УДК 519.6

Построение базиса смешанной краевой задачи для применения вариационных методов

И. А. Баранов
Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Украина

В статье представлен метод построения базиса смешанной краевой задачи на основе базиса кубического B-сплайна, обладающего высокой аппроксимационной способностью (такого же порядка, как и стандартный базис B-сплайна). Данный метод заключается в построении граничных элементов базиса, удовлетворяющих краевым условиям задачи и учитывающих стыковку со стандартным базисом внутри области.

***Ключевые слова**: базис краевой задачи, вариационные методы, численное решение.*

В статті представлений метод побудови базису змішаної крайової задачі на основі базису кубічного B-сплайну, що має високу апроксимаційну здатність (такого ж порядку, як і стандартний базис B-сплайну). Даний метод полягає в побудові граничних елементів базису, які задовольняють крайовим умовам задачі і враховують стиковку зі стандартним базисом в середині області.

***Ключові слова:** базис крайової задачі, варіаційні методи, чисельне рішення.*

The method of construction of basis of the mixed boundary value problem based on the basis of cubic B-spline, which has a high approximation characteristics (the same order, as well as standard B-spline basis) is presented in the paper. This method consists in construction of boundary elements of basis which are satisfied the boundary conditions of problem and took into account the joint with a standard basis into a domain.

***Key words**: basis of the boundary value problem, variations method, numerical solution.*

Вариационные методы математической физики являются эффективным математическим аппаратом решения краевых задач для дифференциальных уравнений. Однако удовлетворение краевым условиям при использовании вариационных методов составляет зачастую серьезную проблему. Структурный метод R-функций [1-5] академика Рвачева В.Л. позволил решить эту проблему. Данный метод преобразует некоторый стандартный базис в базис краевой задачи, что позволяет точно учесть граничные условия в разрешающем алгоритме. Структура решения краевой задачи построенная по методу R-функций преобразует все элементы базиса под действием некоторого оператора. Такое преобразование требует больших затрат машинного времени кроме того, чем сложнее область решения задачи, тем сложнее функции, входящие в оператор преобразования базиса, что также увеличивает время счета. Кроме того, аппроксимационные свойства такого базиса существенно зависят от оператора преобразования. Таким образом, актуальной задачей является построение эффективных базисов краевых задач для дифференциальных уравнений.

С вычислительной точки зрения, наиболее удобными являются базисы, состоящие из финитных функций, которые получаются переносом некоторого элемента [1]. Сейчас, широкое употребление получили базисные сплайны [6], благодаря их высоким аппроксимационным свойствам и удобству применения.

В данной работе предлагается метод построения базиса краевой задачи на основе базиса B-сплайна.

Идея метода состоит в следующем: элементы базиса, носители которых целиком лежат внутри области решения краевой задачи, остаются без изменения, таким образом, обеспечивается аппроксимация в некоторой области, целиком лежащей в области решения задачи, а элементы базиса, носители которых пересекают границу области решения задачи, заменяются на базисные элементы, построенные специальным образом с учетом стыковки с базисом внутри области и удовлетворяющие краевым условиям задачи. Благодаря такой схеме можно существенно увеличивается скорость решения краевых задач.

Рассмотрим одномерный случай.

$$\begin{cases} Au(x) = f(x), \quad u \in (a,b); \quad (1) \\ \\ k_0^1 u(x) + k_1^1 u'(x)\Big|_{x=a} = 0; \quad (2) \\ k_0^2 u(x) + k_1^2 u'(x)\Big|_{x=b} = 0; \quad (3) \end{cases}$$

Пусть для определенности решается задача на отрезке $[0,1]$. И пусть рассматривается задача построения базиса на основе базиса кубического B-сплайна $\{\varphi_i\}$ с диаметром носителя $2h$. Элементы, носители которых лежат внутри области, остаются без изменения (рис. 1).

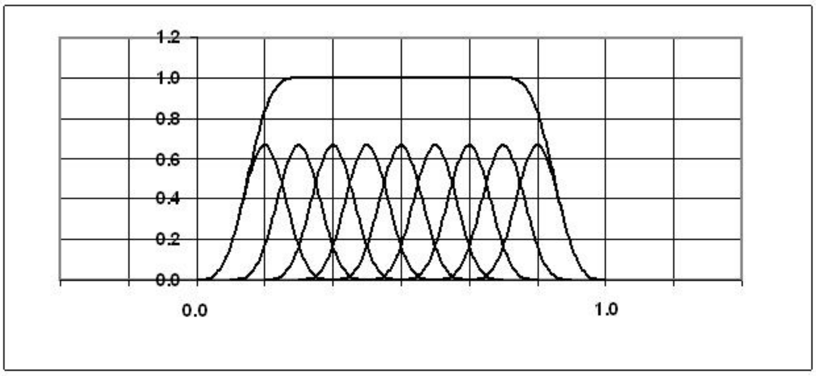

Рис. 1. Элементы базиса, носители которых целиком лежат внутри области

Рассмотрим метод построения граничных элементов базиса, удовлетворяющих краевому условию в 0 (в 1 – аналогично).

Пусть есть некоторая функция $\omega(x)$, такая что: $\omega(0) = 0$, $\omega'(0) = 1$.

Рассмотрим произвольную функцию $F(x)$. Рассмотрим некоторое приближение функции $F(x)$ в окрестности 0.

$$F(x) \approx f(x) + \delta = a\omega(x)^2 + b\omega(x) + c + \delta$$

Данную функцию необходимо разложить по новому базису, удовлетворяющему краевым условиям.

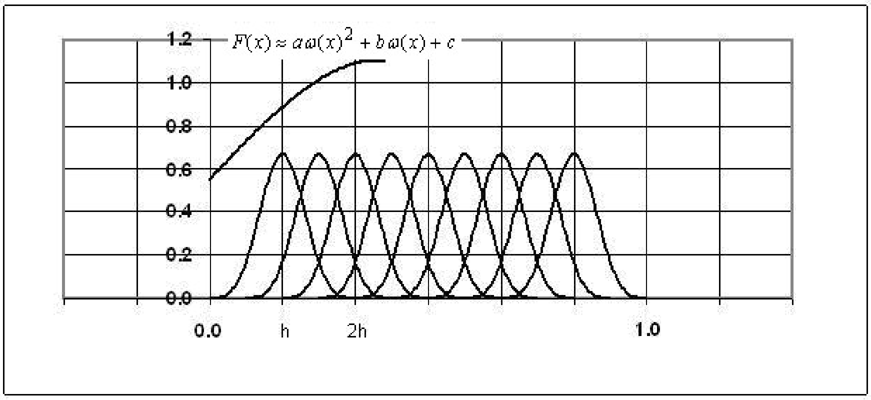

Рис. 2. Функция $F(x)$

Разложим функцию $f(x)$ по новому базису в некоторой окрестности 0.

Сначала построим разложение функции $f(x) = a\omega(x)^2 + b\omega(x) + c$ по стандартному базису кубического B- сплайна:

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{2n} c_i \varphi_i \ .$$

Рассмотрим $f(x) \approx f_2(x) + f_1(x) = \sum_{i=0}^{2} c_i \varphi_i + \sum_{i=3}^{2n} c_i \varphi_i$ (рис.2).

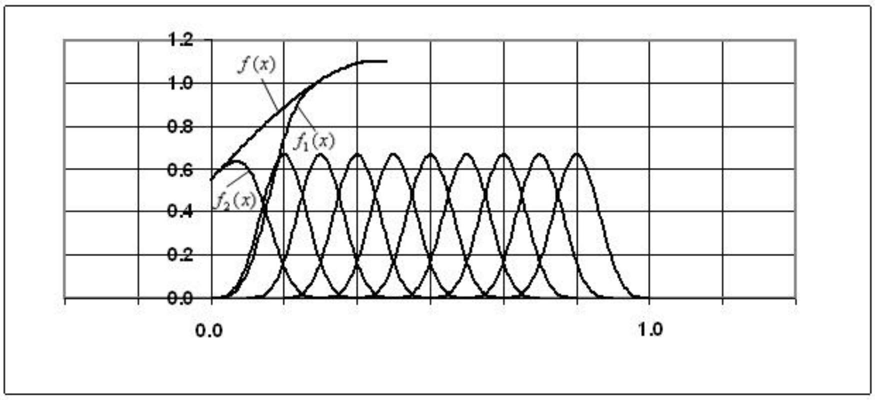

Рис. 3. Функции $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$

Функция $f_1(x)$ остается без изменения.

Рассмотрим следующие разложения:

$$1 = \sum_{i=3}^{5} c_i^0 \varphi_i \ \ \omega(x) \approx \sum_{i=3}^{5} c_i^1 \varphi_i \ , \ \omega^2(x) \approx \sum_{i=3}^{5} c_i^2 \varphi_i \ \text{ в точке } \frac{3h}{2} .$$

Таким образом, чтобы $\left(\omega^i(x)\right)^{(j)}\Big|_{\frac{3h}{2}} = \sum_{k=3}^{5} c_k^i \varphi^{(j)}{}_k\Big|_{\frac{3h}{2}}$, i,j=0,1,2.

Теперь рассмотрим функции:

$$g_i(x) = \begin{cases} \omega^i(x) - \sum_{k=3}^{5} c_k^i \varphi_k, & x \in \left[0, \dfrac{3h}{2}\right] \\ 0, \quad x > \dfrac{3h}{2} \end{cases}, \quad i = 0,1,2 .$$

Функции $g_i(x) \in C^2[0,1]$.

Теперь в качестве функции $f_2(x)$ возьмем следующую:

$\widetilde{f}_2 = ag_2(x) + bg_1(x) + cg_0(x)$.

$f(x) \approx \widetilde{f}_2(x) + f_1(x) = ag_2(x) + bg_1(x) + cg_0(x) + \sum_{i=3}^{2n} c_i \varphi_i$.

Рассмотрим случай удовлетворения условию $\left(k_1^0 F(x) - k_2^0 F'(x)\right)\Big|_0 = 0$. Случай $\left(k_1^1 F(x) + k_2^1 F'(x)\right)\Big|_1 = 0$ рассматривается аналогично.

Потребуем выполнения граничного условия от функции $f(x)$:

$$\left(k_1^0 f(x) - k_2^0 f'(x)\right)\Big|_0 = \left(k_1^0\left(a\omega^2(x) + b\omega(x) + c\right) - k_2^0\left(2a\omega(x)\omega'(x) + b\omega'(x)\right)\right)\Big|_0 = k_1^0 c - k_2^0 b = 0$$

Отсюда следует $\begin{cases} c = \dfrac{k_2^0}{k_1^0} b, \quad k_1^0 \neq 0 \\ b = 0, \quad k_1^0 = 0 \end{cases}$

Таким образом:

$$f_2(x) = ag_2(x) + bg_1(x) + \frac{k_2^0}{k_1^0} bg_0(x) = ag_2(x) + b\left(g_1(x) + \frac{k_2^0}{k_1^0} g_0(x)\right), \quad k_1^0 \neq 0$$

или

$$f_2(x) = ag_2(x) + cg_0(x), \quad k_1^0 \neq 0$$

Таким образом, функции

$$\begin{cases} \left\{ g_2(x), \quad g_1(x) + \dfrac{k_2^0}{k_1^0} g_0(x) \right\}, \quad k_1^0 \neq 0 \\ \left\{ g_2(x), \quad g_1(x) \right\}, \quad k_1^0 = 0 \end{cases}$$

можно взять в качестве первых двух элементов базиса. Данные функции удовлетворяют условию $\left(k_1^0\tilde{\varphi}_i - k_2^0\tilde{\varphi}_i'\right)\Big|_0 = 0$.

Теорема

Если в качестве функции $\omega(x)$ взять функцию $\omega(x) = x$, то любую функцию из пространства сплайн-функций, удовлетворяющую граничным условиям вида (2) можно точно разложить по построенному базису.

Доказательство

Рассмотрим следующие разложения:

$$1 = \sum_{i=0}^{2n} c_i^0\varphi_i \quad x = \sum_{i=0}^{2n} c_i^1\varphi_i\,,\ x^2 = \sum_{i=0}^{2n} c_i^2\varphi_i\,,$$

Тогда:

$$g_i(x) = \sum_{k=0}^{2} c_k^i\varphi_k\,, \quad i = 0,1,2\,.$$

Рассмотрим произвольную функцию вида: $\sum_{i=0}^{2n} c_i\varphi_i$.

Предположим, что:

$$\sum_{i=0}^{2n} c_i\varphi_i = a\sum_{i=0}^{2} c_i^2\varphi_i + b\sum_{i=0}^{2} c_i^1\varphi_i + c\sum_{i=0}^{2} c_i^0\varphi_i + \sum_{i=3}^{2n} c_i\varphi_i$$

Тогда

$$\sum_{i=0}^{2} c_i\varphi_i = a\sum_{i=0}^{2} c_i^2\varphi_i + b\sum_{i=0}^{2} c_i^1\varphi_i + c\sum_{i=0}^{2} c_i^0\varphi_i$$

Получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} c_0^2 & c_0^1 & c_0^0 \\ c_1^2 & c_1^1 & c_1^0 \\ c_2^2 & c_2^1 & c_2^0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Столбцы матрицы линейно независимые, так как функции $\{1, x, x^2\}$ линейно независимые. Таким образом детерминант матрицы detC≠0. Следовательно, существует C^{-1}.

Тогда

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = C^{-1}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, всегда можно представить:

$$\sum_{i=0}^{2n} c_i\varphi_i = a\sum_{i=0}^{2} c_i^2\varphi_i + b\sum_{i=0}^{2} c_i^1\varphi_i + c\sum_{i=0}^{2} c_i^0\varphi_i + \sum_{i=3}^{2n} c_i\varphi_i\,.$$

Теперь, если потребовать выполнения граничного условия вида (2) от произвольной функции из пространства сплайн-функций $\left(k_1^0 \sum_{i=0}^{2n} c_i \varphi_i - k_2^0 \left(\sum_{i=0}^{2n} c_i \varphi_i \right)' \right)\Bigg|_0 = 0$, приходим к условиям $\begin{cases} c = \dfrac{k_2^0}{k_1^0} b, & k_1^0 \neq 0 \\ b = 0, & k_1^0 = 0 \end{cases}$.

Теорема доказана.

Реализация предложенного метода

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} f''(x) = -\pi^2 \sin(\pi x), \quad x \in [0,1]; \\ f'(x) + f(x)\big|_0 = 0; \\ - f'(x) + f(x)\big|_1 = 0; \end{cases}$$

Аналитическим решением данной задачи будет функция: $\sin(\pi x) - \pi$ (рис.4).

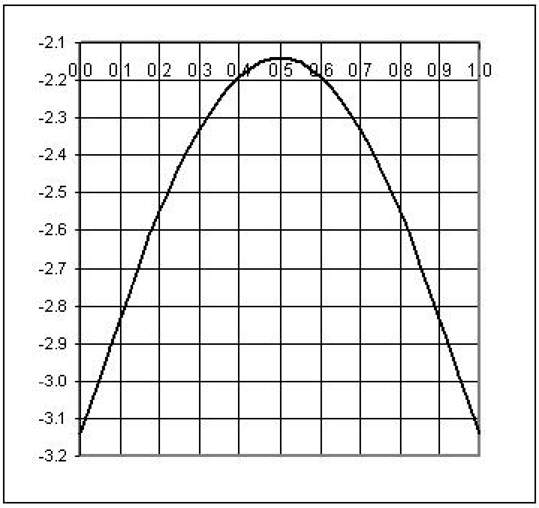

Рис. 4. Функция $\sin(\pi x) - \pi$

Для данной задачи применим метод наименьших квадратов [3].

Результаты вычислительного эксперимента (количество сплайнов 21) представлены в таблице 1.

Табл. 1.

x	solution	sin(xπ)-π	Abs(solution-(sin(xπ)-π))
0.00000000000	-3.14159006974	-3.14159265359	0.00000258385
0.10000000000	-2.83257333046	-2.83257565921	0.00000232876
0.20000000000	-2.55380530275	-2.55380740130	0.00000209854
0.30000000000	-2.33257374338	-2.33257565921	0.00000191584

0.40000000000	-2.19053433877	-2.19053613729	0.00000179853
0.50000000000	-2.14159089549	-2.14159265359	0.00000175810
0.60000000000	-2.19053433878	-2.19053613729	0.00000179852
0.70000000000	-2.33257374340	-2.33257565921	0.00000191582
0.80000000000	-2.55380530278	-2.55380740130	0.00000209851
0.90000000000	-2.83257333050	-2.83257565921	0.00000232872
1.00000000000	-3.14159006979	-3.14159265359	0.00000258380

Рассмотрим краевую задачу Дирихле:

$$\begin{cases} f''(x) = -\pi^2 \sin(\pi x), \quad x \in [0,1]; \\ f(x)\big|_0 = -\pi; \\ f(x)\big|_1 = -\pi. \end{cases}$$

Пусть $f(x) = f_1(x) - \pi$. Тогда данная задача сводится к следующей:

$$\begin{cases} f_1''(x) = -\pi^2 \sin(\pi x), \quad x \in [0,1]; \\ f_1(x)\big|_0 = 0; \\ f_1(x)\big|_1 = 0. \end{cases}$$

Аналитическим решением однородной задачи будет функция $f_1(x) = \sin(\pi x)$, а неоднородной задачи: $f(x) = \sin(\pi x) - \pi$.

Результаты вычислительного эксперимента(количество сплайнов 21) представлены в таблице 2:

Табл. 2.

x	solution	sin(xπ)-π	Abs(solution-(sin(xπ)-π))
0.00000000000	-3.14159265359	-3.14159265359	0.00000000000
0.10000000000	-2.83257591430	-2.83257565921	0.00000025509
0.20000000000	-2.55380788660	-2.55380740130	0.00000048530
0.30000000000	-2.33257632722	-2.33257565921	0.00000066800
0.40000000000	-2.19053692260	-2.19053613729	0.00000078531
0.50000000000	-2.14159347932	-2.14159265359	0.00000082573
0.60000000000	-2.19053692260	-2.19053613729	0.00000078531
0.70000000000	-2.33257632722	-2.33257565921	0.00000066800
0.80000000000	-2.55380788660	-2.55380740130	0.00000048530
0.90000000000	-2.83257591430	-2.83257565921	0.00000025509
1.00000000000	-3.14159265359	-3.14159265359	0.00000000000

Выводы

В работе представлен метод построения базиса смешанной краевой задачи на основе базиса B-сплайна, обладающий высокой аппроксимационной способностью (такого же порядка, как и стандартный базис).

Особенно эффективным данный подход будет для дифференциальных уравнений, оператор которых представляет линейную комбинацию самой функции, и ее различных производных. Тогда, например, для методов наименьших квадратов, Ритца, и др. [7] элементы матрицы системы линейных алгебраических уравнений будут повторяться и их можно будет вычислить даже аналитически.

Данный метод можно применить и для других граничных условий и в дальнейшем данный метод будет распространен на двумерный случай.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. –552 с.
2. Баранов И.А., Кравченко О.В., Суворова И.Г. Метод R−функций для расчета взаимосвязанных полей в гидропотоках//Вісник ХНУ. − Харьков, 2007. − №780. − С.9−18.
3. Баранов И.А., Кравченко О.В., Суворова И.Г. Расчет гидродинамических характеристик потока вязкой несжимаемой жидкости методом R − функций// Вісник ХНУ. − Харьков, 2008. − №809. − С. 9−19.
4. Максименко-Шейко К.В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. – Харьков, ИПМаш НАН Украины, 2009. –306 с.
5. Суворова И.Г, Кравченко О.В. Математическое моделирование потока жидкости методом R−функций // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Дніпропетровськ, 2006. – Випуск 4 (45). – С. 57 – 69.
6. Д. Роджерс, Дж.Адамс. Математические основы машинной графики.– М. Мир, 2001.- 604 с.
7. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М. Наука, 1970.- 512 с.

Надійшла - 06.07.2010.