УДК 519.832.3

Прогресуюча безшумна дуель з кососиметричним ядром на кінцевій решітці одиничного квадрата з нелінійними функціями влучності

В. В. Романюк

Хмельницький національний університет, Україна

Означено дискретну прогресуючу безшумну дуель з кососиметричним ядром на кінцевій підмножині одиничного квадрата, де щільність стратегій дуелянта з наближенням до завершення періоду конфлікту зростає у геометричній прогресії, а ідентичні функції влучності гравців є узагальнено нелінійними. З використанням побудованого MATLAB-модуля для отримання розв’язку означеної дуелі показано, у яких випадках вона має рівноважні ситуації у чистих стратегіях.

Ключові слова: *дискретна прогресуюча безшумна дуель, кососіметричне ядро, функції влучності гравців, нелінійна функція, MATLAB, рівноважні ситуації в чистих стратегіях.*

Определено дискретную прогрессирующую бесшумную дуэль с кососимметричным ядром на конечном подмножестве единичного квадрата, где плотность стратегий дуэлянта при приближении к завершению периода конфликта возрастает в геометрической прогрессии, а идентичные функции меткости игроков являются обобщённо нелинейными. С использованием построенного MATLAB-модуля для получения решения определённой дуэли показано, в каких случаях она имеет равновесные ситуации в чистых стратегиях.

Ключевые слова: *дискретная прогрессирующая бесшумная дуэль, кососимметричное ядро, функции меткости игроков, нелинейная функция, MATLAB, равновесные ситуации в чистых стратегиях.*

There has been defined the discrete progressive noiseless duel with the skewsymmetric kernel on the finite subset of the unit square, where the density of the strategies of the duelist with approaching to the conflict period completion grows in geometrical progression, while the identical accuracy functions of the players are generally nonlinear. With applying the constructed MATLAB-module for getting the defined duel solution there has been shown, in what cases it has the equilibrium situations in the pure strategies.

Key words: *discrete progressive noiseless duel, skew-symmetric kernel function, accuracy functions of players, non-linear function, MATLAB, equilibrium situations in pure strategies.*

Вступ та постановка проблеми у загальному виді

Антагоністичні ігри є порівняно нескладними моделями доволі вузького прошарку тих явищ та процесів, де приймають участь дві зацікавлені сторони [1, 2]. Моделі прийняття рішень в умовах тотального конфлікту, які є предметом теорії антагоністичних ігор, складають незначну частину дослідження операцій [3, 4]. Але саме теорія антагоністичних ігор є фундаментальною [5] для побудови моделей прийняття рішень в умовах багатосторонніх конфліктів. Рішення, прийняті на основі розв’язку антагоністичної гри-моделі, дозволяють оптимальним чином скориговувати активність у відповідних соціально-економічних мікропроцесах, у дуальних мікросоціумах, у системах регулювання і контролю екологічної безпеки. Безшумні дуелі [2, 3, 6], як клас нескінченних антагоністичних ігор, є гарними моделями для тих конфліктних ситуацій, де рішення потрібно приймати на протязі фіксованого періоду часу, який зазвичай нормують до одиничного сегмента $[0; 1]$. Проте така форма опису конфлікту має місце тільки тоді, коли, наприклад, період часу для прийняття рішення як сегмент $[0; 1]$ розташований у середині робочого дня, астрономічної або академічної години, хвилини тощо. Якщо ж цей період співвідноситься з певною кількістю днів або тижнів, то очевидно, що прийняття рішення, яке тут ототожнюється з вибором чистої стратегії, відбувається на строго включеній у сегмент $[0; 1]$ підмножині. І зі збільшенням періоду часу для прийняття рішення ця підмножина стає вже дискретною, адже мова може йти про вибір дня тижня або місяця, номеру тижня у календарному році, а також інших ізольованих відліків часу [7]. Ще однією особливістю класичної безшумної дуелі є те, що ці відліки не повинні розташовуватись еквідистантно у сегменті $[0; 1]$, оскільки з наближенням кінця періоду прийняття рішення суб'єкт цього процесу так чи інакше намагатиметься діяти активніше.

Аналіз останніх досліджень і публікацій у напрямку ігрових моделей

Дослідження теоретико-ігрових моделей проведено у багатьох працях, серед яких існують і роботи по безшумним дуелям [3, 6]. Питаннями дискретизації безшумних дуелей займались більше зарубіжні вчені [8, 9]. Про дуелі з нееквідистантною дискретизацією одиничного сегмента, де з часом щільність чистих стратегій дуелянта збільшується, відомо дуже мало [10, 11]. Додатковим полем для діяльності є відсутність узагальнення виду функцій влучності гравців, тому що вони зазвичай покладаються лінійними [2, 3, 9].

Формулювання мети статті та постановка завдань

Розглянемо безшумну дуель, ядро якої

$$K(x, y) = h_1(x) - h_2(y) + h_1(x) h_2(y) \operatorname{sign}\left[h_2(y) - h_1(x)\right], \; x \in X, \; y \in Y, \tag{1}$$

де $h_1(x)$ є функцією влучності першого гравця, а $h_2(y)$ є функцією влучності другого гравця, задається на одиничному квадраті

$$X \times Y = [0; 1] \times [0; 1]. \tag{2}$$

Ця гра описує чимало антагоністично-конфліктних процесів лише у граничному переході, коли гравець володіє безліччю варіантів своїх можливих дій. При $h_1(x) = h_2(x)$ для ядра (1) виконується $K(x, y) = -K(y, x)$ і гра стає симетричною: її значення $v_{\mathrm{opt}} = 0$, а оптимальні стратегії гравців є ідентичними. Монотонно неспадні функції влучності мають задовольняти крайовим умовам

$$h_1(0) = 0, \; h_1(1) = 1 \tag{3}$$

та

$$h_2(0) = 0, \; h_2(1) = 1. \tag{4}$$

Тому узагальнено можна покладати

$$h_1(x) = x^{\alpha},\ \alpha > 0 \tag{5}$$

та

$$h_2(y) = y^{\alpha},\ \alpha > 0\,. \tag{6}$$

Звідси метою даної статті є формалізація симетричної безшумної дуелі з ядром (1) на одиничному квадраті (2) при нелінійних функціях влучності (5) і (6), де множиною чистих стратегій гравця є ізольовані точки одиничного сегмента $[0;1]$, щільність яких збільшується з розгортанням дуелі. Розглядатимемо найпростіший випадок зростання цієї щільності, коли з часом відстань між сусідніми чистими стратегіями зменшується удвоє. Крім цього, ставиться задача швидкого визначення розв'язків відповідної матричної гри [12, 13], для чого необхідно побудувати функцію-модуль у математичному середовищі MATLAB [14, 15].

Дискретна прогресуюча безшумна дуель з ядром (1) на кінцевій підмножині одиничного квадрата (2)

Як уже було сказано, зі плином часу дуелі, і це відповідає наближенню до правого кінця одиничного сегмента $[0;1]$, щільність чистих стратегій гравця збільшується. Надамо гравцю право на постріл на самому початку й у самому кінці дуелі, тобто на кінцях сегментів X та Y. Тоді, не обмежуючи загальності, у найпростішому випадку множина чистих стратегій кожного гравця складатиметься із N точок

$$\{0,1\} \cup \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k} \right\}_{n=2}^{N-1} \subset [0;1] \tag{7}$$

при $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Тому підмножиною одиничного квадрата (2), на якій задаватимемо дискретну безшумну дуель, буде декартовий добуток

$$\{x_i\}_{i=1}^{N} \times \{y_j\}_{j=1}^{N} = \left\{ \left\{ \begin{bmatrix} x_i & y_j \end{bmatrix} \right\}_{i=1}^{N} \right\}_{j=1}^{N} =$$

$$= \left\{ \{0,1\} \cup \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k} \right\}_{n=2}^{N-1} \right\} \times \left\{ \{0,1\} \cup \left\{ \sum_{k=1}^{m-1} 2^{-k} \right\}_{m=2}^{N-1} \right\} \subset X \times Y = [0;1] \times [0;1] \tag{8}$$

з N^2 точок одиничного квадрата (2), щільність яких збільшується у геометричній прогресії при наближенні до правого верхнього кута $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ цього квадрата. У співвідношенні (8) $x_1 = y_1 = 0$ та $x_N = y_N = 1$, а

$$x_i = \sum_{k=1}^{i-1} 2^{-k} \quad \text{при} \quad i = \overline{2,\, N-1} \tag{9}$$

та

$$y_j = \sum_{k=1}^{j-1} 2^{-k} \quad \text{при} \quad j = \overline{2,\, N-1}\,. \tag{10}$$

Таку дискретну безшумну дуель можна називати прогресуючою. Її симетричність очевидна завдяки кососиметричності ядра (1), яке тепер представлятимемо у формі $N \times N$ -матриці $\mathbf{R} = \left(r_{ij}\right)_{N\times N}$, де

$$r_{ij} = K\left(x_i,\, y_j\right) = h_1\left(x_i\right) - h_2\left(y_j\right) + h_1\left(x_i\right) h_2\left(y_j\right) \operatorname{sign}\left[h_2\left(y_j\right) - h_1\left(x_i\right)\right] =$$
$$= x_i^{\alpha} - y_j^{\alpha} + x_i^{\alpha} y_j^{\alpha} \operatorname{sign}\left(y_j^{\alpha} - x_i^{\alpha}\right),\ i = \overline{1,\, N},\ j = \overline{1,\, N}\,. \tag{11}$$

Тепер, отримавши замість нескінченної антагоністичної гри з ядром (1) на квадраті (2) матричну гру з матрицею (11), очевидна цілковита визначеність дискретної прогресуючої безшумної дуелі, нехай і, можливо, у змішаних стратегіях. Оптимальні стратегії при цьому можна визначити за допомогою відповідного програмного забезпечення.

Швидке розв'язування дискретної прогресуючої безшумної дуелі

Програмне середовище MATLAB є потужним засобом для створення математичного програмного забезпечення для виконання об'ємних чисельних операцій [7, 13, 15, 16]. У ньому легко побудувати функцію-модуль для розв'язування матричної $\mathbf{R} = \left(r_{ij}\right)_{N\times N}$ -гри (рис. 1).

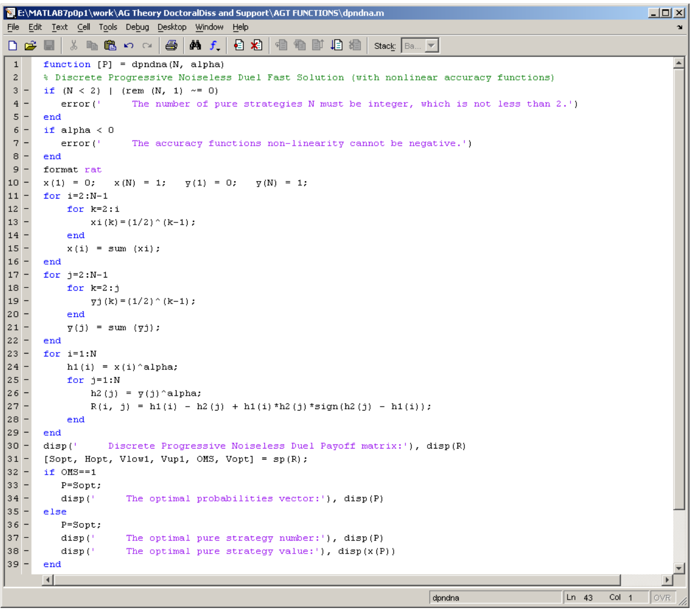


Рис. 1. Вікно з кодом функції-модуля dpndna для визначення розв'язку дискретної прогресуючої безшумної дуелі з нелінійними функціями влучності

Побудований модуль dpndna має два вхідних параметри: кількість чистих стратегій гравця $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ та показник нелінійності $\alpha > 0$ функцій влучності гравців.

У командному вікні MATLAB, у яке повертається розв'язок гри, відображається також матриця $\mathbf{R}$. На рис. 2 — 4 показано приклади отримання розв'язку дискретної прогресуючої безшумної дуелі з сімома чистими стратегіями у гравців при різному ступені нелінійності функцій влучності.

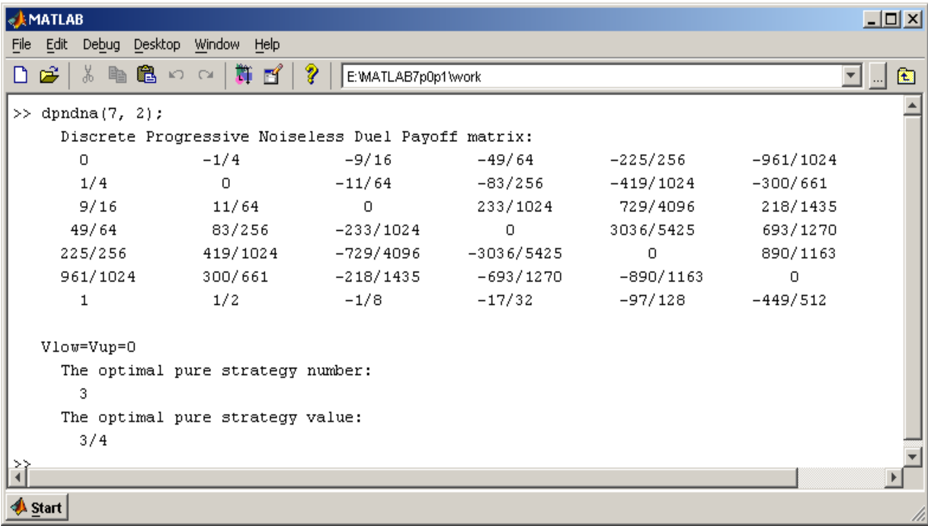


Рис. 2. При $N = 7$ та $\alpha = 2$ оптимальними є чисті стратегії $x = \frac{3}{4}$ та $y = \frac{3}{4}$ першого та другого гравців відповідно

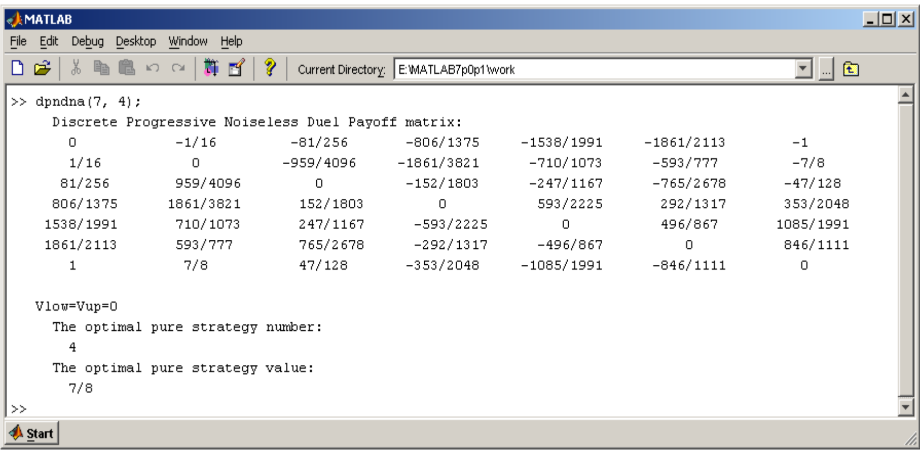


Рис. 3. При $N = 7$ та $\alpha = 4$ оптимальними є чисті стратегії $x = \frac{7}{8}$ та $y = \frac{7}{8}$ першого та другого гравців відповідно

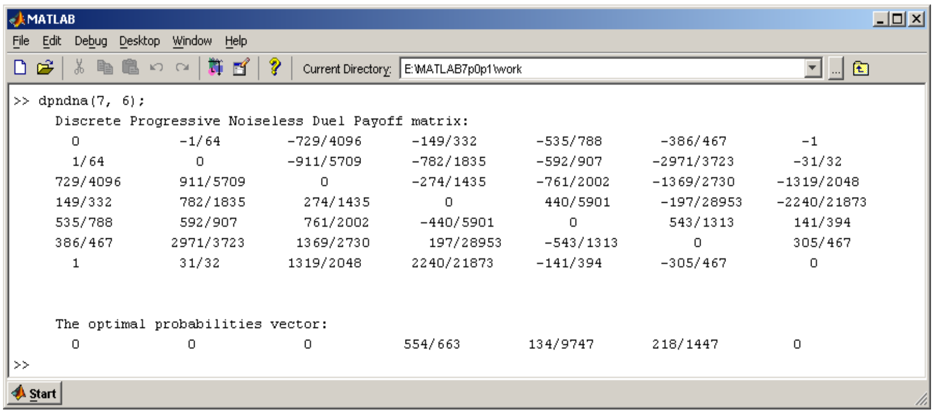


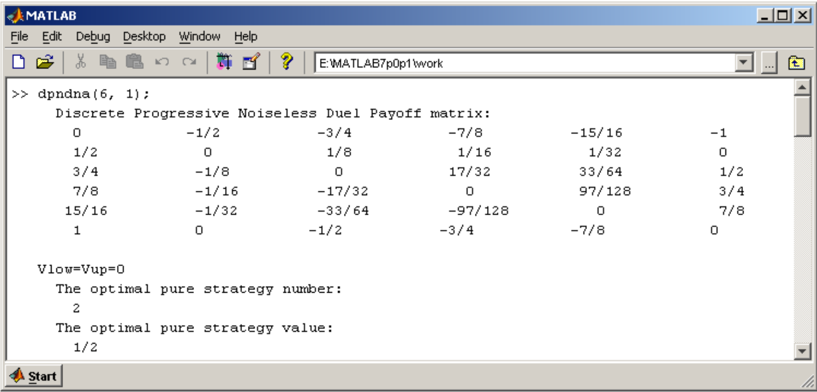
Рис. 4. При $N = 7$ та $\alpha = 6$ оптимальна поведінка полягає у виборі множини чистих стратегій $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{7}{8} & \frac{15}{16} & \frac{31}{32} & 1 \end{bmatrix}$ з імовірнісною мірою

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{554}{663} & \frac{134}{9747} & \frac{218}{1447} & 0 \end{bmatrix}$$

При користуванні модулем dpndna для $N > 2$ можна помітити, що при $\alpha = 1$ оптимальна поведінка гравця полягає у виборі ним чистої стратегії як середини одиничного сегмента $[0; 1]$. Іншими словами, у дискретній прогресуючій безшумній дуелі з лінійними функціями влучності ситуація $\{x_2, y_2\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ є рівноважною. Ще одною цікавою особливістю цієї дуелі є те, що при $\alpha = 2^q$ для $q \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ рівноважною є ситуація

$$\{x_{2+q}, y_{2+q}\} = \left\{\sum_{k=1}^{1+q} 2^{-k}, \sum_{k=1}^{1+q} 2^{-k}\right\} \quad \forall\, q = \overline{0, N-3}. \tag{12}$$

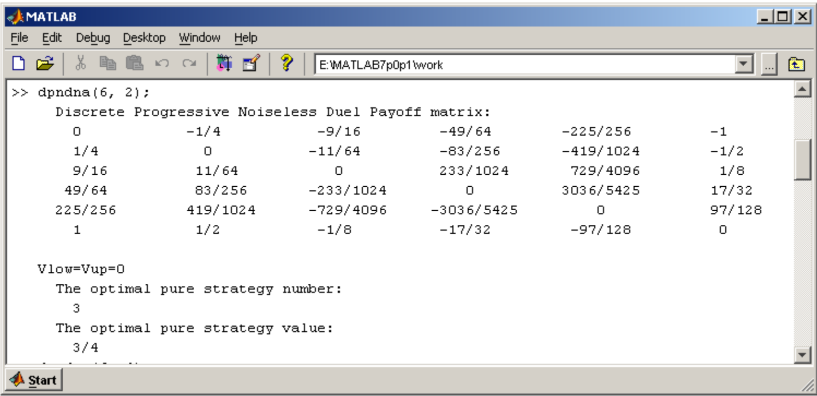
Це, нехай і не в аналітичний спосіб, досить легко перевіряється за допомогою запрограмованого модуля. Зокрема, на з рис. 5 видно, що при $N = 6$ та $\alpha = 1$, що відповідає лінійним функціям влучності, оптимальна чиста стратегія кожного гравця розташовується посередині одиничного сегмента $[0; 1]$. При "делінеаризації" функцій влучності з коефіцієнтом $\alpha = 2$ значення оптимальної чистої стратегії зміщується праворуч на четверть довжини одиничного сегмента $[0; 1]$ (рис. 6). При подальшій "делінеаризації" функцій влучності, використовуючи коефіцієнт $\alpha = 4$ (рис. 7), значення оптимальної чистої стратегії далі зміщується праворуч ще на одну восьму довжини одиничного сегмента $[0; 1]$. Таке зміщення триває до деякого граничного значення коефіцієнта α (рис. 8, 9). А при $q \in \mathbb{N} \setminus \left\{\overline{0, N-3}\right\}$ уже ситуація $\{x_N, y_N\} = \{1, 1\}$ є рівноважною (рис. 9, 10).



```
>> dpndna(6, 1);
    Discrete Progressive Noiseless Duel Payoff matrix:
      0            -1/2          -3/4          -7/8          -15/16        -1
     1/2            0            1/8           1/16           1/32          0
     3/4           -1/8           0            17/32          33/64        1/2
     7/8           -1/16         -17/32          0            97/128       3/4
    15/16          -1/32         -33/64        -97/128          0          7/8
      1             0            -1/2          -3/4           -7/8          0

  Vlow=Vup=0
    The optimal pure strategy number:
      2
    The optimal pure strategy value:
     1/2
```

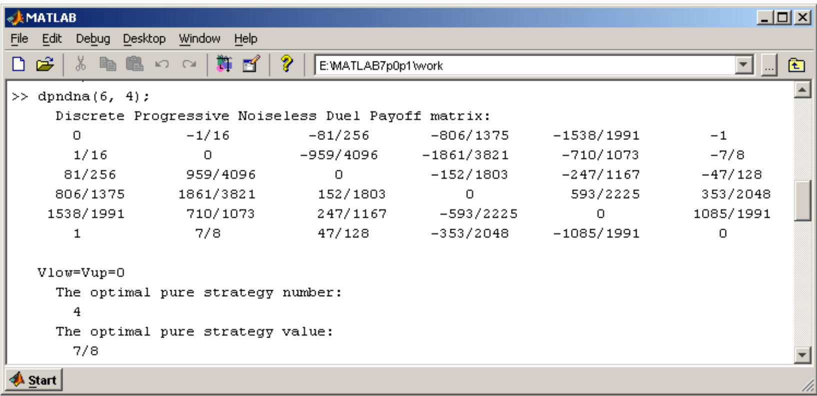
Рис. 5. Випадок з лінійними функціями влучності, де оптимальний постріл дуелянта знаходиться посередині



```
>> dpndna(6, 2);
    Discrete Progressive Noiseless Duel Payoff matrix:
      0            -1/4          -9/16         -49/64        -225/256        -1
     1/4            0            -11/64        -83/256       -419/1024      -1/2
     9/16          11/64           0           233/1024       729/4096       1/8
    49/64          83/256       -233/1024        0           3036/5425      17/32
   225/256        419/1024      -729/4096     -3036/5425         0          97/128
      1            1/2           -1/8          -17/32         -97/128         0

  Vlow=Vup=0
    The optimal pure strategy number:
      3
    The optimal pure strategy value:
     3/4
```

Рис. 6. “Делінеаризація” функцій влучності з коефіцієнтом $\alpha = 2$ і відповідний зсув оптимального пострілу дуелянта праворуч на четверть довжини одиничного сегмента



```
>> dpndna(6, 4);
    Discrete Progressive Noiseless Duel Payoff matrix:
      0            -1/16         -81/256       -806/1375     -1538/1991       -1
     1/16           0           -959/4096     -1861/3821     -710/1073      -7/8
    81/256        959/4096         0          -152/1803      -247/1167     -47/128
   806/1375      1861/3821       152/1803        0            593/2225     353/2048
  1538/1991       710/1073       247/1167     -593/2225         0         1085/1991
      1            7/8           47/128       -353/2048     -1085/1991        0

  Vlow=Vup=0
    The optimal pure strategy number:
      4
    The optimal pure strategy value:
     7/8
```

Рис. 7. Подальша “делінеаризація” функцій влучності з коефіцієнтом $\alpha = 4$, котра спричиняє подальше зсунення оптимального пострілу дуелянта

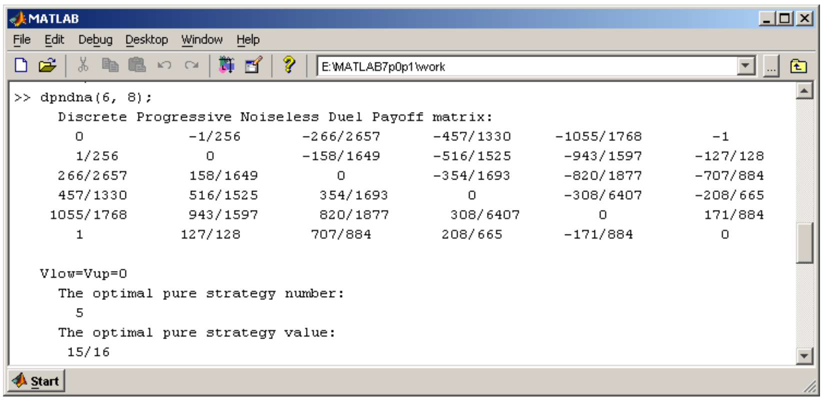


Рис. 8. При $N = 6$ зі зростанням ступеня нелінійності у геометричній прогресії оптимальний постріл дуелянта зміщується все більше до кінця періоду дуелі

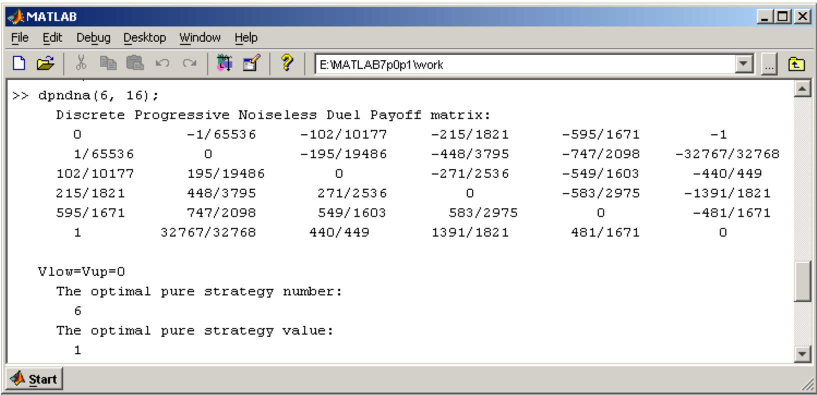


Рис. 9. Випадок з сильно нелінійними функціями влучності, котрі отримуються при $\alpha = 16$ і спричиняють перехід оптимального пострілу дуелянта у правий кінець одиничного сегмента чистих стратегій (граничний випадок)

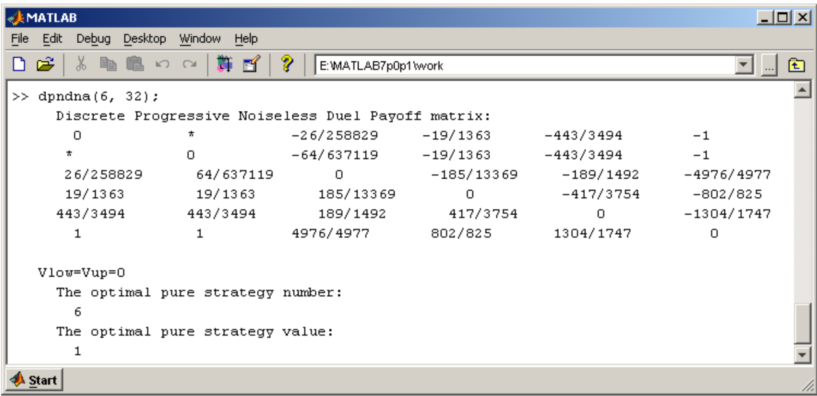


Рис. 10. Подальша "делінеаризація" функцій влучності після досягнення граничного випадку (переходу оптимального пострілу дуелянта у правий кінець одиничного сегмента чистих стратегій) не змінює оптимальної поведінки гравців

Висновок та перспектива подальших досліджень прогресуючих дискретних безшумних дуелей

Дискретна прогресуюча безшумна дуель з ядром (1) на кінцевій решітці (8) одиничного квадрата (2), у якій функціями влучності є (5) і (6), може бути моделлю тих конфліктно-керованих явищ, де рішення доводиться приймати лише на окремих етапах, причому значущість тих активних станів (чистих стратегій), котрі знаходяться ближче до правого кінця одиничного сегмента $[0;1]$, зростає у геометричній прогресії (або близько до цього). Створений модуль dpndna дозволяє побачити $N \times N$-матрицю $\mathbf{R} = \left(r_{ij}\right)_{N \times N}$ та швидко визначити розв'язок дуелі, яка є відповідною матричною грою. А оскільки оптимальна поведінка у довільній матричній грі безпосередньо реалізовується саме у чистих стратегіях, то при дослідженні конфліктно-керованих явищ, котрі описуються за допомогою дискретної прогресуючої безшумної дуелі, рекомендується впливати на них так (якщо це можливо), щоб у цих явищах з'являлась рівноважна ситуація $\{x_2, y_2\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$, (12) або $\{x_N, y_N\} = \{1, 1\}$ [17, 18]. У цьому полягатиме найбільш раціональне вирішення конфліктної ситуації.

У проведеній роботі, що важливо, отримані результати є дійсними лише для дуелі на кінцевій решітці (8) одиничного квадрата (2), де чисті стратегії розташовані у строгому порядку за геометричною прогресією. Така дискретна прогресуюча безшумна дуель у деякому смислі може вважатись ідеалізованою, адже зростання значущості чистих стратегій з наближенням до правого кінця одиничного сегмента $[0;1]$ може відбуватись і за іншим законом прогресії. Це у перспективі потребує глибшого дослідження, але там основна проблема буде у формалізації відповідних видів дуелей, адже швидке знаходження їх розв'язків, очевидно, є тільки технічною задачею.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васин А. А., Морозов В. В. Введение в теорию игр с приложениями к экономике: Учебное пособие. — М., 2003. — 278 с.
2. Воробьёв Н. Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 272 с.
3. Теория игр: Учеб. пособие для ун-тов / Л. А. Петросян, Н. А. Зенкевич, Е. А. Семина. — М.: Высшая школа, Книжный дом “Университет”, 1998. — 304 с.: ил.
4. Чикрий А. А. Конфликтно-управляемые процессы. — К.: Наук. думка, 1992. — 383 с.
5. Популярные лекции по математике. Выпуск 32. Вентцель Е. С. Элементы теории игр. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. — 67 с.
6. Оуэн Г. Теория игр: Пер. с англ. Изд. 2-е. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 216 с.
7. Романюк В. В. Моделирование выхода на рынок двух конкурирующих предприятий с помощью игровой бесшумной дуэли в MATLAB 7.0.1 //

Вісник Хмельницького національного університету. Економічні науки. — 2009. — № 3. — Т. 2. — С. 233 — 238.
8. Teraoka Y. A single bullet duel with uncertain information available to the duelists / Bull. Math. Statist. — N. 18, 1979. — P. 69 — 80.
9. Teraoka Y. A two-person game of timing with random arrival time of the object / Math. Japonica. — N. 24, 1979. — P. 427 — 438.
10. Baston V. J., Garnaev A. Y. A non-zero-sum war of attrition / ZOR-Mathematical Methods and Models of Operation Research. — N. 45, 1997. — P. 197 — 211.
11. Hamers H. A silent duel over a cake / ZOR-Mathematical Methods and Models of Operation Research. — N. 37, 1993. — P. 119 — 127.
12. Romanuke V. V. Determination of the optimal pure strategies subset as the latent predominance set in some matrix games // Scientific Papers of Donetsk National Technical University. “Informatics, Cybernetics and Computer Science”. — 2009. — Vol. 10 (153). — P. 46 — 53.
13. Романюк В. В. Адаптація методу реалізації оптимальних змішаних стратегій у матричній грі з порожньою множиною ситуацій рівноваги з відомою наперед кількістю раундів гри у програмному середовищі MATLAB // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. — 2009. — № 4. — С. 57 — 67.
14. Штовба С. Д. Проектирование нечетких систем средствами MATLAB. — М.: Горячая линия — Телеком, 2007. — 288 с.
15. Дьяконов В., Круглов В. Математические пакеты расширения MATLAB. Специальный справочник. — СПб.: Питер, 2001. — 480 с.: ил.
16. Romanuke V. V., Romanuke V. M. Resolution of the persecutor — prey system on the unit hypercube for the exponential annihilation probability // Збірник наукових праць факультету прикладної математики та комп’ютерних технологій Хмельницького національного університету. — 2009. — № 1 (2). — С. 74 — 88.
17. Романюк В. В. Метод реалізації принципу оптимальності у матричних іграх без сідлової точки // Вісник НТУ “ХПІ”. Тематичний випуск: Інформатика та моделювання. — Харків: НТУ “ХПІ”, 2008. — № 49. — С. 146 — 154.
18. Романюк В. В. Метод реалізації оптимальних змішаних стратегій у матричній грі з порожньою множиною сідлових точок у чистих стратегіях з відомою кількістю партій гри // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. — 2009. — № 2. — С. 45 — 52.

Надійшла 25.03.2010.