УДК 519.853.7

Математическая модель и стратегия решения задачи покрытия выпуклого многогранного множества семейством прямых параллелепипедов

Е. С. Сосюрка

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАНУ, Украина

Размещение или взаимное расположение 3-D объектов в задачах покрытия имеет важное значение. Для поиска целесообразного решения следует надлежащим образом смоделировать взаимодействие всех пар размещаемых объектов. Для описания отношения покрываемого множества и семейства покрывающих параллелепипедов в аналитическом виде приведены утверждения о критерии покрытия, разбиении пространства параметров размещения покрывающих объектов. Построена математическая модель задачи. На основании свойств данной модели предложена стратегия решения задачи покрытия.

Ключевые слова: *3-D задача покрытия, параллелепипед, критерий покрытия, математическая модель, стратегия решения.*

Розміщення та взаємне розташування 3-D об'єктів у задачах покриття набуває важливого значення. Для пошуку доцільного розв'язку потрібно належним чином змоделювати взаємодію всіх пар об'єктів, що розміщуємо. Для опису взаємодії множини, що покривається, і сім'ї покриваючих паралелепіпедів в аналітичному виді наведені твердження про критерій покриття, розбиття простору параметрів розташування покриваючих об'єктів. Побудована математична модель задачі. На основі властивостей цієї моделі запропоновано стратегію розв'язку задачі покриття.

Ключові слова: *3-D задача покриття, паралелепіпед, критерій покриття, математична модель, стратегію розв'язку.*

Within the field of covering problems of the placement or mutual allocation of 3D objects is of great importance. In order to develop an efficient solution the interaction of all possible pairs of placed objects has to be modeled in a suitable manner. To describe the relation of the domain to be covered and a set of covering parallelepipeds in the analytical form statements about covering criterion, partition of the space of placement parameters of objects from the covering set are given. A mathematical model of the problem is constructed. On the basis of the properties of the given model the strategy of solving the covering problem is offered.

Keywords: *covering problem, mathematical modeling, linear programming, parallelepipeds, convex polytope,Г -function, Ф-function, covering criterion, art- gallery problem.*

1. Общая постановка задачи и её актуальность

Задачи покрытия имеют широкий спектр применения, например, в системах размещения аварийного оборудования, пожарной безопасности, административном делении районов, в системах воздушного и космического наблюдения. В робототехнике задачи покрытия представляются как задачи размещения датчиков при компьютерной визуализации. Также задачи покрытия возникают при создании систем технического зрения робота. В литературе задачи покрытия также известны как art-gallery problem: требующие разместить некоторое число "охранников" (датчиков) так, чтобы они покрыли любой многогранник, метафорически – внутреннюю часть картинной галереи. Задачи покрытия встречаются и в системах статического инспектирования и наблюдения несколькими видами сенсоров, таких как видеокамеры, датчики расстояний и т.п.

2. Истоки исследования авторов

Задачи покрытия имеются в большом количестве в литературе [10-14].

Большинство из этих работ требуют, чтобы покрывающие объекты были идентичными. Целью же является покрыть целевой объект (иногда объекты), минимизируя при этом область наложения покрывающих объектов. Было найдено решение такой задачи для случая выпуклых объектов, таких как круги, прямоугольники и многоугольники с некоторыми свойствами симметрии. Были получены некоторые результаты для покрытия кругов конгруэнтными кругами. Некоторые не Евклидовы задачи покрытия в основном касаются шаров. Известны несколько работ посвященных решению такой задачи: можно ли параллельно перенести заданный набор выпуклых объектов так, чтобы они покрыли заданное выпуклое множество. Результаты в этой области ограничены случаем дисков.

Анализ публикаций, посвященных решению задач покрытия, позволяет сделать следующие выводы. Большинство геометрических задач покрытия являются NP-полными. Одним из наименее изученных классов задач покрытия являются трехмерные задачи покрытия произвольных многогранных областей. Как правило, для решения задач этого класса используются эвристические методы, либо применяется достаточно грубая аппроксимация области. Разработка эффективных методов, дающих точное решение, требует построения адекватных математических моделей.

3. Постановка задачи и цели работы

Целью данной работы является построение конструктивных средств математического моделирования и разработка метода решения задачи покрытия выпуклого многогранника конечным семейством прямых параллелепипедов различного размера.

Рассматривается задача покрытия [1] в следующей постановке. Пусть задан выпуклый многогранник $\Omega(v) \subset R^3$ и семейство $\Lambda = \{P_i\}, i \in I = \{1,2,...,n\}$ прямых параллелепипедов

$$P_i = \{(x,y,z) \in R^3, -a_i \le x \le a_i, -b_i \le y \le b_i, -c_i \le z \le c_i\}, i \in I,$$

где R^3 - трехмерное арифметическое евклидово пространство.

Расположение Ω в пространстве однозначно определяется вектором трансляции $v \in R^3$. Полагаем, что $v = const$, а расположение P_i в пространстве R^3 определяется вектором $u_i = (x_i, y_i, z_i)$ (полагаем, что P_i не вращаются). Семейство транслированных параллелепипедов $P_i(u_i), i \in I$ обозначим $\Lambda(u)$, где $u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in R^{3n}$.

Семейство $\Lambda(u)$ является покрытием множества [2] Ω, если существует вектор $u \in R^{3n}$, такой что выполнено соотношение

$$\Omega \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{n} P_i(u_i) \right) = \Omega . \qquad (1)$$

Задача. Определить, существует ли такой вектор $u \in R^{3n}$, что выполняется условие (1).

4. Критерий покрытия области набором параллелепипедов

Пусть $u^0 = \left(u_1^0, u_2^0, ..., u_n^0\right) \in R^{3n}$ - фиксированный вектор, ему соответствует семейство $\Lambda(u^0) = \left\{P_i(u_i^0)\right\}, i \in I$. Объединение параллелепипедов этого семейства образует некоторое множество в R^3 вида: $P(u^0) = \bigcup_{i=1}^{n} P_i(u_i^0)$. Дополнение к $P(u^0)$ обозначим $H(u^0) = cl\left(R^3 \setminus P(u^0)\right)$, где $cl(\cdot)$ - замыкание множества $(\cdot)$ [3]. На основании двойственности теоретико-множественных операций: $H(u^0) = cl\left(R^3 \setminus \bigcup_{i=1}^{n} P_i(u_i^0) \right) = cl \bigcap_{i=1}^{n} \left(R^3 \setminus P_i(u_i^0)\right)$. Тогда условие (1) может быть записано в эквивалентном виде:

$$\Omega \bigcap H(u^0) = \varnothing . \qquad (2)$$

Одной из наиболее важных проблем при моделировании задач покрытия является конструктивное построение функции, которая описывала бы условие покрытия (1, 2) в аналитическом виде. Известно, что таким средством моделирования отношений пары геометрических объектов является Φ-функция [4]. В терминах Φ-функции соотношение (2) может быть описано неравенством:

$$\Phi\left(u^0, v\right) \geq 0 , \qquad (3)$$

где $\Phi\left(u^0, v\right)$ - Ф-функция множеств $H(u^0)$ и $\Omega(v)$ [5,6]. Неравенство (3) назовем критерием покрытия.

5. Построение Φ-функции для области покрытия и дополнения к объединению покрывающих параллелепипедов

Построим Ф-функцию для множеств $H(u^0)$ и $\Omega(v)$. Для этого рассмотрим подробно множество $H(u^0)$: оно может быть представлено в виде конечного объединения выпуклых множеств не более 33 видов, а именно: полупространств $C_i, i = 1,2,..,6$, двугранных углов $C_i, i = 7,8,..,18$, трехгранных углов $C_i, i = 19,20,..,26$, полубесконечных цилиндров $C_i, i = 27,28,..,32$ и параллелепипедов C_{33}. Тогда множество $H(u^0)$ представим в виде:

$$H(u^0) = \bigcup_{j=1}^{\lambda} C_{ij}(w_{ij}) , \qquad (4)$$

где $C_{ij} \in \left\{C_i, i = 1,2,..,33\right\}$, w_{ij} состоит из не более чем 6 соответствующих компонент вектора $u^0 = \left(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, .., x_n, y_n, z_n\right)$.

Теорема 1. *Пусть* $H(u^0) = cl\left(R^2 \setminus P(u^0)\right)$ *и* $\Phi_j(u,v)$ - Φ*-функция множеств* $C_{ij}(w_{ij})$ *и* $\Omega(v)$, $v = const$, $j \in I_\lambda = \{1,2,..,\lambda\}$, *тогда функция*

$$\Phi(u^0, v) = \min_{j \in I_\lambda} \Phi_j(u^0, v), \tag{5}$$

является Φ*-функцией множеств* $H(u^0)$ *и* $\Omega(v)$.

Для доказательства теоремы 1 используем определение Φ-функции [4] для двух произвольных объектов $T_1(u_1)$ и $T_2(u_2)$.

Поскольку для любого $v \in R^3$ $\Omega(v) \bigcap \operatorname{int} H(u^0) = \varnothing$, где $\operatorname{int}(\cdot)$ - внутренность множества $(\cdot)$ [3], если и только если $\Omega(v) \subset R^3 \setminus \operatorname{int} H(u^0) = R^3 \setminus \operatorname{int}\left(\bigcup_{j=1}^{\lambda} C_{ij}(w_{ij})\right) = \bigcap_{j=1}^{\lambda} R^3 \setminus \operatorname{int} C_{ij}(w_{ij})$, а значит, только при выполнении условий $\Phi_1(u^0,v) \geq 0$ *и* $\Phi_2(u^0,v) \geq 0$ *и* … *и* $\Phi_\lambda(u^0,v) \geq 0$, что эквивалентно $\min_{j \in I_\lambda} \Phi_j(u^0,v) \geq 0$. Очевидно, что так заданная функция $\Phi(u^0,v)$ определена для любых $(u^0,v) \in R^6$. Непрерывность следует из непрерывности функций $\Phi_j(u^0,v), j \in I_\lambda$. Следовательно, функция $\Phi(u^0,v)$, заданная формулой (5) - Φ-функция множеств $H(u^0)$ и $\Omega(v)$.

Теорема 2. Если $\Phi(u^0,v)$ - Φ-функция множеств $H(u^0)$ и $\Omega(v)$ вида (5), то условие (3) - $\Phi\left(u^0,v\right) \geq 0$ - критерий покрытия множества $\Omega(v)$ семейством прямых параллелепипедов $\Lambda(u^0)$.

В силу определения Φ-функции $\Phi\left(u^0,v\right) \geq 0$ тогда и только тогда, когда множества $H(u^0)$ и $\Omega(v)$ не имеют общих внутренних точек, а следовательно, выполняется условие $\Omega(v) \bigcap H(u^0) = \varnothing$, что, как было показано ране, эквивалентно следующему соотношению: $\Omega \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{n} P_i(u_i^0)\right) = \Omega$, то есть $\Omega \subseteq \left(R^3 \setminus \operatorname{int} H(u^0)\right) \Leftrightarrow \Omega \subseteq P(u^0)$.

Для построения Φ-функций объектов $T_1 = C_{ij}(w_{ij}) \in \left\{C_i, i = 1,2,...,33\right\}$ и $T_2 = \Omega(v)$ используем поверхность 0-уровня $\widetilde{\gamma}_{12}(u,v) = \left\{(u,v) \in R^6 \mid \Phi(u,v) = 0\right\}$, основные свойства которой изложены в [5]. Поскольку Ω - фиксирована, то примем $v = 0$: $\gamma_{12}(u) = \left\{u \in R^3 \mid \Phi(u,0) = 0\right\}$. Как известно из [4], $\gamma_{12} = frT_{12}$, где $T_{12} = T_1(0) + (-1)T_2(0)$ [8].

В данной статье рассмотрим Φ-функции следующих пар объектов: полупространства C_1 и выпуклого многогранника Ω, двугранного угла C_7 и Ω, трехгранного угла C_{19} и Ω, полубесконечного цилиндра C_{27} и Ω, параллелепипеда C_{33} и Ω. Пусть выпуклый компактный многогранник Ω задан набором координат его m вершин: $v_j^{\Omega} = (x_j^{\Omega}, y_j^{\Omega}, z_j^{\Omega}), j = 1,2,...,m$, прямой параллелепипед C_{33} - набором координат его 8 вершин: $v_i^{C_{33}} = (x_i^{C_{33}}, y_i^{C_{33}}, z_i^{C_{33}}), i = 1,2,..,8$. Полагаем, что положение объекта C_i в пространстве однозначно определяется вектором v_1, положение Ω - вектором v_2.

Φ-функция полупространства $C_1(v_1)$ и выпуклого многогранника $\Omega(v_2)$.

Не уменьшая общности, предположим, что полупространство $C_1(v_1)$ задано следующим образом: $C_1(v_1) = \{(x, y, z) \in R^3 : \pm x + v_1 \geq 0\}$.

В этом случае $\gamma_{12} = frT_{12} = fr\{C_1(0) + (-1)\Omega(0)\}$, где $T_{12} = \{w = (x, y, z) \in R^3 : \chi_i(w) \leq 0, i = 1,2,..,m\}$,

$$\chi_i(w) = \mp x + \tilde{x}_i^{\Omega}, \tag{6}$$

где $\tilde{x}_i^{\Omega} = x_i^{\Omega} - \sum_{j=1}^{m} x_j^{\Omega} / m$.

Тогда $\gamma_{12} = \{w \in R^3 : \chi(w) = 0\}$, где $\chi(w) = \max_{i=1,2,...,m} \chi_i(w)$.

Заменяя $w = (x, y, z)$ в последнем равенстве на $v_1 - v_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, получаем Φ-функцию объектов $C_1(v_1)$ и $\Omega(v_2)$:

$$\Phi(v_1, v_2) = \chi(v_2 - v_1). \tag{7}$$

Φ-функция параллелепипеда $C_{33}(v_1)$ и выпуклого многогранника $\Omega(v_2)$.

Пусть $C_{33}(v_1) = \{(x, y, z) \in R^3 : -a \leq x - x_1 \leq a,\ -b \leq y - y_1 \leq b,\ -c \leq z - z_1 \leq c\}$, полагаем, что полюс $C_{33}(v_1)$ находится в его центре симметрии, то есть в точке $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$, полюс многогранника $\Omega(v_2)$ находится в его центре масс $v_2 = (x_{pole}, y_{pole}, z_{pole}) = \left(\sum_{j=1}^{m} x_j / m, \sum_{j=1}^{m} y_j / m, \sum_{j=1}^{m} z_j / m \right)$.

В этом случае $\gamma_{12} = frT_{12} = fr\{C_{33}(0) + (-1)\Omega(0)\}$, $T_{12} = \{w = (x, y, z) \in R^3 : \chi_i(w) \leq 0, i = 1,2,..., M\}$, где

$$\chi_i(w) = A_i x + B_i y + C_i z + D_i,\ i = 1,2,..., M \tag{8}$$

- уравнения граней многогранника $T_3(w) = conv(K)$, где $conv(\cdot)$ - выпуклая оболочка множества $(\cdot)$ [9],

$$K = \{(x_j^{\Omega} - x_{pole} - (x_i^{C_{33}} - x_1), y_j^{\Omega} - y_{pole} - (y_i^{C_{33}} - y_1), z_j^{\Omega} - z_{pole} - (z_i^{C_{33}} - z_1))\},$$

где $j = 1,2,..., m, i = 1,2,..,8$, M - количество граней $T_3(w)$. Тогда $\gamma_{12} = \{w \in R^3 : \chi(w) = 0\}$, где $\chi(w) = \max_{i=1,2,..,M} \chi_i(w)$. Заменяя $w = (x, y, z)$ в последнем равенстве на $v_1 - v_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, получаем Φ-функцию объектов $C_{33}(v_1)$ и $\Omega(v_2)$: $\Phi(v_1, v_2) = \chi(v_2 - v_1)$.

Φ-функция двугранного угла $C_7(v_1)$ и выпуклого многогранника $\Omega(v_2)$.

Не уменьшая общности, считаем, что двугранный угол $C_7(v_1)$ задан следующей системой неравенств: $C_7(v_1) = \{(x, y, z) \in R^3 : x + x_1 \geq 0, y + y_1 \geq 0\}$. В этом случае достраиваем данный двугранный угол до прямого параллелепипеда $T_p(v_1)$, с учетом условия, что его высота, длина и ширина должны быть заведомо больше длины наибольшего ребра многогранника $\Omega(v_2)$. По аналогии с предыдущим пунктом строим функции $\chi_i(u)$ (8), тогда $\gamma_{12} = \{w \in R^3 : \chi(w) = 0\}$ где

$$\chi(w) = \max_{i \in I_M} \{\chi_i(w) : A_i \geq 0, B_i \geq 0, C_i = 0\}, I_M = \{1,2,..., M\}. \quad (9)$$

Заменяя $w = (x, y, z)$ в последнем равенстве на $v_1 - v_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, получаем Φ-функцию объектов $C_7(v_1)$ и $\Omega(v_2)$: $\Phi(v_1, v_2) = \chi(v_2 - v_1)$.

Φ-функция трехгранного угла $C_{19}(v_1)$ и выпуклого многогранника $\Omega(v_2)$.

Пусть трехгранный угол $C_{19}(v_1)$ задан следующей системой неравенств: $C_{19}(v_1) = \{(x, y, z) \in R^3 : x + x_1 \geq 0, y + y_1 \geq 0, z + z_1 \geq 0\}$. В этом случае, аналогично предыдущему, достраиваем данный угол до прямого параллелепипеда. Строим функции $\chi_i(w)$ (8), тогда $\gamma_{12} = \{w \in R^3 : \chi(w) = 0\}$, где

$$\chi(w) = \max_{i \in I_M} \{\chi_i(w) : A_i \geq 0, B_i \geq 0, C_i \geq 0\}, I_M = \{1,2,..., M\}. \quad (10)$$

Заменяя $w = (x, y, z)$ в последнем равенстве на $v_1 - v_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, получаем Φ-функцию объектов $C_{19}(v_1)$ и $\Omega(v_2)$: $\Phi(v_1, v_2) = \chi(v_2 - v_1)$.

Φ-функция полубесконечного цилиндра $C_{27}(v_1)$ с прямоугольным основанием и выпуклого многогранника $\Omega(v_2)$.

Пусть полубесконечный цилиндр $C_{27}(v_1)$ задан следующей системой неравенств:
$C_{27}(v_1) = \{(x, y, z) \in R^3 : -a_1 \leq x - x_1 \leq a_1, -b_1 \leq y - y_1 \leq b_1, -c_1 \leq z - z_1\}$. В этом случае, аналогично предыдущему, достраиваем данный полубесконечный цилиндр до прямого параллелепипеда. Строим функции $\chi_i(w)$ (8), тогда $\gamma_{12} = \{w \in R^3 : \chi(w) = 0\}$, где

$$\chi(w) = \max_{i \in I_M} \{\chi_i(w) : C_i \geq 0\}, I_M = \{1,2,..., M\}. \quad (11)$$

Заменяя $w=(x,y,z)$ в последнем равенстве на $v_1-v_2=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$, получаем Φ-функцию объектов $C_{27}(v_1)$ и $\Omega(v_2)$: $\Phi(v_1,v_2)=\chi(v_2-v_1)$.

Тогда, из теоремы 1 получаем критерий покрытия в следующем виде:

$$\Phi(u^0,v)=\max_{j\in I_\lambda}\Phi_j(u^0,v) \text{ ,где}$$

при $j\in\{1,2,...,6\}$ Φ-функция вида (6,7),
при $j\in\{7,8,...,18\}$ Φ-функция вида (7, 9),
при $j\in\{19,20,...,26\}$ Φ-функция вида (7, 10),
при $j\in\{27,28,...,32\}$ Φ-функция вида (7, 11),
при $j=33$ Φ-функция вида (7, 8).

(12)

Однако, $u=(u_1,u_2,...,u_n)$ - вектор, координаты которого являются переменными величинами, то для моделирования поставленной задачи Φ-функция не может быть использована непосредственно. Для этого введем в рассмотрение Γ-функцию теории покрытия [2] – функцию, зависящую от параметров размещения всех параллелепипедов покрывающего семейства. Вид Γ-функции зависит от пространственных форм и метрических характеристик покрывающих объектов.

6. Построение Γ-функции теории покрытия для области покрытия и дополнения к объединению покрывающих параллелепипедов

Заметим, что для $\forall u\in R_q^{3n}$ множества $H(u)$ имеют пространственную форму одного и того же типа и могут отличаться только метрическими характеристиками, и определяются одним и тем же набором множеств из семейства $C_i, i=1,2,..,33$. Значит, Φ-функции $\Phi_{qj}(u,v), j=1,2,..,\lambda_q$ для $\forall u\in \operatorname{int} R_q^{3n}$ имеют один и тот же вид и могут отличаться только значениями коэффициентов. Следовательно, взяв u в качестве параметра в функциях $\Phi_{qj}(u,v), j=1,2,..,\lambda_q$, получим следующую функцию:

$$F_q(u,v)=\min\{F_{qj}(u,v), j=1,2,..,\lambda_q\}. \tag{13}$$

Легко видеть, что если $F_q(u^*,v^*)=\max F_q(u,v)\ge 0$, то $\Omega(v^*)\cap H(u^*)=\varnothing$.

Построим функцию:

$$F(u,v)=\begin{cases} F_1(u,v), \text{для } u\in R_1^{3n} \\ F_2(u,v), \text{для } u\in R_2^{3n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ F_\eta(u,v), \text{для } u\in R_\eta^{3n} \end{cases}, \eta\le 31^\sigma, \sigma=n(n-1)/2.$$

Функция $F(u,0)$ является Γ-функцией для множеств Ω и $P_i(u_i), i=1,2,..,n$ и обозначается $\Gamma(u)$.

$$\Gamma(u)=\begin{cases}\Gamma_1(u), если\ \ u\in R_1^{3n},\\ \Gamma_2(u), если\ \ u\in R_2^{3n},\\ \dots\\ \Gamma_\eta(u), если\ \ u\in R_\eta^{3n},\end{cases} \tag{14}$$

где $R^{3n}=\bigcup\limits_{q=1}^{\eta}R_q^{3n}$ - разбиение пространства R^{3n} [7], $\eta\le 31^{\sigma}$, $\sigma=n(n-1)/2$, $\Gamma_q(u)=F_q(u,v)|_{v=0}$, $F_q(u,v)|_{u=u^0}\equiv\Phi_q(u^0,v)$, $\Phi_q(u^0,v)$ - Φ-функция множеств $\Omega(v)$ и $H(u^0)$, $u^0\in R_q^{3n}$ - Ф-функция вида (12).

Теорема 3. Для семейства прямых параллелепипедов $\Lambda(u), u=(u_1,u_2,...,u_n)\in R^{3n}$ разбиение пространства R^{3n} имеет вид:

$$R^{3n}=\bigcup_{q=1}^{\eta}R_q^{3n},\ R_q^{3n}=\bigcap_{j>i=1}^{n}R_{ij}^k,$$

где $\eta=28^{\sigma_1}\cdot 19^{\sigma_2}\cdot 13^{\sigma_3}\cdot 9^{\sigma_4}$, $\sigma_l\in\{0,1,2,...,n(n-1)/2\}$, $l=1,2,3,4$.
$R_{ij}^k=\left\{u\in R^{3n}\,\middle|\,(u_i,u_j)\in R_{ij}^k, k\in\{1,2,..,31\}, i\ne j, i,j\in I\right\}$, при этом

$\eta=28^{\sigma}$, если $R^6=\bigcup\limits_{k=1,k\ne 15}^{29}R_{ij}^k$ или $R^6=\bigcup\limits_{k=1}^{28}R_{ij}^k$, или $R^6=\bigcup\limits_{k=1,k\ne 15,k\ne 29}^{30}R_{ij}^k$, или $R^6=\bigcup\limits_{k=1,k\ne 15,k\ne 29,k\ne 30}^{31}R_{ij}^k$;

$\eta=19^{\sigma}$, если $R^6=\bigcup\limits_{k\in I_k}R_{ij}^k$, где $I_k=\{1,..,10,16,..,23,25,26,28\}$ или $I_k=\{1,..,10,20,..,28\}$, или $I_k=\{1,..,4,8,..,13,17,..,22,26,..,28\}$;

$\eta=13^{\sigma}$, если $R^6=\bigcup\limits_{k\in I_k}R_{ij}^k$, где $I_k=\{1,2,4,8,10,11,13,17,19,20,22,26,28\}$ или $I_k=\{1,..,4,8,9,10,20,21,22,26,27,28\}$;

$\eta=9^{\sigma}$, если $R^6=\bigcup\limits_{k\in I_k}R_{ij}^k$, где $I_k=\{1,2,4,8,10,20,22,26,28\}$ или $I_k=\{1,2,4,5,7,8,10,20,22,23,25,26,28\}$.

6. Математическая модель задачи покрытия

Математическую модель задачи можно представить в следующем виде:

$$\Gamma\left(u^*\right)=\max_{u\in R^{3n}}\Gamma\left(u\right). \tag{15}$$

Таким образом, если найдется вектор u^*, такой что $\Gamma\left(u^*\right)\ge 0$, то $\Omega\bigcap H\left(u^*\right)=\varnothing$ и процесс решения завершается, то есть условие (3) выполняется. Если же $\Gamma\left(u^*\right)<0$, то покрытие не существует. На основании теорем 1-3 сформулируем основные свойства математической модели (15).

1. Функция цели $\Gamma(u)$ - кусочно-линейная.

2. Задача (15) может быть сведена к эквивалентной задаче:

$$\chi^* = \max\left\{\chi_q^*, q = 1,2,...,\eta_1\right\}, \quad (16)$$

$$\chi_q^* = \Gamma_q\left(u^*\right) = \max_{u \in R_q^{3n}} \Gamma_q(u), \qquad q = 1,2,...,\eta_1 < \eta, \quad (17)$$

где η_1 - число функций F_q.

3. Как только выполнится неравенство $\chi_q^* \geq 0$, покрытие получено.

4. Задача (17) сводится к задаче вида:

$$\chi_q^* = \max_{u \in D_q} \chi_q,$$

$$\text{где } D_q = \left\{u \in R_q^{3n} \mid \Gamma_q\left(u\right) \geq \chi_q\right\}. \quad (18)$$

5. Задача (18) сводится к последовательности задач линейного программирования вида:

$$\chi_{qp}^* = \max_{u \in D_{qp}} \chi_{qp}, \quad (19)$$

где область

$$D_{qp} = \left\{u \in R_q^{3n} \mid \Gamma_{qp}(u) \geq \chi_{qp}\right\}, \quad (20)$$

$p = 1,2,..., N \leq N_p = {k_{1k}}^{p_{q1}} \cdot \prod_{\delta=1}^{12} k_{2k\delta}^{p_{q2\delta}} \cdot \prod_{\delta=1}^{8} k_{3k\delta}^{p_{q3\delta}} \cdot \prod_{\delta=1}^{6} k_{4k\delta}^{p_{q4\delta}}$, где $p_{q2\delta}, p_{q3\delta}, p_{q4\delta}, p_{q1}$ - количество базовых объектов $C_\delta^2, C_\delta^3, C_\delta^4, C^1$ (двугранных, трехгранных углов, полубесконечных цилиндров и параллелепипедов) соответственно, участвующих в формировании множества $H(u^0)$, где множество R_q^{3n} описывается либо структурой, либо системой линейных неравенств, $k_{jk\delta}$ - число функций, участвующих в формировании Ф-функций для C_δ^j и $\Omega, j = 1,2,3,4$. Оценка числа неравенств, описывающих множество D_{qp}: $\varphi_{qp} = \sum_{\delta=1}^{12} p_{q2\delta} + \sum_{\delta=1}^{8} p_{q3\delta} + \sum_{\delta=1}^{6} p_{q4\delta} + p_{q1}$. Оценка числа неравенств, описывающих (15) имеет вид: $\theta = \sum_{q=1}^{\eta} \varphi_{qp} N_q$.

6. Задача (15) является многоэкстремальной и NP-сложной [15].

Таким образом, модель (19-20) позволяет сформировать дерево решения, концевым вершинам которого соответствуют соотношения вида: $\Gamma_{qp}(u) \geq \chi_{qp}$.

7. Стратегия решения задачи покрытия

Основываясь на свойствах 1)-6) математической модели (15) общая стратегия решения задачи покрытия выпуклой области набором прямых параллелепипедов различных размеров сводится к следующим этапам:

1. Формирование стартовой точки $u^0 = \left(u_1^0, u_2^0, ..., u_n^0\right)$.
2. Построение множества $H^0 = cl\left(R^3 \setminus \bigcup_{i=1}^{n} P_i(u_i^0)\right)$ [8].
3. Построение матрицы пространственных форм $M_q = \left|m_{ij}\right|$, элементы m_{ij} которой описываются либо структурой $\left\langle A_{ij}^k(u_i, u_j) + B_{ij}^k > 0, k = 1\right.$, либо системой $\left\{A_{ij}^k(u_i, u_j) + B_{ij}^k \geq 0, k = 2,3,..,31\right.$ неравенств, однозначно определяющих k-ую пространственную форму [7] множества $P_{ij} = P_i(u_i) \bigcup P_j(u_j), i \neq j \in I$.
4. Построение множества $H(u^0)$ в виде объединения базовых объектов.
5. Построение функций $\Gamma_{qp}(u)$.
6. Решение последовательности задач (19), u^*- вектор, соответствующий решению.
7. Проверка условия $\chi_q^* \geq 0$. Если условие выполнено – то покрытие найдено.

8. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Построены специальные функции, зависящие от параметров размещения параллелепипедов покрывающего семейства, исследованы их свойства. Построена математическая модель задачи покрытия. Предлагаемый подход к решению задачи позволяет дать ответ на вопрос, является ли заданное семейство прямых параллелепипедов покрытием выпуклого многогранника, при положительном результате получаем значения параметров размещения покрывающих параллелепипедов. Решение трехмерной задачи покрытия сведено к последовательности задач линейного программирования. Предложенный подход может быть распространен на случай, когда заданной областью является несвязное многогранное множество.

ЛИТЕРАТУРА

1. Daniels K., Inkulu R. An Incremental Algorithm for Translational Polygon Covering // University of Massachusetts at Lowell Computer Science Technical Report. – 2001. – No 1. – P. 1-31.
2. Stoyan Yu. Covering a polygonal region by a collection of various size rectangles // Пробл. машиностроения. – 2007. – 10, No 2. – С. 67-82.
3. Александрян Г. А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. – Москва: Высш. шк., 1979. – 336 с.
4. Stoyan Yu. G. Φ-function and its basic properties // Доп. НАН України. – 2001. – No 8. – С. 112-117.
5. Stoyan Yu., Scheithauer G., Pridatko D., Romanova T. Φ-function for primary 3D objects // Technische Univarsitat Dresden . – 2002. – P. 27

6. Stoyan Yu., Scheithauer G., Gil M., Romanova T. Φ-function for complex 2D objects // 4QR Quarterly Journal of the Belgian, French and Italian Research Societies . – 2004. – 2, No 1. - P. 69-84.
7. Сосюрка Е.С. Аналитическое описание взаимного расположения прямых параллелепипедов в задаче покрытия компактного многогранного множества // Вестник Харьковского национального университета. – 2008. - №833 – С.247-257.
8. Minkowski H. Dischteste gitterformige. Lagerung, in Nachr. Ges. Wiss. – Gottingen, 1904.
9. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: Введение. М.: Мир, 1989, 478 с.
10. Stoyan Yu. Covering a polygonal region by a collection of various rectangles // Проблемы машиностроения. – 2007.т.10, №2 – С.67-82.
11. Hochbaum D Fast approximation algorithms for a nonconvex covering problem //Journal of algorithms // 1987.vol.8 – P.305-323.
12. Cao An Wang, Bo-Ting Yang, Binzhai Zhu. On some polyhedra covering problems //Journal of Combinatorial Optimization.-2000. №4 – P.437-447.
13. Toth G. F. Packing and covering //Handbook of discrete and computational geometry //CRC Press New York // 1997.
14. Bottino A., Laurentini A. Optimal Positioning of sensors in 3D // Lecture notes in computer science. - 2005. vol. 3773 – P.804-812.
15. Х. Пападимитриу, К. Стайглиц. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность: М. : Мир, 1985. - 512 с.

Надійшла 04.07.2009.