (рис.5);  $\varphi = -\pi/4$  (рис.6).

Коэффициент сопротивления умножался на знак относительной невозмущенной продольной скорости. Безразмерное время приведено к периоду колебаний. На рисунках 4-6 кривые 1 – эксперимент; кривые 2 – расчет; точки – УМДВ.

На диаграммах векторами показаны мгновенные экспериментальные значения сил на колеблющемся крыле, передняя кромка помечена кружком.

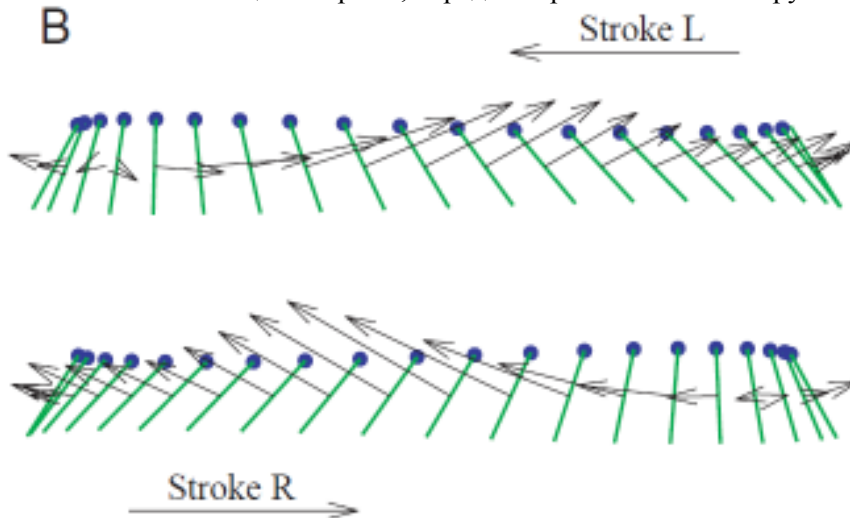


Рис4,а

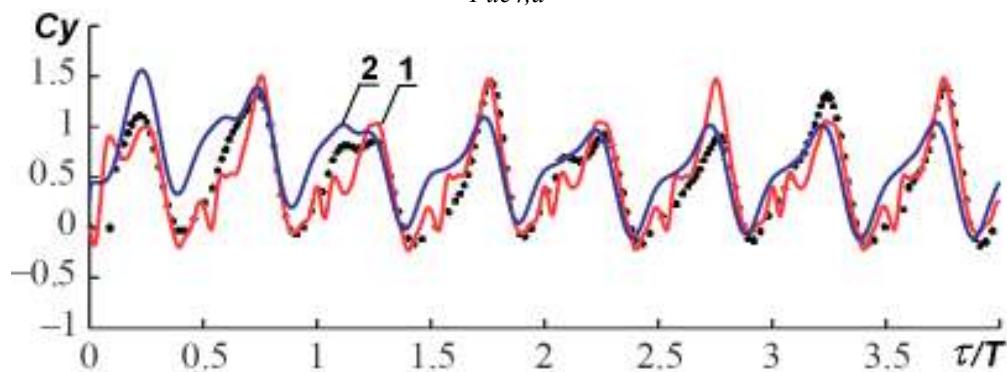


Рис4,б

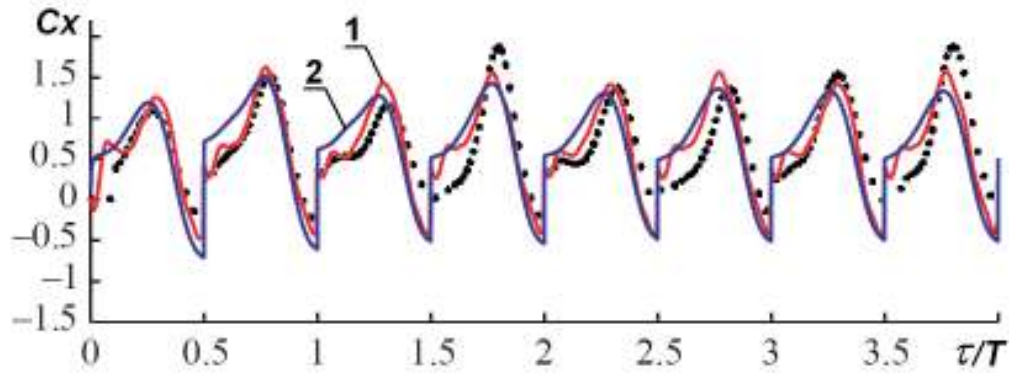


Рис4,в

В крайних положеннях пластина стартует под углом атаки  $\alpha = \pi/4$ .

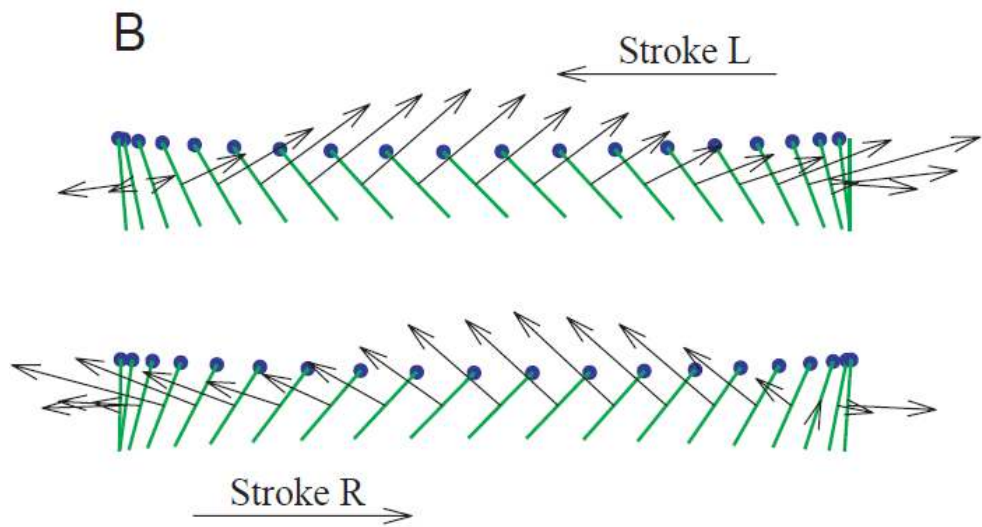


Рис5,а

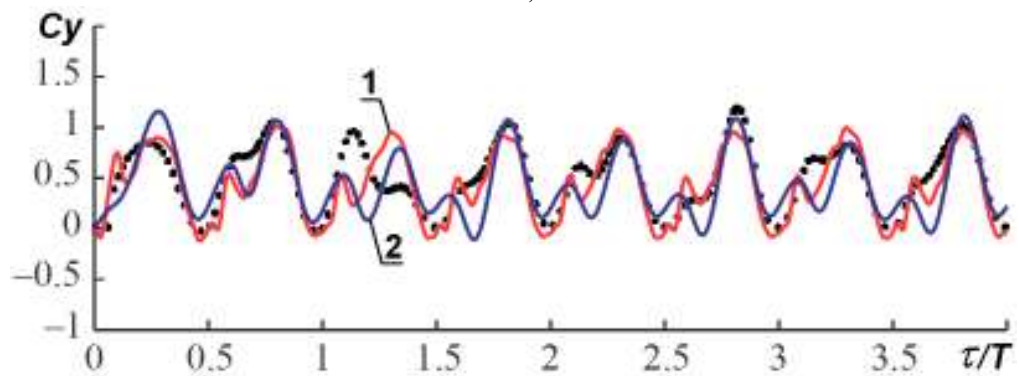


Рис5,б

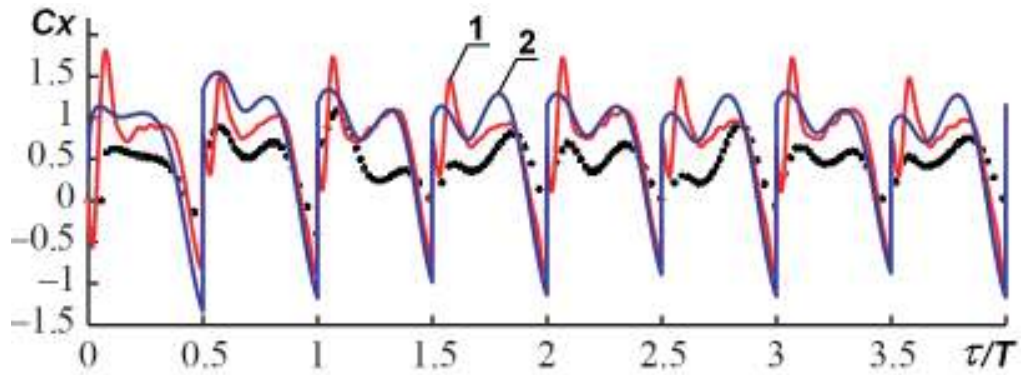


Рис.5,в

В крайних положениях пластина стартует под углом атаки  $\alpha = \pi/2$ .

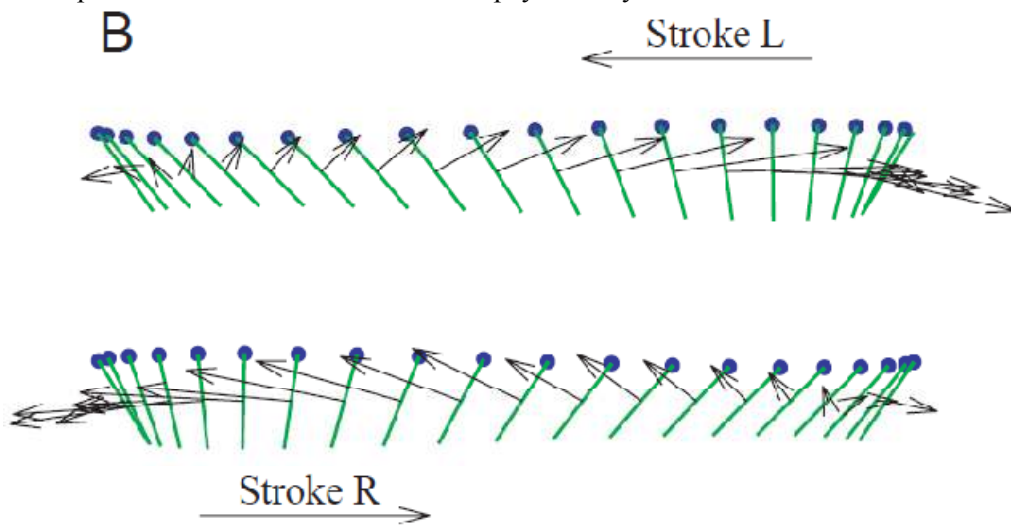


Рис.6,а

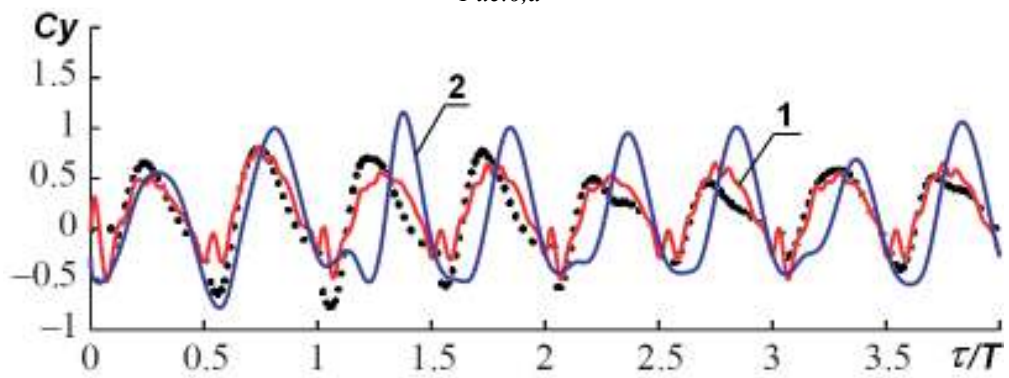


Рис.6,б

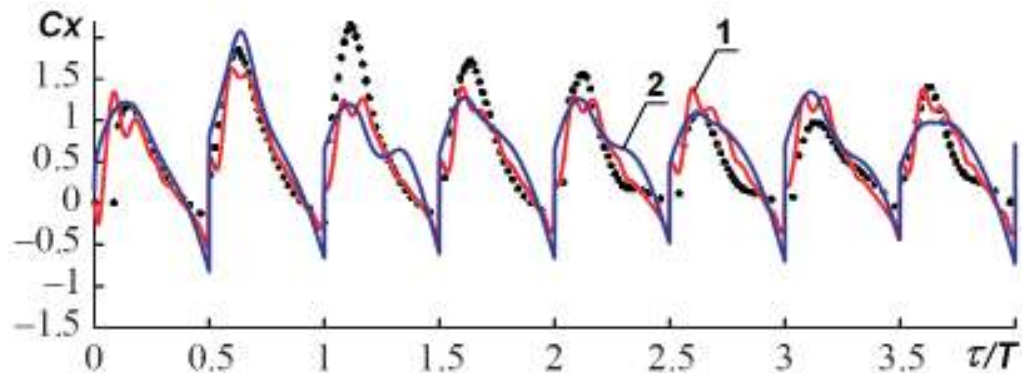


Рис.6,в

В крайних положениях пластина стартует под углом атаки  $\alpha = 3\pi/4$ .

Видно, что сила трения достаточно мала (на 1-2 порядка меньше силы давления потока), чтобы ею можно было пренебречь в расчетах [12].

Как видно из рисунков 4-6, получено удовлетворительное согласование с экспериментом мгновенных и осредненных аэродинамических характеристик колеблющейся пластины в вязкой среде, причем расчет на основе лагранжевого УМДВ лучше, чем на основе эйлерового подхода решения уравнений Навье-Стокса: сеточный метод Вонг дает фазовый сдвиг  $C_u$  относительно экспериментальной кривой в случае  $\varphi = -\pi/4$  (см. рис 6,б). При этом расчетное время при использовании УМДВ в сотни раз меньше расчетного времени при использовании эйлеровых или лагранжево-эйлеровых сеточных методов.

### 5. Заключение

Апробация УМДВ, обобщенного на случай вязких вихревых течений несжимаемой среды, в классе задач об отрывных колебаниях тонкого крыла в неподвижной среде, показала удовлетворительное соответствие с экспериментальными и теоретическими данными других численных методов, как по осредненным, так и по мгновенным кинематическим и динамическим характеристикам течения и крыла. При этом никаких ограничений на числа Рейнольдса и углы атаки не накладывалось.

Для этого была построена математическая модель, позволяющая непосредственно использовать аналитическое автомодельное решение обобщенного уравнения Гельмгольца для случая диффузии прямолинейной вихревой нити в УМДВ.

Сформулированная внешняя начально-краевая задача для нахождения решения обобщенного уравнения Гельмгольца в случае отрывных колебаний крыла в вязкой несжимаемой среде была сведена к системе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с начальными данными для плотности вихревого слоя, непрерывно распределенного по границам, в классе функций, ограниченных на концах интервала, что позволило применить УМДВ.

Применение формулы Коши-Лагранжа, обобщенной для вихревых течений в вязких несжимаемых средах, для нахождения перепада давления на крыле



привело к выражению, совпадающему с аналогичным выражением для случая идеальной среды, потенциальной вне вихревых поверхностей.

Показано, что используемое решение для завихренности  $\Omega$ , обеспечивает:

- диффузию в радиальном направлении от каждого вихревого ядра с волновой скоростью  $\vec{V}_d = -v\nabla\Omega/\Omega$ ;
- сохранение циркуляции скорости  $\Gamma_m$  по контурам  $C_m$ , расширяющимся с волновой скоростью диффузии:  $\Gamma_m = \Gamma_0(1 - e^{-1})$ ;
- регуляризацию решения задачи Коши для эволюции завихренности в вязкой среде в случае применения УМДВ;
- удовлетворительное соответствие с экспериментальными данными, несмотря на некорректность задачи.

Полученные результаты подтвердили экспериментальный вывод, что силой трения на пластине в данном классе задач можно пренебрегать, а огромное преимущество в экономии расчетного времени позволяет говорить о перспективности предложенного метода моделирования вихревых течений вязкой среды не только для двумерных, но и для трехмерных нестационарных нелинейных задач гидроаэродинамики крыла, в частности, для изучения полета насекомых.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Довгий С.А., Шеховцов А.В. Усовершенствованный метод дискретных вихрей для нестационарных задач // Обчислювальна та прикладна математика. – 1997. – Вип. 2(82). – С. 30–44.
2. Шеховцов А.В. Решение некорректных задач гидроаэродинамики усовершенствованным методом дискретных вихрей // Комп'ютерна гідромеханіка. – ІГМ НАНУ. – Київ. – 2008. – С. 50–51.
3. Довгий С.А., Шеховцов А.В. Инерционно-вихревой принцип полета // Вісник Харківського нац. університету. – 2007. – № 775. Сер. "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління". Вип. 7. – С. 117–129.
4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. – 840с.
5. Шеховцов А.В. Метод расчета нестационарного поля давления в области завихренности при наличии подвижных границ // Деп. в ГНТБ Украины 06.07.95. – № 1693. – Ук95 (Анот. в РЖ МЖГ. – № 2. – 1996.) – 22с. (То же: Шеховцов А.В. Метод расчета нестационарного поля давления в смешанной потенциально-вихревой области, прилегающей к вращающемуся крылу // Прикладная гидромеханика. – 2000. – Том 2 (74), N1. – С. 79-87. То же: Shekhovtsov A.V. A Method for Evaluation of an Unsteady Pressure Field in a Mixed Potential-Vortical Domain Adjacent to the Rotating Wing International // International Journal of Fluid Mechanics Research. - 2002. - Vol. 29, N1. - P. 111-123.)
6. Дынникова Г.Я. Аналог интеграла Коши-Лагранжа для нестационарного вихревого течения идеальной несжимаемой жидкости. – М.: Изд-во ЦАГИ. Препринт № 117. – 1998. – 20с. (То же: Дынникова Г.Я. Аналог интегралов

- Бернуллі и Коши-Лагранжа для нестационарного вихревого течения идеальной несжимаемой жидкости // Изв. РАН МЖГ. – 2000, № 1. – С. 31–41.)
7. Дынникова Г.Я. Движение вихрей в двумерных течениях вязкой жидкости // Изв. РАН МЖГ. – 2003, № 5. – С. 11–19.
  8. Ellington, C. P. Aerodynamics and the origin of flight // *Adv. Insect Physiol.* – 1991. – Vol. 23. – P. 171–210.
  9. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. – М.: Наука, 1978. – 352с.
  10. Dickinson M.H., Götz K.G. Unsteady aerodynamic performance of model wings at low Reynolds numbers // *J. Exp. Biol.* – 1993. – Vol. 174. – P. 45–64.
  11. Miller L.A., Peskin Ch.S. When vortices stick: an aerodynamic transition in tiny insect flight // *J. Exp. Biol.* – 2004. – Vol. 207. – P. 3073–3088.
  12. Wang Z.J., Birch J.M., Dickinson M.H. Unsteady forces and flows in low Reynolds number hovering flight: two-dimensional computations vs robotic wing experiments // *J. Exp. Biol.* – 2004. – Vol. 207. – P. 449–460.

---

Надійшла у першій редакції 11.05.2009, в останній - 10.08.2009.

© Довгий С. А., Шеховцов А. В., 2009