УДК 517.929.7

Дослідження температурного поля двошарового циліндра з різними теплофізичними характеристиками

Т. А. Григорова, В. П. Ляшенко
Кременчуцький державний університет імені Михайла Остроградського, Украина

В статье проведены исследования математических моделей температурных полей во время нагрева изделий индукционным способом в контейнере. Найдены численные решения задач в конечномерном сепарабельном пространстве с применением алгоритма Кранка – Николсон и Дугласа – Ганна. Выполнены численные расчеты и построены температурные распределения.

Ключевые слова: *математические модели, алгоритмы, численные расчеты.*

В статі проведені дослідження математичних моделей температурних полів під час нагрівання індукційним виробів способом у контейнері. Знайдено чисельні розв'язки задач у сепарабельному скінченомірному просторі на основі алгоритмів Кранка – Ніколсон та Дугласа – Ганна. Проведено чисельні розрахунки та побудовано температурні розподіли.

Ключові слова: *математична модель, алгоритми, чисельні розрахунки.*

In the paper we are conducted researches of mathematical models of the temperature fields during heating of wares an induction method in a container. The numerical solutions of problems are found in space of finite-dimensional separable space based on algorithms of Crank – Nicholson and Douglas – Gunn. Numerical calculations are executed and temperature distributions are built.

Key words: *mathematical model, algorithms, numerical calculations.*

1. Загальна постановка питання і його актуальність

Процес спікання виробів із порошкових матеріалів у контейнері має складну природу. Він зазвичай відбувається у металевій або графітовій прес-формі, яка розігрівається під дією електричного струму, що пропускається через неї. Найбільш ефективно підводити електричний струм індукційним способом [1]. В процесі спікання спресована заготовка змінює свої фізико-механічні властивості та геометричні розміри. Основний вплив на це має температура нагрівання. Розподіл температур у виробі впливає на його основні характеристики. Одночасно тут відбуваються складні дифузійні процеси. Тому актуальним є побудова комплексної математичної моделі температурного поля прес-форми та виробу, що спікається. Математична модель дозволяє визначити основні параметри керування температурним полем.

2. Витоки дослідження авторів

У роботах, зокрема [2] проведені дослідження температурних розподілів, що відбуваються під час відпалів металевих виробів циліндричної форми індукційним способом. Побудовані математичні моделі, у вигляді початково-крайових задач для лінійного рівняння теплопровідності, та отримані аналітичні розв'язки. Циліндр, що розігрівається розглядається у вигляді двошарового циліндра, один шар якого розігрівається внутрішніми джерелами тепла, а другий за рахунок передачі тепла від нього. Моделюється область з однорідними фізичними характеристиками. Розглядається умова теплової взаємодії на межі зовнішнього та внутрішнього циліндрів.

3. Не розв'язані питання і мета роботи

В роботах [1,2] не враховувалась умова спряження між двома неоднорідними середовищами, а саме прес-форми на яку безпосередньо діє електричний струм, та виробу, що спікається в ній. Метою даних досліджень є побудова та аналіз комплексної математичної моделі температурного поля двошарової циліндричної області з різними фізичними характеристиками та з урахуванням умови теплової взаємодії між двома областями.

4. Загальна постановка задачі та її розв'язок

Під час нагрівання виробів циліндричної форми скінченої довжини у контейнері тіло контейнера розігрівається індукційним способом, джерела тепла зосереджені у поверхневому шарі - товщиною Δ [1]. При цьому внутрішніми джерелами тепла розігрівається шар товщиною Δ, а далі уздовж радіусу r нагрівання порошку або спресованого виробу відбувається шляхом передачі тепла теплопровідністю або шляхом передачі тепла за законом Ньютона та Стефана - Больцмана. Не зменшуючи узагальнення, можна вважати, що у прес-формі сила струму стала та дорівнює I. Тому під час моделювання температурного поля зони нагріву прес-форми та виробу у ній індукційним способом природно припустити, що нагрівання відбувається одночасно внутрішніми та зовнішніми джерелами тепла. При цьому теплофізичні характеристики зовнішнього та внутрішнього шарів різні.

Для визначення температурного розподілу $T(r,z)$ у такому складеному циліндрі приходимо до наступної крайової задачі на спряження

$$\lambda_{1,2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_{1,2}}{\partial r}\right)+\lambda_{1,2}\frac{\partial^2 T_{1,2}}{\partial z^2}-c_{1,2}\rho_{1,2}\frac{\partial T_{1,2}}{\partial t}=$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{I^2\rho_0(1+\beta T_{1,2})}{S^2}, & r-\Delta\le r<r_0,\\ 0, & 0<r<r_0-\Delta\end{cases} \tag{1}$$

$$0<z<l,\quad T_{1,2}>0,$$

$$T_{1,2}(r,z,0)=T_0, \tag{2}$$

$$T_{1,2}(r,0,t)=T_0,\qquad T_{1,2}(r,l,t)=T_l \tag{3}$$

$$\lambda_1\frac{\partial T_1(r_0-\Delta-0,z,t)}{\partial r}=\lambda_2\frac{\partial T_2(r_0-\Delta+0,z,t)}{\partial r}, \tag{4}$$

$$T_1(r_0-\Delta-0,z,t)=T_2(r_0-\Delta+0,z,t), \tag{5}$$

$$\lambda_1\frac{\partial T_1(r_0,z,t)}{\partial r}=-\alpha_1(T_1-T_c)-\varepsilon\sigma(T_1^4-T_c^4),\qquad \frac{\partial T_2(0,z,t)}{\partial r}=0 \tag{6}$$

де $\lambda_{1,2}$, $c_{1,2}$, $\rho_{1,2}$, $\alpha_{1,2}$ – відповідні теплофізичні характеристики та параметри матеріалів тіла контейнера та виробу, ε,σ – степінь чорноти та постійна

Стефана-Больцмана, ρ_0, β – питомий опір і температурний коефіцієнт опору.

Якщо припустити, що у прес-формі виріб розігрівається передачею тепла за законом Ньютона та Стефана – Больцмана то тепловий потік на внутрішній поверхні полого циліндра можна задати у вигляді

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(r_0-\Delta-0,z,t)}{\partial r} = \alpha_1(T_1-T_c)+\varepsilon\sigma(T_1^4-T_c^4), \qquad (7)$$

У такому випадку після усереднення $u(z,t)=\frac{2}{S}\int\limits_{r_0-\Delta-0}^{r_0} T_1(r,z,t)rdr$ приходимо до задачі

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - a_1\frac{\partial u}{\partial t} + A_1 u + C_1 u^4 = B_1, \qquad 0<z<l, \qquad t>0 \qquad (8)$$

$$u(z,0)=T_0, \qquad u(0,t)=T_0, \qquad u(r,z,l)=T_l, \qquad (9)$$

де $A_1=\left(\frac{I^2\rho_0\beta}{\lambda_1 S^2}+\frac{2\alpha_1\Delta-4r_0\alpha_1}{\lambda_1 S}\right)$, $a_1=\frac{c_1\rho_1}{\lambda_1}$,

$$B_1=-\frac{I^2\rho_0}{\lambda_1 S}-\frac{2(2r_0\alpha_1 T_c-\Delta\alpha_1 T_c+2r_0\varepsilon\sigma T_c^4-\varepsilon\sigma\Delta T_c^4)}{\lambda_1 S}, \qquad C_1=\frac{2\Delta\varepsilon\sigma-4r_0\varepsilon\sigma}{\lambda_1 S}$$

Далі переходимо до розв’язання задачі у внутрішньому циліндрі. Так як внутрішній циліндр розігрівається за допомогою зовнішніх джерел тепла та сприймає тепловий потік, то на його поверхні тепловий потік має вигляд (6) з коефіцієнтом теплопровідності λ_2, та тепловіддачі α_1

$$\lambda_2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_2}{\partial r}\right)+\lambda_2\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2}-c_2\rho_2\frac{\partial T_2}{\partial t}=0, \qquad (10)$$

$$0<r<r_0-\Delta, \qquad 0<z<l, \qquad t>0$$

$$T_2(r,z,0)=T_0, \qquad (11)$$

$$T_2(r,0,t)=T_0, \qquad T_2(r,l,t)=T_l \qquad (12)$$

$$\lambda_2\frac{\partial T_2(r_0-\Delta+0,z,t)}{\partial r}=\alpha_1(T_1-T_c)+\varepsilon\sigma(T_1^4-T_c^4), \qquad (13)$$

$$\left.\frac{\partial T_2}{\partial r}\right|_{r=0}=0 \qquad (14)$$

Якщо і у цьому циліндрі температурним розподілом уздовж радіусу можна знехтувати та провівши усереднення $v(z,t)=\frac{2}{S_1}\int\limits_0^{r_0-\Delta+0} T_2(r,z,t)rdr$, $S_1=\pi(r_0-\Delta)^2$ приходимо до крайової задачі для диференціального рівняння другого порядку з умовами (11)-(13)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}-a_2\frac{\partial v}{\partial t}+Av+Cv^4=B, \qquad 0<z<l, \qquad t>0 \qquad (18)$$

$$v(z,0)=T_0, \quad v(0,t)=T_0, \quad v(l,t)=T_l, \qquad (19)$$

де $a_2 = \dfrac{c_2\rho_2}{\lambda_2}$, $A = -\dfrac{2\alpha_2(r_0-\Delta)}{\lambda_2 S_1}$, $B = -\dfrac{2(r_0-\Delta)(\alpha_2 T_c + \varepsilon\sigma T_c^4)}{\lambda_2 S_1}$,

$C = -\dfrac{2(r_0-\Delta)\varepsilon\sigma}{\lambda_2 S_1}$

Інший підхід до задачі (10)-(14) про температурне поле внутрішнього циліндра приводить до заміни умови (13) на функцію $T = T(r_0-\Delta, z, t)$, що є розв'язком задачі (8)-(9) на поверхні зовнішнього циліндра.

Отримані крайові задачі розв'язуємо чисельними методами. Спочатку розв'язуємо задачу (8)-(9) для отримання температурного розподілу на границі зовнішнього та внутрішнього циліндрів.

Будуємо кінцево-різницеву схему Кранка - Ніколсона [3] для рівняння теплопровідності.

В області $\overline{\Omega}$ $\{0 \le z \le l,\ t > 0\}$ вводимо рівномірні сітки по довжині (координата z) заготовки $\overline{\omega}_h = \{z_m = mh,\ m = 0,1...M\}$; часову сітку (координата t) $\overline{\omega}_{\Delta t} = \{t_j = j\Delta t,\ j = 0,1...j_0\}$ з інтервалами: $h = l/M$, $\Delta t = t_0 / j_0$.

Розв'язок задачі в області Ω шукаємо у вигляді розв'язку системи нелінійних алгебраїчних рівнянь для сіткової функції u_{z_m,t_j}, яку позначимо як $u_{i,j}$.

$$a_1 \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} = \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1} + u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{2h^2} + A_1 u_i^j + C_1 {u_i^j}^4 - B_1$$

Отриману матрицю значень температур використовуємо для розв'язання задачі (10)-(14), як граничну умову.

Для цього будуємо кінцево-різницеву схему Дугласа-Ганна для розв'язку методом змінних напрямів [3] в області $\overline{\Omega}$ $\{0 \le r \le r_0 - \Delta,\ 0 \le z \le l,\ t > 0\}$ з інтервалами $h_1 = (r_0-\Delta)/N$, $h_2 = l/M$, $\Delta t = t_0 / j_0$, яка має вигляд

$$\frac{u_{n,m}^{j+1/2} - u_{n,m}^j}{\Delta t/2} = \frac{\lambda_2}{rc_2\rho_2}\frac{u_{n+1,m}^{j+1/2} - u_{n,m}^{j+1/2}}{2h_1} + \frac{\lambda_2}{c_2\rho_2}\frac{u_{n-1,m}^{j+1/2} - 2u_{n,m}^{j+1/2} + u_{n+1,m}^{j+1/2}}{h_1^2} +,$$

$$+\frac{\lambda_2}{c_2\rho_2}\frac{u_{n,m-1}^j - 2u_{n,m}^j + u_{n,m+1}^j}{h_2^2}$$

$$\frac{u_{n,m}^{j+1} - u_{n,m}^{j+1/2}}{\Delta t/2} = \frac{\lambda_2}{rc_2\rho_2}\frac{u_{n+1,m}^{j+1/2} - u_{n,m}^{j+1/2}}{2h_1} + \frac{\lambda_2}{c_2\rho_2}\frac{u_{n-1,m}^{j+1/2} - 2u_{n,m}^{j+1/2} + u_{n+1,m}^{j+1/2}}{h_1^2} +$$

$$+\frac{\lambda_2}{c_2\rho_2}\frac{u_{n,m-1}^{j+1} - 2u_{n,m}^{j+1} + u_{n,m+1}^{j+1}}{h_2^2}$$

на границях області

$$\frac{-u_{2,m}^{j+1} + 4u_{1,m}^{j+1} - 3u_{0,m}^{j+1}}{2h_1} = 0, \quad \text{для} \quad n = 0,$$

для $n = N$ підставляємо значення з матриці температурного розподілу на границі внутрішнього циліндру.

Якщо покласти $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0,\ \ 0 < z < l$ будемо мати задачу Коші, яку можна розглядати як тестову для тестування алгоритму чисельного розв'язку

$$a^2 \frac{dv}{dt} - Av - Cv^4 = -B, \qquad t > 0, \quad v(0) = T_0\,, \tag{20}$$

Для $C = 0$ її розв'язок має вигляд

$$v(t) = \frac{AT - B}{A} e^{\frac{A}{a_2}t} + \frac{B}{A} \tag{21}$$

Параметр I вибираємо із умови $\frac{I^2 \rho_0 \beta}{S} > 2\alpha r_0$.

Порівняння результатів чисельних розрахунків, виконаних за розв'язком задач (18)-(19) та (21) показали, що температурні розподіли суттєво відрізняються між собою. Коли відношення $l / r_0 >> 1$ тоді різниця абсолютних значень температур зростає. Це свідчить про вплив граничних умов $T(r,0,t)$ та $T(r,l,t)$ на загальний температурний розподіл. Щоб з'ясувати повністю їх вплив розглянемо спрощену задачу визначення температурного поля по перетину внутрішнього циліндра

$$a_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) \tag{22}$$

$$0 < r < r_0 - \Delta, \qquad t > 0$$

$$T(r,0) = T_0 \tag{23}$$

$$T_2(r_0 - \Delta + 0, t) = T_1(r_0 - \Delta - 0, t) = T_1, \qquad \left| T_2(0,t) \right| < \infty \tag{24}$$

Її розв'язок знаходимо методом Фур'є [4].

$$T(r,t) = T_1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_0 - T_1}{\mu_k^2 I_1(\mu_k)} I_0\left(\frac{\mu_k}{r_0 - \Delta} r \right) e^{-\frac{\mu_k^2 a_2}{(r_0 - \Delta)^2} t} \tag{25}$$

де $I_0(\frac{\mu_k}{r_0 - \Delta} r)$ – функції Бесселя першого роду нульового порядку.

5. Обчислювальний експеримент: обґрунтування алгоритмів і реалізація

Запропонована математична модель та алгоритм розв'язку задачі з достатньою точністю описують процес спікання виробів у контейнері. Проведені чисельні розрахунки та побудовані температурні розподіли під час спікання виробів рис. 1-4 для крайових задач (8)-(9), (10)-(13), (18)-(19) та (20), тут T_0, T_l, T_c – співпадають. Розв'язки (21) та (25) спрощених задач з досить високою точністю погоджуються з розв'язками крайової задачі (10)-(13).

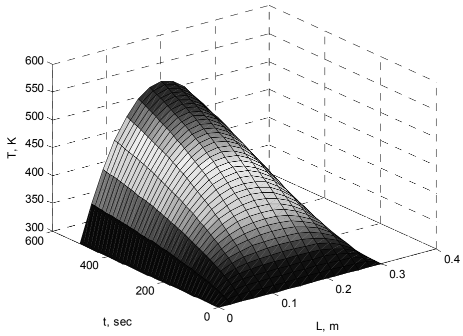

Рис.1 Температурний розподіл на границі внутрішнього циліндру

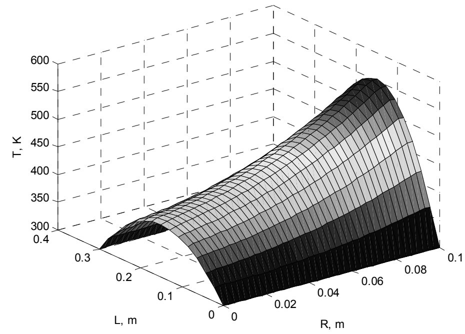

Рис.2 Температурний розподіл у внутрішньому циліндрі

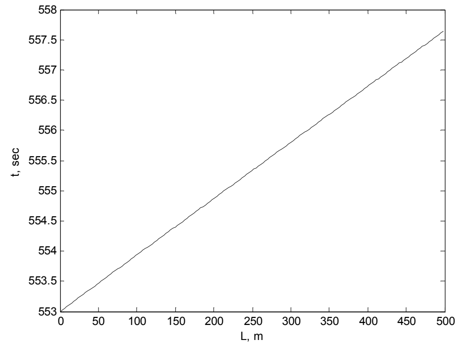

Рис.3 Температурний розподіл у внутрішньому циліндрі задача (21)

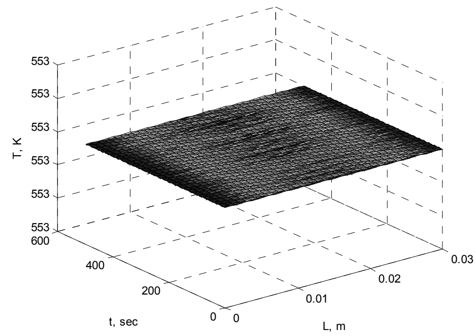

Рис.4 Температурний розподіл задача у внутрішньому циліндрі (18)-(19)

6. Висновки за результатами і напрями подальших досліджень

Отримані результати можуть бути застосовані під час проектування систем контролю спікання виробів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бабат Г.И. Индукционный нагрев металлов и его промышленное применение. 2-е изд., перераб. и доп. – Л.: Энергия, 1965. – 522 с.
2. Безменов Ф.В. Некоторые особенности протекания процесса нагрева цилиндрических деталей при заданных значениях температуры на поверхности и глубине закалки // Индукционный нагрев. – 2008. – №5 – С. 48-56.
3. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2-х т., т. 1, пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 384 с.
4. Перестук М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики.- К.:Либідь, 2006.– 424с.

Надійшла 10.04.2010