

УДК 629.734.7

Моделирование движения системы пилот-парашютист по углу тангажа

П. И. Иванов

ГП НИИ аэроупругих систем, Украина

В работе рассматривается вопрос устойчивости системы пилот-парашютист по углу тангажа как один из важных критериев безопасности полета. Известно одно решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, корни характеристического уравнения которого комплексные, описывающего колебательные процессы в механической системе после прекращения воздействия возмущений. Используя известное решение линейного однородного дифференциального уравнения при заданных начальных условиях, получено решение, описывающее колебания системы пилот-парашютист по тангажу.

Ключевые слова: *система пилот-парашютист, тангаж, дифференциальное уравнение.*

У роботі розглядається питання стійкості системи пилот-парашютист по куту тангажа як один з важливих критеріїв безпеки польоту. Відомо одне рішення лінійного однорідного дифференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами, корені характеристичного рівняння якого комплексні, що описує коливальні процеси в механічній системі після припинення впливу збурювань. Використовуючи відоме рішення лінійного однорідного дифференціального рівняння при заданих початкових умовах отримане рішення, що описує коливання системи пилот-парашютист по тангажу.

Ключові слова: *система пилот-парашютист, тангаж, дифференціальне рівняння.*

Stability of the system pilot-paraglider according to the pitch as one of the most important criterions of flying safety is considered in this work. There is one known solution concerning single-line uniform differential equation of the second order with constant factors, as the roots of the indicative equation are complex, describing oscillatory processes in the mechanical system after stopping the influence of indignations. Using the known solution of single-line uniform differential equation under given initial conditions the solution describing fluctuations of the system a pilot-paraglider on the pitch is received.

Keywords: *system a pilot- paraglider, pitch, differential equation.*

1. Постановка проблемы

Сущность проблемы состоит в необходимости исследований новых, более совершенных моделей движения парашютерных систем, что связано с важными задачами обеспечения безопасности полетов.

2. Анализ публикаций по теме исследования

Последние достижения и публикации, в которых начато решение данной проблемы и на которые опирается автор, представлены в работах [1-3]. Не решенной ранее частью общей проблемы, которой посвящается настоящая работа, являются вопросы исследования динамики движения системы пилот-парашютист в режиме тангажа с целью дальнейшего возможного моделирования и повышения надежности процесса функционирования парашютерных систем.

3. Цель статьи

Целью настоящей работы является разработка новой математической модели движения системы пилот-параплан, отличающейся от прежних работ тем, что она сочетает в себе приемлемую для инженерного использования достоверность описания динамики полета на переходных режимах с вычислительной устойчивостью.

4. Основная часть

Устойчивость системы пилот-параплан по тангажу, как показала практика, является существенно важным параметром с точки зрения безопасности пилота, особенно при полетах на предельно малых высотах [1-3]. Неустойчивость увеличивает риск травматизма в результате повышения вероятности столкновения с землей, вплоть до ситуаций с летальным исходом. Сказанное выше заставляет детально исследовать задачу колебаний системы пилот-параплан по тангажу.

Процесс колебаний по тангажу описывается системой дифференциальных уравнений первого порядка, однако получить точное аналитическое решение системы сегодня не представляется возможным по ряду причин. Попытки численного решения систем дифференциальных уравнений, описывающих процесс колебаний системы по тангажу методом Рунге-Кутты даже с адаптируемым шагом, не дают результата в силу неустойчивости решения. Буквально на первых секундах процесс становится неустойчивым – основные параметры процесса (составляющие истинной воздушной скорости, тангаж, угол атаки и др.) начинают катастрофически возрастать или убывать.

Попытки варьирования начальными условиями и параметрами системы только несколько увеличивают участок процесса, на котором просматривается его динамика, но неустойчивость не исчезает. Возможно, что неустойчивость связана с наличием достаточно слабых коэффициентов демпфирования или отсутствием соответствующих демпфирующих членов в системе уравнений, описывающих колебательный процесс, определить которые в настоящее время не представляется возможным в силу слабой изученности аэродинамики процесса. Однако для получения приемлемого для практики решения можно попытаться использовать наблюдения в полете за колебаниями системы, возникающими по углу тангажа.

Известно одно решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + p \frac{dy(t)}{dt} + qy(t) = 0, \quad (1)$$

описывающего колебательный процесс после прекращения воздействия возмущений, корни характеристического уравнения которого – комплексные. Здесь p и q — константы.

В задачах прикладной механики: $y(t)$ — отклонение системы или ее элемента от заданного уровня в колебательном процессе во времени t . Константа p отвечает за демпфирующие свойства системы, q — за восстанавливающие

свойства (упругость), отвечающие за возвращение системы к исходному состоянию.

Общий интеграл уравнения (1) в случае комплексных корней характеристического уравнения имеет вид:

$$y(t) = e^{\alpha t} (A \cos \beta t + B \sin \beta t), \quad (2)$$

где $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$, выражается через константы p , q .

Будем искать решение, описывающее колебания системы пилот-параплан по тангажу (относительно поперечной оси z системы, проходящей через центр масс) в форме (2):

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-kt} \left[A \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) + B \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \right], \quad (3)$$

где φ – текущее значение угла отклонения оси системы по тангажу от вертикали; φ_0 – начальное значение угла, в котором оказалась продольная ось системы после прекращения возмущающего воздействия и из которого начинается процесс восстановления равновесия системы; t – время текущее; k – коэффициент демпфирования; T – период колебания системы.

Дифференцируя выражение (3), найдем угловую скорость тангажа:

$$\omega_z(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = -\varphi_0 e^{-kt} \left[\left(kA - B \frac{2\pi}{T} \right) \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) + \left(A \frac{2\pi}{T} + kB \right) \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \right]. \quad (4)$$

Неизвестные коэффициенты A и B подберем, исходя из требуемых начальных условий.

1. В момент начала движения системы из отклоненного состояния φ_0 в равновесное, т.е. при $t = 0$, угловая скорость системы должна быть равна нулю. Однако из уравнения (4) видно, что при $t = 0$, угловая скорость не равна нулю. Для того, чтобы угловая скорость в момент начала движения из отклоненного состояния была равна нулю, необходимо, чтобы член при функции косинус обращался в нуль, т.е., необходимо выполнение условия:

$$kA - B \frac{2\pi}{T} = 0, \text{ откуда можно найти, например, коэффициент } B: B = \frac{kT}{2\pi} A.$$

2. В момент начала движения системы из отклоненного состояния в равновесное необходимо, чтобы угол отклонения системы от вертикали был равен заданному: φ_0 . Из уравнения (3) следует, что это условие будет выполняться при значении коэффициента $A = 1$.

Период колебания системы можно оценить по формуле: $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, где l – расстояние между центром давления и центром тяжести системы; для парашютных и парапланерных систем (ППС) оно обычно составляет 3-5м; $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения. Так, для $l = 3 \text{ м}$, $T = 3,475 \text{ с}$.

Угловую частоту колебаний можно представить в виде: $\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Подставляя найденные значения коэффициентов A, B и выражение для угловой частоты колебаний системы в формулы (3) и (4), получим следующую математическую модель колебаний системы по тангажу:

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-kt} \left[\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right) + k \sqrt{\frac{l}{g}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right) \right] \quad (3a)$$

$$\omega_z(t) = -\varphi_0 e^{-kt} \left[\left(\sqrt{\frac{g}{l}} + k^2 \sqrt{\frac{l}{g}} \right) \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right) \right] \quad (4a)$$

Исследования [2], проводившиеся в полетах в условиях атмосферной турбулентности на парашютах и парапланах различных типов, а также наблюдения за поведением аппаратов и процессами восстановления после воздействия возмущений показали [3], что полученные на базе интеграла (2) полуэмпирические зависимости (3a) и (4a), описывающие процесс колебаний по тангажу, дают вполне удовлетворительное качественное сходство с реальными процессами. Это позволило использовать их в дальнейшем в различных математических моделях. Отметим, что при полетах в умеренной и умеренно-интенсивной турбулентности, предельные углы отклонения системы от вертикали φ_0 , при горизонтальных порывах ветра, могут достигать 30° . Коэффициент демпфирования k пропорционален коэффициенту сопротивления c_x системы пилот-параплан: $k = k_1 c_x$. Здесь k_1 – коэффициент пропорциональности, постоянный для каждого аппарата и устанавливаемый опытным путем.

Как амплитуда φ_0 , так и угловая частота $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}$, оказывают изматывающее воздействие на пилота и их критические значения существенно влияют на продолжительность полета по условиям утомляемости пилота и безопасности пилотирования непосредственно у земли. От этих двух параметров существенно зависит оценка пилотом испытателем каждого нового конкретного аппарата и возможность его серийного производства в дальнейшем.

На рисунках 1 и 2 представлены графики возмущенного движения $\varphi(t)$ системы пилот-параплан, рассчитанных по формуле (3a) при $l=3$ м, для трех различных предельных углов отклонения системы от вертикали $\varphi_0 = 5^\circ, 10^\circ, 20^\circ$ и двух различных значений параметра демпфирования $k=0,3$ и $k=0,6$.

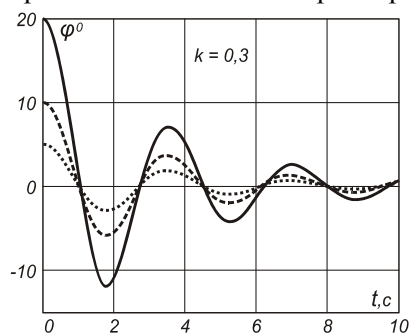


Рис.1 Динамика движения при $k = 0,3$

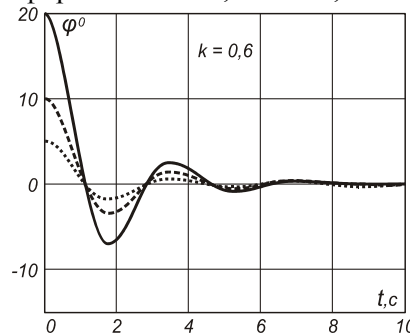
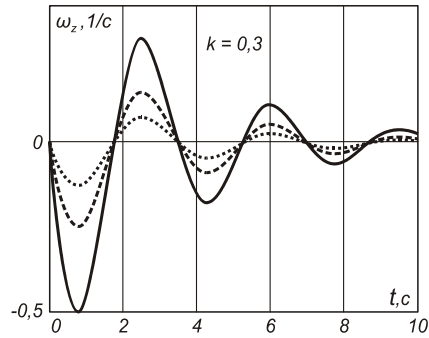
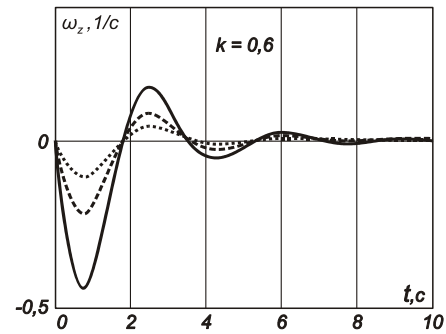


Рис.2 Динамика движения при $k = 0,6$

Анализ результатов также показывает существенное уменьшение амплитуды и времени переходного процесса с увеличением коэффициента демпфирования вдвое (у устойчивых аппаратов), что соответствует практическим наблюдениям.

Рис.3 Угловая скорость при $k=0,3$ Рис.4 Угловая скорость при $k=0,6$

На рисунках 3 и 4 представлены графики угловых скоростей возмущенного движения $\omega_z(t)$ системы пилот-параплан, рассчитанных по формуле (4а) при $l=3\text{м}$, для трех различных предельных углов отклонения системы от вертикали $\varphi_0=5^\circ, 10^\circ, 20^\circ$ и двух различных значений параметра демпфирования $k=0,3$ и $k=0,6$.

При проектировании парапланерных систем особое внимание конструктора должно быть уделено увеличению коэффициента демпфирования k до приемлемых значений по условиям переносимости их пилотом. Формула (3а) в процессе дальнейших исследований может быть усовершенствована, например, в смысле установления точного физического смысла коэффициента k_1 .

Пользуясь зависимостями (3а) и (4а), можно приблизительно оценить изменение воздушной скорости центра давления крыла V_S в процессе колебаний по тангажу по формуле [2]:

$$V_S = \sqrt{V^2 + (\omega_z l)^2 - 2V\omega_z l \cos(|\theta| + \varphi(t))}. \quad (5)$$

Здесь V — скорость центра масс системы, θ — угол планирования.

На рисунках 5 и 6 представлены графики изменения результирующей скорости центра давления крыла, для трех различных предельных углов отклонения системы от вертикали $\varphi_0=5^\circ, 10^\circ, 20^\circ$ и двух значениях параметра демпфирования $k=0,3$ и $k=0,6$.

Анализ графиков показывает, что при отклонении системы от вертикали на угол $\varphi=20^\circ$ и коэффициенте демпфирования $k=0,3$, результирующая скорость центра давления (вращательное и поступательное движения) достигает 13%, а при коэффициенте демпфирования $k=0,6$, суммарная скорость центра давления достигает 10%. Таким образом, становится известной примерная оценка приращения скорости центра давления крыла в движении по тангажу, а значит, и приращения полной аэродинамической силы, пропорциональной квадрату результирующей скорости.

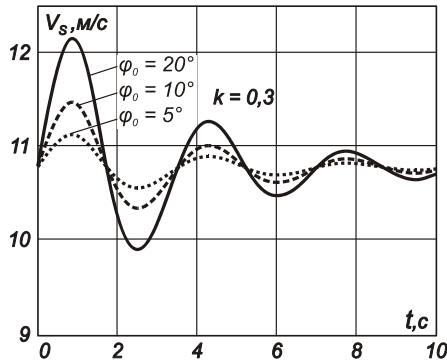


Рис.5 Результирующая скорость центра давления крыла при $k=0,3$

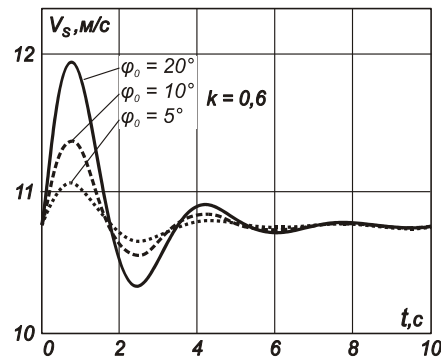


Рис.6 Результирующая скорость центра давления крыла при $k=0,6$

Отсюда можно получить приближенную оценку изменения перегрузки в движении по тангажу: $\Delta n \approx \pm(0,2 \div 0,3)$, что при определенных частотах может приводить к нарушению функций вестибулярного аппарата пилота и необходимости экстренной посадки. Здесь знак минус реализуется при движении крыла вперед (пикирование), знак плюс – при движении крыла назад (кабрирование).

Нужно отметить, что при оценке приращения результирующей скорости центра давления крыла по формуле (5), угол планирования θ и скорость центра масс системы V предполагались постоянными (в нашем примере $V=10,77$ м/с, $\theta=21,8^\circ$). На самом же деле, они также переменны в колебательном движении системы по тангажу. Однако, если считать, что их относительные изменения незначительны, то сделанные нами приближенные оценки приращений будут вполне удовлетворительными для практики. Необходимо также отметить, что рассуждения, аналогичные вышеприведенным, можно провести также и при анализе движения системы по крену. Формулы (3а) и (4а) останутся прежними.

Следующим важным вопросом является вопрос балансировки системы пилот-ППС. Угол отклонения ψ вектора полной аэродинамической силы \bar{R} системы пилот-ППС от вертикали можно представить в виде [2]:

$$\psi = \arcsin\left(\frac{c_x \cos \theta - c_y \sin \theta}{c_R}\right), \text{ или же } \psi = \arctg\left(\frac{\frac{c_x}{c_y} - \frac{V_y}{V_x}}{1 + \frac{c_x}{c_y} \cdot \frac{V_y}{V_x}}\right). \quad (6)$$

Здесь c_x, c_y, c_R – аэродинамические коэффициенты крыла в скоростной системе координат; θ – угол планирования системы; V_y, V_x – вертикальная и горизонтальная составляющие скорости системы. В балансировочном положении системы $\frac{c_x}{c_y} \approx \frac{V_y}{V_x}$, угол $\psi \rightarrow 0$ и вектор полной аэродинамической силы весьма близок к вертикали. В режиме колебаний системы по тангажу (до

критического угла атаки) существенно неравенство $\frac{c_x}{c_y} \neq \frac{V_y}{V_x}$, угол $\psi \neq 0$, что

приводит к появлению момента, раскачивающего систему по тангажу.

При выборе профиля крыла ППС и его кривки (c_x, c_y, c_R), при заданном значении аэродинамического качества K установившегося режима, конструктор может использовать зависимости (6) для оценки возможности выхода системы в требуемое балансировочное положение. Для этого необходимо, чтобы после прекращения существенных колебаний (при $t > 2T$), угол $\psi \rightarrow 0$. Это и является одним из основных критериев правильности выбора профиля крыла ППС и его кривки в смысле обеспечения динамической устойчивости системы пилот-ППС по тангажу.

Как было сказано выше, зависимости (3а) и (4а) могут быть использованы в различных математических моделях. Например, может быть построена упрощенная математическая модель для оценки изменения горизонтальной и вертикальной составляющих скорости системы пилот-парашютист при колебаниях системы по тангажу, допускающая инженерное использование.

В этой модели система пилот-парашютист заменяется материальной точкой, расположенной в ее центре масс. Движение рассматривается в нормальной земной системе координат. Влияние раскачки системы сводится к изменению вертикальной и горизонтальной составляющих скоростей системы.

Математическая модель этой упрощенной инженерной задачи может быть представлена в виде следующей системы двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} m \frac{dV_x}{dt} = -c_R S \rho \frac{(V_x^2 + V_y^2)}{2} \sin \left[\varphi_0 e^{-kt} \left(\cos \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right) + k \sqrt{\frac{l}{g}} \sin \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right) \right) \right]; \\ m \frac{dV_y}{dt} = -c_R S \rho \frac{(V_x^2 + V_y^2)}{2} \cos \left[\varphi_0 e^{-kt} \left(\cos \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right) + k \sqrt{\frac{l}{g}} \sin \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right) \right) \right] + mg. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь: m – масса системы; V_x, V_y – горизонтальная и вертикальная составляющие скорости центра масс системы; c_R – коэффициент полной аэродинамической силы; S – площадь крыла; ρ – плотность воздуха.

При построении данной модели были приняты следующие допущения.

Угол отклонения вектора полной аэродинамической силы от вертикали практически совпадает с углом отклонения оси системы от вертикали. Влияние угловой скорости тангажа на величину вектора полной скорости системы V – незначительно. Коэффициент полной аэродинамической силы c_R в процессе колебаний по тангажу изменяется незначительно (практически остается постоянным). При таких допущениях интегрировании системы методом Рунге-Кутты с адаптируемым шагом с целью описания характера изменения во времени горизонтальной и вертикальной составляющих скоростей в процессе затухающих колебаний по тангажу дает результат, представленный на рис. 7а,б.

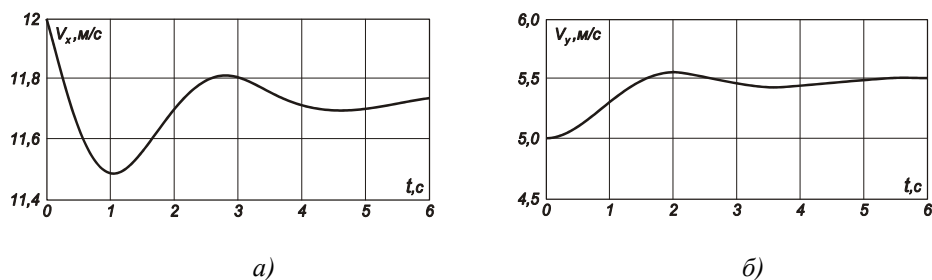


Рис.7 Изменение горизонтальной а) и вертикальной б) составляющих скорости системы

Практика летных исследований показывает, что результаты расчетов по предложенной математической модели (7) качественно согласуются с реальностью, что является косвенным доказательством ее адекватности.

Зависимости рис.7 позволяют выполнить оценку опасности столкновения системы пилот-параплан с землей при моделировании полетов на предельно малых высотах. Предельно малая высота полета по условиям безопасности (с учетом реакции пилота), не должна быть меньше удвоенного значения максимальной амплитуды вертикальной составляющей скорости. В нашем случае (рис.7б), предельно малая высота полета не должна быть меньше 1м.

В данных расчетах принимались следующие значения параметров: $m=100$ кг, $V_{x0}=12$ м/с, $V_{y0}=5$ м/с, $c_R=0,65$, $S=15$ м², $\rho=1,2$ кг/м³, $\varphi_0=5^\circ$, $k=0,6$, $l=3$ м. Анализ данных расчета показывает, что процесс затухания колебаний качественно соответствует реальному процессу. Время затухания процесса в данном случае фактически соответствует двум периодам колебаний, что характеризует относительно устойчивый аппарат.

Нужно отметить, что заданное значение коэффициента c_R определяет только величину модуля вектора полной скорости системы на установившемся режиме. Горизонтальная и вертикальная составляющие полной скорости установившегося режима (после прекращения режима колебаний) устанавливаются в зависимости от начальных значений составляющих скоростей V_{x0} , V_{y0} в момент максимального отклонения и начального значения угла отклонения φ_0 системы от вертикали. Необходимо отметить также, что в соответствии с расчетами по предложенной модели (7), выход системы на установившийся режим после прекращения колебаний при случайным образом заданных начальных условиях V_{x0} , V_{y0} дает тем больший угол планирования системы, чем больший начальный угол отклонения системы от вертикали, из которого система возвращается к нормальному режиму полета.

5. Выводы

Предложена новая математическая модель, предоставляющая возможность приближенной оценки переходных процессов колебаний системы пилот-параплан по углу тангажа, которая может быть использована в предварительных расчетах динамики движения системы пилот-параплан. В перспективе, после

разработки метода испытаний и измерений, планируется экспериментальное уточнение предложенных полуэмпирических зависимостей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов П.И. Эксплуатация парaplана (монография, ISBN 966-95903-1-0), Феодосия, Экма, 2001.- 76 с.
2. Иванов П.И. Проектирование, изготовление и испытания парaplанов (монография, ISBN 966-95903-0-2),- Феодосия, Экма, 2001.- 256 с.
3. Иванов П.И., Иванов Р.П. Устойчивость парaplанерной системы по тангажу // Сб. научных трудов ХАИ «Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов»/-2001. вып.25(2), Харьков, - С.37-41.