УДК 539.3:533.6

Интеграл в смысле конечной части по Адамару для функций, заданных на разомкнутой кривой

И. Ю. Кононенко, Е. А. Стрельникова
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина
Институт проблем машиностроения НАН Украины, Украина

Доказана теорема о существовании интеграла по криволинейному элементу в смысле конечной части по Адамару.

Ключевые слова: *гиперсингулярный интеграл, конечная часть по Адамару, разомкнутая кривая.*

Доказано теорему про існування інтегралу по криволінійному елементу в сенсі скінченної частини за Адамаром.

Ключові слова: *гіперсингулярний інтеграл, скінченна частина за Адамаром, розімкнена крива.*

Theorem on the existence of the integral on the open-ended curves in the sense of the Hadamard Finite-Part is proved.

Keywords: *hypersingular integral, Hadamard Finite-Part, open-ended curve.*

1. Постановка задачи и её актуальность

Интеграл в смысле конечной части по Адамару от прямого значения нормальной производной функции, определенной на отрезке, представляет собой предельное значение нормальной производной потенциала двойного слоя [1]. Исследование таких интегралов важно как при вычислении нормальной производной потенциала простого слоя, так и при оценке точности вычисления гиперсингулярных интегралов.

Существует обширный класс задач, которые решаются либо могут быть решены методами, которые сводятся к граничным интегральным уравнениям. Например, гидроупругость, трещиностойкость и долговечность упругих материалов и элементов конструкций. Такие методы позволяют снизить размерность задачи на единицу. Существенное снижение размерности матриц разрешающих систем алгебраических уравнений позволяет изучать задачи, которые ранее не решались в трехмерной постановке. Однако в ряде задач полученные интегральные уравнения являются сингулярными и гиперсингулярными, и в них следует специальным образом корректно определить интегралы.

Многие авторы ограничиваются решением простых модельных задач, описываемых граничными интегральными уравнениями. Эти исследования важны с точки зрения развития теории, а решенные задачи могут служить тестовыми для проверки численных методов инженерного расчета.

Вместе с тем, имеется целый ряд практических задач, которые уже сегодня могут быть эффективно решены с использованием метода граничных интегральных уравнений. К ним относятся, казалось бы, такие разные задачи как определение частот и форм свободных колебаний оболочек, заполненных различными жидкостями, исследование напряжений, возникающих при действии ветровой нагрузки на лопасти ветроэнергетической установки, пространственные задачи теории трещин. Эти задачи, тем не менее, подобны с математической точки зрения, они описываются системами дифференциальных уравнений в областях с разрезами. Для их решения целесообразно применять методы теории потенциала. Это позволяет сводить рассматриваемые задачи разных классов к практически одним и тем же гиперсингулярным интегральным уравнениям и использовать для их решения одинаковые подходы и методы.

Современные возможности вычислительной техники позволяют сделать решительный переход к использованию этого сложного аппарата математической физики для решения актуальных практических проблем [2-4]. Отсюда следует актуальность развития численных методов решения таких уравнений.

2. Существование интеграла по криволинейному элементу в смысле конечного значения по Адамару

Теорема. *Для того, чтобы существовало конечное значение по Адамару интеграла по криволинейному элементу, необходимо и достаточно, чтобы существовало конечное значение интеграла по прямолинейному отрезку, представляющему собой отрезок касательной кривой в рассматриваемой точке.*

Пусть l – простая разомкнутая дуга Ляпунова. Предположим, что уравнение кривой l задается следующим образом:

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi_1(s), \\ \xi_2 = \xi_2(s), \\ a \le s \le b. \end{cases} \tag{2.1}$$

Будем считать, что функции $\xi_1(s)$ и $\xi_2(s)$ дважды непрерывно дифференцируемы. Кроме того, предположим, что

$$\alpha(\vec{n}_1, \vec{n}_2) < A\rho, \tag{2.2}$$

где ρ – расстояние между двумя точками x_1 и x_2 на кривой l, $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ – нормали к кривой l в этих точках, α – угол между этими нормалями, A – ограниченная величина.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Лапласа в R^2 с разрезом по кривой l:

$$\begin{cases} \Delta p\big|_{\Omega} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial p}{\partial n}\right|_S = F\big|_S. \end{cases} \tag{2.3}$$

Представим неизвестную функцию p в виде потенциала двойного слоя:

$$p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_l \Theta(\zeta)\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\ln\frac{1}{|x-\zeta|}ds, \tag{2.4}$$

где $|x-\zeta| = \sqrt{(x_1-\zeta_1)^2 + (x_2-\zeta_2)^2}$, $\Theta(\zeta)$ – неизвестная плотность, её производная вдоль контура удовлетворяет условию Гельдера.

Введем оси координат $(0x, 0y)$, связанные с точкой наблюдения $x = (x_1, x_2)$ так, чтобы ось $0y$ была направлена по нормали к линии l в точке x. Начало координат поместим в эту точку.

Необходимо вычислить $\dfrac{\partial p}{\partial n_x}$. Вследствие выбора системы координат получаем, что $\dfrac{\partial}{\partial n_x} = \dfrac{\partial}{\partial y}$.

Рассмотрим вспомогательную точку наблюдения $x' = (0, y)$, находящуюся на нормали к линии l в точке x. Пусть $r = |x' - \zeta|$ – расстояние между точками x' и $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$, обозначим как r_0 расстояние между точками x и ζ.

Пусть l_0 – часть контура l, полученная пересечением кривой l и круга с центром в точке x и радиусом δ. Выбираем δ настолько малым, что на l_0 параллели к нормали в точке x пересекают эту часть контура только в одной точке.

Представим нормальную производную от выражения (2.4) в виде:

$$\frac{\partial p}{\partial n_x} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_{l\setminus l_0}\Theta(\zeta)\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\ln\frac{1}{|x' - \zeta|}ds + \\ + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_{l_0}\Theta(\zeta)\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\ln\frac{1}{|x' - \zeta|}ds. \tag{2.5}$$

Нормальная производная первого слагаемого в правой части этого выражения существует при $x' \to x = (0,0)$. Рассмотрим второе слагаемое. В точке $x' = (0, y)$ имеем:

$$\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\ln\frac{1}{|x' - \zeta|} = \frac{1}{r^2}\left[\zeta_1\cos(n_\zeta, x) + (\zeta_2 - y)\cos(n_\zeta, y)\right] \tag{2.6}$$

Дифференцируя полученное равенство по y, с учетом соотношений:

$$\zeta_2 - y = r\cos(y, r), \\ \zeta_1\cos(n_\zeta, x) + (\zeta_2 - y)\cos(n_\zeta, y) = r\cos(n_\zeta, r) \tag{2.7}$$

находим, что

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial n_\zeta}\ln\frac{1}{|x' - \zeta|} = \frac{2\cos(n_\zeta, r)\cos(y, r) - \cos(n_\zeta, y)}{r^2}. \tag{2.8}$$

На контуре l_0, который окружает точку x, введем следующую параметризацию:

$$\begin{cases} \zeta_1 = x, \\ \zeta_2 = \eta(x). \end{cases} \tag{2.9}$$

Отметим, что эти выражения представляют собой уравнения касательной к линии l в точке x.

В силу сделанных предположений функция $\eta(x)$ имеет вторую непрерывную производную. Для точек контура l_0 выполняется неравенство:

$$x^2+\eta^2(x)\le\delta^2, 0<\delta<1. \tag{2.10}$$

В начале выбранной системы координат функция $\eta(x)$ обращается в нуль вместе со своей первой производной, а, следовательно, в окрестности начала координат $\eta(x)$ может быть представлена в виде:

$$\eta(x)=Bx^2, \tag{2.11}$$

где B – ограниченная величина. Кроме того, имеют место соотношения:

$$ds=\frac{1}{\cos(n_\zeta,y)}dx,\quad r=\sqrt{x^2+(\eta(x)-y)^2}. \tag{2.12}$$

Получаем следующее выражение:

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{l_0}\Theta(\zeta)\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\ln\frac{1}{|x'-\zeta|}dl=\int_{-\delta}^{\delta}\Theta(\zeta)L(x'-\zeta)dx. \tag{2.13}$$

Ядро интегрального оператора запишем следующим образом:

$$L(x'-\zeta)=-\frac{1}{r^2}+\frac{2r\cos(n_\zeta,r)\cos(y,r)}{r^3\cos(n_\zeta,y)}. \tag{2.14}$$

Иначе:

$$L(x'-\zeta)=-\frac{1}{r^2}+\frac{2y^2}{r^4}+\frac{2r_0\cos(n_\zeta,r_0)\cos(y,r)}{r^3\cos(n_\zeta,y)}-\frac{2y\zeta_2}{r^4}. \tag{2.15}$$

Положим $r_1=\sqrt{x^2+y^2}$. Имеем $r^2-r_1^2=\eta(x)\left[\eta(x)-2y\right]$. Вследствие (2.11) получим:

$$r^2=r_1^2+B^2x^4+2yBx^2. \tag{2.16}$$

Отсюда следует, что

$$r=r_1\sqrt{1+(Bx^2+2y)B\theta}, \tag{2.17}$$

где $|\theta|<1$. Тогда

$$\frac{1}{r^2}=\frac{1}{r_1^2}-g_1\frac{h_1}{r_1^2};\ \frac{1}{r^2}=\frac{g_1}{r_1^2};$$

$$\frac{1}{r^4}=\frac{1}{r_1^4}+g_2\frac{h_1}{r_1^4};\ \frac{1}{r^4}=\frac{g_1^2}{r_1^4}; \tag{2.18}$$

где $h_1=(Bx^2+2y)B\theta$; $g_1=\dfrac{1}{1+h_1}$; $g_2=g_1^2(2+h_1)$.

Из приведенных соотношений следует, что рассматриваемый интеграл (2.13) по контуру l_0 примет вид

$$\int_{-\delta}^{\delta}\Theta(\zeta)L(x'-\zeta)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\Theta(x)\left(-\frac{1}{r_1^2}+\frac{2y^2}{r_1^4}\right)dx+\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\Theta(x)\frac{Q}{r_1^4}dx, \tag{2.19}$$

где

$$Q = g_1 B\theta(Bx^2 + 2y)(-r_1^2 + 2y^2) + \frac{2g_1^2 r_0 \cos(n_\zeta, r_0)(Bx^2 - y)}{\cos(n_\zeta, y)} - 2g_1^2 Bx^2 y. \quad (2.20)$$

В (2.19) считаем, что плотность $\Theta(x)$ задана на отрезке, хотя первоначально эта функция была задана на кривой. Ее значение на отрезке определяем следующим образом: в каждой точке отрезка построим линии, параллельные нормали к кривой в точке x. Согласно свойствам кривой Ляпунова и выбору контура l_0 эти линии лишь в одной точке пересекают контур l. Значение плотности на отрезке будем считать равным значению плотности в той точке криволинейного контура, в которой пересекается с контуром l параллель к нормали в точке x.

Первое слагаемое в (2.19) имеет конечный предел при $y \to 0$, и это предельное значение равно конечной части по Адамару для интеграла $\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\Theta(x)}{x^2} dx$:

$$\cos(n_\zeta, r_0) < Ar_0;\; r_0^2 = x^2 + B^2 x^4; \quad (2.21)$$

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|y|}{x^2 + y^2} dx = 2arctg \frac{\delta}{|y|}. \quad (2.22)$$

Из вышеизложенного видно, что второе слагаемое в (2.19) ограничено и имеет конечный предел при $y \to 0$ и фиксированном δ.

Таким образом, конечное значение по Адамару интеграла по криволинейному элементу существует тогда и только тогда, когда существует конечное значение по Адамару для интеграла по прямолинейному элементу, представляющему собой отрезок касательной к кривой в рассматриваемой особой точке.

3. Выводы по результатам исследований

Результат, доказанный в этой теореме, может использоваться в различных задачах, которые используют интегралы в смысле главного значения по Адамару. В частности, для обоснования численного метода, используемого при решении задач о гидроупругих колебаниях оболочек вращения, которые частично заполнены жидкостью [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Учебное пособие. – Харьков: ХНУ, 2001. – 92 с.
2. Григолюк Э.И., Горшков А.Г. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью. – Ленинград: Судостроение, 1976. – 200 с.

3. Мокеев В.В. Исследование динамики конструкций с жидкостью и газом с помощью метода конечных элементов // Изв. АН Механика тв. тела. – 1998. – 6. – С. 166–174.
4. Троценко В.А. Колебания жидкости в подвижных емкостях с перегородками. – Киев: Институт математики НАН Украины, 2006. – 324 с.
5. Кузина И.Ю. Метод гиперсингулярных интегральных уравнений для задачи о гидроупругих колебаниях упругой оболочки вращения // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2006. – Т. 25, № 2. – С. 271-276.

Надійшла у першій редакції 16.12.2009, в останній - 22.01.2010.