УДК 518.61.001.573

Метод «фіктивної фільтрації» математичного моделювання сингулярно-збурених процесів типу «конвекція-теплова дифузія- теплообмін»

А. Я. Бомба, Є. В. Савюк, О. А. Фурсачик

Рівненський державний гуманітарний університет, Національний університет водного господарства та природокористування, Україна

Запропоновано методологію побудови математичних моделей процесів охолодження водойм за умов превалювання масообмінних та конвективних їх складових над дифузійними, в основі якої – апроксимація поля швидкості деяким фіктивним фільтраційним квазіідеальним полем з наступним застосуванням наближених методів квазіконформних відображень та методів теорії збурень.

Ключові слова: *сингулярні збурення, конвекція, теплообмін, теплова дифузія, квазіконформні відображення.*

Предложена методология построения математических моделей процессов охлаждения водойомов при условиях превалирования массообменных и конвективных их составляющих над диффузионными, в основе которой – аппроксимация поля скоростей некоторым фиктивным фильтрационным полем с последующим применением методов квазиконформных отображений и методов теории возмущений.

Ключевые слова: *сингулярные возмущения, конвекция, теплообмен, тепловая диффузия, квазиконформные отображения.*

Construction methodology of mathematical modelling of water body cooling processes is proposed upon condition of advantage of its mass-transferring and convective components over diffusive. It is based on velocity field approximation with some fictional quasi-ideal filtration field with the following use of proximate quasi-conformal reflections and perturbation theory**.**

Key words: *singular perturbation, convection, heat transfer, thermal diffusion, quasi-conformal reflections.*

1. Вступ

Існує низка підходів до математичного моделювання процесів охолодження водних середовищ (див., напр., [8,9] тощо). Як відомо, «внески» кожної із компонент (теплообміну, теплових конвекції та дифузії тощо) таких процесів можуть суттєво (на порядки) відрізнятись. Причому, у багатьох випадках акцент робиться на дослідженні конвективних їх складових, що пов’язано із проблемами розв’язання надто складних задач для диференціальних рівнянь типу Навьє-Стокса. Такі підходи є, безумовно, ефективними, оскільки враховується тертя, зокрема, «близькість нулю» швидкості течії поблизу берегових ліній (навіть – прибереговi «вихрові протилежності»), але обчислювальні затрати при цьому є надто великими.

Нами, при прогнозуванні таких процесів у випадках превалювання їх масообмінних та конвективних складових над дифузійними, пропонується підхід-аналог до постановки, розв’язання та дослідження розв’язків сингулярно-збурених задач типу «фільтрація-конвекція-дифузія», де поле швидкості будується шляхом заміни реальної течії деяким фіктивним квазіідеальним фільтраційним полем з наступним застосуванням наближених методів квазіконформних відображень[1,2] та теорії збурень[2,4,5].

2. Загальна постановка задачі

Розглядається процес теплопровідності у водоймі-охоложувачі – однозв'язній чотирикутній криволінійній області G_z $(z = x + iy)$ (рис.1а)), обмеженій чотирма гладкими лініями: $AB = \{z : y = 0,\ a \le x \le b\}, CD = \{z : y = 0,\ c \le x \le d\}$

$$AD = \left\{(x,y) : \sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{i+j=k} p_{ij}x^i y^j\right) = 0\right\},\quad BC = \left\{(x,y) : \sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{i+j=k} q_{ij}x^i y^j\right) = 0\right\},$$

де коефіцієнти відповідних многочленів p_{ij} і q_{ij} знаходяться на основі експериментальних даних шляхом інтерполяції. Через ділянку AB в G_z поступає нагріта рідина (вода), а через CD – виходить із неї охолодженою, AD – непроникна для рідини берегова лінія. При цьому вважаємо, що безпосереднім охолоджуючим фактором є теплообмін з навколишнім середовищем (зокрема, за рахунок випаровування).

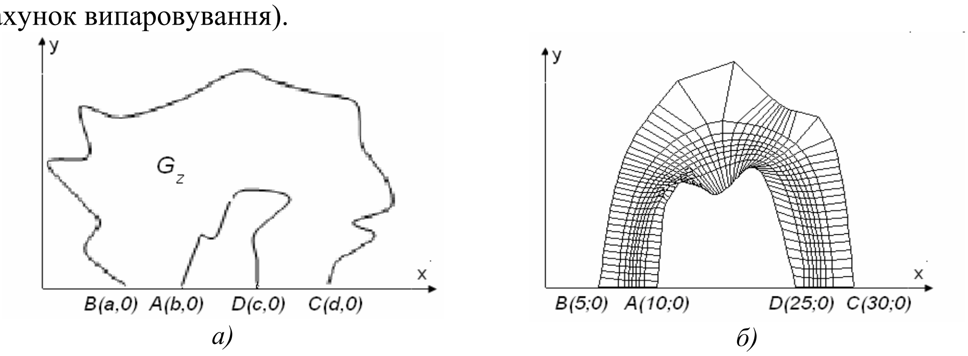


Рис. 1. Фізична область G_z (а) та динамічна сітка розрахункової області (б)

При побудові відповідної моделі припускаємо, що переміщення водяних мас можна розглядати як деяку квазіідеальну течію в даній області G_z із деяким "фіктивним" коефіцієнтом провідності:

$$k = (\alpha_1\psi(Q-\psi)+\alpha_2)\beta(T), \tag{1}$$

де Q – потік через довільний поперечний переріз відповідної трубки течії, $T = T(x,y,t)$ – температура в точці $(x,y)\in G_z$ в момент часу *t*, $\psi = \psi(x,y)$ - функція течії, коефіцієнт $\beta(T)$ – характеризує вплив температури на опір середовища, доданок $\alpha_2\beta(T)$ (за рахунок величини α_2) є малим вздовж берегових ліній $\psi(x,y)=0$ та $\psi(x,y)=Q$, а параметр α_1 забезпечує виконання рівності $Q = \int\limits_{AB} -v_y dx + v_x dy$.

Відповідну модельну задачу для області $G_z \times (0,\infty)$ запишемо у вигляді:

$$\varepsilon\left(T''_{xx}+T''_{yy}\right)-v_x(x,y)T'_x-v_y(x,y)T'_y+f\left(T,x,y,t,f_0,f_1,f_2\right)=T'_t\,; \qquad (2)$$

$$T(x,y,t)\big|_{t=0}=T_0^*(x,y)\,; \qquad T(x,y,t)\big|_{AB\times(0,t)}=T_*^0(t),\quad T'_n(x,y,t)\big|_{CD\times(0,t)}=0\,; \qquad (3)$$

$$\left(BT'_n(x,y,t)-A\left(T-T_*^*\right)\right)\Big|_{BC\times(0,t)}=0\,,\ T'_n(x,y,t)\big|_{AD\times(0,t)}=0\,; \qquad (4)$$

$$\vec{v}=k(\psi,Q,T)grad\varphi,\quad div\vec{v}=0\,,\ \varphi\big|_{AB}=\varphi_*\,,\ \varphi\big|_{CD}=\varphi^*\,,\ \varphi'_n\big|_{AD}=0\,,\ \varphi'_{n\,BC}=0\,, \qquad (5)$$

де $\varphi=\varphi(x,y)$ - квазіпотенціал, $\vec{v}=\left(v_x(x,y),v_y(x,y)\right)$ - швидкість поширення тепла, $f\left(T,f_0,f_1,f_2\right)=f_2T^2+f_1T+f_0$, $f_i=f_i\left(\alpha,\beta,T_{пов},\gamma,\delta,T_{пр}\right)$ - наперед задані функції відповідно від тепловіддачі випаровуванням та конвекцією, температури та абсолютної вологості повітря, хмарності, природної температури, такі, що $f_1^2>4f_0f_2$, $f_i\geq 0$, ($i=0,1,2$), $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до відповідної ділянки границі даної області, ε – коефіцієнт теплової дифузії(малий параметр), $T_*^0(t)$ – функція, що описує температуру на вході у водойму, $T_0^*(x,y)$ - температура в початковий момент часу, параметр φ_* визначається рівнем води на вході у водойму, а φ^* – потужністю насосів, необхідною для «відбору» потоку величиною Q.

3. Алгоритм розв'язку

Задача на знаходження поля швидкостей (5) (при фіксованій в деякий момент часу температурі) зводиться до квазіконформного відображення $\omega=\omega(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$ розглядуваної області G_z на відповідну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega=\left\{\omega:\varphi_*<\varphi<\varphi^*,\ 0<\psi<Q\right\}$ з невідомим параметром Q [1,2]:

$$\begin{gathered}k(\psi,Q,T)\varphi'_x=\psi'_y,\ k(\psi,Q,T)\varphi'_y=-\psi'_x,\\ \varphi\big|_{AB}=\varphi_*,\ \varphi\big|_{CD}=\varphi^*,\ \psi\big|_{AD}=0,\ \psi\big|_{BC}=Q\end{gathered} \qquad (6)$$

або до відповідної оберненої задачі на квазіконформне відображення $z(\omega)=x(\varphi,\psi)+iy(\varphi,\psi)$ (області G_ω на G_z при відповідності чотирьох кутових точок)[3]:

$$k(\psi,Q,T)y'_\psi=x'_\varphi,\quad k(\psi,Q,T)x'_\psi=-y'_\varphi,\quad (\varphi,\psi)\in G_\omega, \qquad (7)$$

$$\begin{cases}x(\varphi_*,\psi)=0,\ \ x(\varphi^*,\psi)=0,\ \ 0\leq\psi\leq Q,\\ \sum\limits_{k=0}^{m}\left(\sum\limits_{i+j=k}p_{i,j}x^i(\varphi,0)y^j(\varphi,0)\right)=0,\quad \sum\limits_{k=0}^{m}\left(\sum\limits_{i+j=k}q_{i,j}x^i(\varphi,Q)y^j(\varphi,Q)\right)=0,\ \ \varphi_*\leq\varphi\leq\varphi^*.\end{cases} \qquad (8)$$

При цьому зазначимо, що тут під «обернення» розуміємо і перехід від квазіконформного відображення фізичної області G_z на відповідну область комплексного квазіпотенціалу G_ω до більш вигідного оберненого відображення $G_\omega\to G_z$ і те, що задача на квазіконформне відображення $G_z\to G_\omega$ ($G_\omega\to G_z$) є ще й оберненою задачею у традиційному розумінні (коли за додатковими відомостями про розв'язок задачі, знаходять ще й невідомі коефіцієнти, що входять у рівняння, граничні умови та ін.), адже при постановці крайової задачі в області G_{ω} невідомим є її параметр Q(повна витрата). Вважаємо, що дана задача є розв'язаною[1,3,9].

У змінних (φ,ψ,t) задача (2)-(4) для області $G_{\omega}\times(0,\infty)$ набуває вигляду:

$$\varepsilon v^2(\varphi,\psi)\left(U''_{\varphi\varphi}+U''_{\psi\psi}\right)-v^2(\varphi,\psi)U'_{\varphi}+F(U,f_0,f_1,f_2)=U'_t\,, \tag{9}$$

$$U(\varphi_*,\psi,t)\big|_{AB\times(0,t)}=U_*^0(\psi,t),\qquad U(\varphi,\psi,t)\big|_{t=0}=U_0^*(\varphi,\psi), \tag{10}$$

$$U'_{\varphi}(\varphi^*,\psi,t)\big|_{CD\times(0,t)}=0\,,\ \ \beta U'_{\psi}-\alpha\left(U-U_*^*\right)\big|_{BC\times(0,t)}=0\,,\ \ U'_{\psi}\big|_{AD\times(0,t)}=0\,, \tag{11}$$

де $U(\varphi,\psi,t)=T(x(\varphi,\psi),y(\varphi,\psi),t)$, $U_*^0(\varphi,\psi,t)=T_*^0(x(\varphi,\psi),y(\varphi,\psi),t)$, $U_0^*(\varphi,\psi,t)=T_0^*(x(\varphi,\psi),y(\varphi,\psi),t)$, $U_*^*(\varphi,\psi,t)=T_*^*(x(\varphi,\psi),y(\varphi,\psi),t)$, $F(U(\varphi,\psi,t),f_0,f_1,f_2)=f(T(x(\varphi,\psi),y(\varphi,\psi),t),f_0,f_1,f_2)$.

Розв'язок сингулярно-збуреної задачі (9) – (11) шукаємо у вигляді асимптотичного ряду:

$$\begin{aligned}U(\varphi,\psi,t)&=U_0(\varphi,\psi,t)+\varepsilon U_*(\varphi,\psi,t)+\sum_{i=0}^{2}\varepsilon^i\Pi_i(\xi,\psi,t)+\sum_{i=0}^{2}\varepsilon^{i/2}\underline{\Pi}_{i/2}(\varphi,\mu,t)+\\&+\sum_{i=0}^{2}\varepsilon^{i/2}\overline{\Pi}_{i/2}(\varphi,\eta,t)+R(\varphi,\psi,t),\end{aligned} \tag{12}$$

де $R(\varphi,\psi,t)$ – залишковий член; $U_0(\varphi,\psi,t)$, $U_*(\varphi,\psi,t)$– члени регулярної частини асимптотики; $\Pi_i(\xi,\psi,t)$, $\left(i=\overline{0,2}\right)$ – функції типу примежевого шару в околі $\varphi=\varphi^*$ (поправки на виході течії) $\underline{\Pi}_{i/2}(\varphi,\mu,t)$, $\overline{\Pi}_{i/2}(\varphi,\eta,t)$ – функції типу примежевого шару вздовж граничних ліній течії (що враховують процес «охолодження» течії берегами); $\xi=\dfrac{\varphi^*-\varphi}{\varepsilon}$, $\mu=\dfrac{\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\eta=\dfrac{Q-\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$ – відповідні розтяги. Дані функції знаходимо шляхом підстановки (12) в (9)–(11), з подальшим застосуванням стандартної «процедури прирівнювання» та розв'язанням відповідних простіших задач[4]. Зокрема, стосовно відповідної конвективної складової розв'язку U_0 та дифузійної поправки U_* приходимо до таких задач:

$$v^2(\varphi,\psi)(U_0)'_{\varphi}+(U_0)'_t+\left(f_2U_0^2+f_1U_0+f_0\right)=0,$$

$$U_0\big|_{t=0}=U_0^*(\varphi,\psi),U_0\big|_{\varphi=0}=U_*^0(\varphi,t);$$

$$v^2(\varphi,\psi)(U_*)'_{\varphi}+(U_*)'_t+\tilde{f}U_*+\tilde{\tilde{f}}=0,\ \ U_*(\varphi,\psi,0)=U_*(0,\psi,t)=0,$$

$$\tilde{f}=f_1+2U_0f_2\,,\ \tilde{\tilde{f}}=(U_0)''_{\varphi\varphi}+(U_0)''_{\psi\psi}\,.$$

В результаті їх розв'язання маємо:

$$
U_0(\varphi,\psi,t)=\begin{cases}
\dfrac{\sqrt{f_1^2-4f_0f_2}\left(1+\dfrac{2f_2U_*^0(\psi;t-f(\varphi;\psi))+f_1-\sqrt{f_1^2-4f_0f_2}}{2f_2U_*^0(\psi;t-f(\varphi;\psi))+f_1+\sqrt{f_1^2-4f_0f_2}}\,e^{f(\varphi;\psi)\sqrt{f_1^2-4f_0f_2}}\right)}{2f_2\left(1-\dfrac{2f_2U_*^0(\psi;t-f(\varphi;\psi))+f_1-\sqrt{f_1^2-4f_0f_2}}{2f_2U_*^0(\psi;t-f(\varphi;\psi))+f_1+\sqrt{f_1^2-4f_0f_2}}\,e^{f(\varphi;\psi)\sqrt{f_1^2-4f_0f_2}}\right)}- \\
-\dfrac{f_1}{2f_2}, \qquad t>f(\varphi,\psi), \\
\dfrac{\sqrt{f_1^2-4f_0f_2}\left(1+\dfrac{2f_2U_{*0}^*\left(f^{-1}(\varphi;\psi)-t;\psi\right)+f_1-\sqrt{f_1^2-4f_0f_2}}{2f_2U_{*0}^*\left(f^{-1}(\varphi;\psi)-t;\psi\right)+f_1+\sqrt{f_1^2-4f_0f_2}}\,e^{f(\varphi;\psi)\sqrt{f_1^2-4f_0f_2}}\right)}{2f_2\left(1-\dfrac{2f_2U_{*0}^*\left(f^{-1}(\varphi;\psi)-t;\psi\right)+f_1-\sqrt{f_1^2-4f_0f_2}}{2f_2U_{*0}^*\left(f^{-1}(\varphi;\psi)-t;\psi\right)+f_1+\sqrt{f_1^2-4f_0f_2}}\,e^{f(\varphi;\psi)\sqrt{f_1^2-4f_0f_2}}\right)}- \\
-\dfrac{f_1}{2f_2}, \qquad t\le f(\varphi,\psi),
\end{cases}
$$

де $f(\varphi,\psi)=\int\limits_0^{\varphi}\dfrac{d\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi},\psi)}$, f^{-1} – функція обернена до f стосовно змінної φ (зазначимо, що така функція існує, оскільки підінтегральна функція v^{-2} – неперервно диференційована, обмежена, додатньо визначена).

$$
U_*(\varphi,\psi,t)=\begin{cases}
-\int\limits_0^{t}\tilde{\tilde{f}}\left(f^{-1}\left(\tilde{t}-t+f(\varphi,\psi)\right),\psi,\tilde{t}\right)e^{\int_0^{\tilde{t}}\tilde{f}\left(f^{-1}\left(\tilde{\tilde{t}}-t+f(\varphi,\psi)\right),\psi,\tilde{\tilde{t}}\right)d\tilde{\tilde{t}}}\,d\tilde{t}\times \\
\times e^{\int_0^{t}\tilde{f}\left(f^{-1}\left(\tilde{t}-t+f(\varphi,\psi)\right),\psi,\tilde{t}\right)d\tilde{t}}, \qquad t>f(\varphi,\psi), \\
-\int\limits_0^{t-f(\varphi,\psi)}\tilde{\tilde{f}}\left(f^{-1}\left(\tilde{t}-t+f(\varphi,\psi)\right),\psi,\tilde{t}\right)e^{\int_0^{\tilde{t}}\tilde{f}\left(f^{-1}\left(\tilde{\tilde{t}}-t+f(\varphi,\psi)\right),\psi,\tilde{\tilde{t}}\right)d\tilde{\tilde{t}}}\,d\tilde{t}\times \\
\times e^{\int_0^{t-f(\varphi,\psi)}\tilde{f}\left(f^{-1}\left(\tilde{t}-t+f(\varphi,\psi)\right),\psi,\tilde{t}\right)d\tilde{t}}-e^{\int_0^{t}\tilde{f}\left(f^{-1}\left(\tilde{t}-t+f(\varphi,\psi)\right),\psi,\tilde{t}\right)d\tilde{t}}\times \\
\times\int\limits_0^{t}\tilde{\tilde{f}}\left(f^{-1}\left(\tilde{t}-t+f(\varphi,\psi)\right),\psi,\tilde{t}\right)e^{\int_0^{\tilde{t}}\tilde{f}\left(f^{-1}\left(\tilde{\tilde{t}}-t+f(\varphi,\psi)\right),\psi,\tilde{\tilde{t}}\right)d\tilde{\tilde{t}}}\,d\tilde{t}, \quad t\le f(\varphi,\psi).
\end{cases}
$$

Для знаходження функцій $\Pi_i\left(\xi,\psi,t\right)$ $i=\overline{0,2}$ маємо задачі:

$$
\begin{cases}
\Pi''_{i\xi\xi}\left(\xi,\psi,t\right)+\Pi'_{i\xi}\left(\xi,\psi,t\right)=g_i\left(\xi,\psi,t\right), \\
\Pi_{i\xi}\left(0,\psi,t\right)=h_i\left(\psi,t\right),\ \Pi_i\left(\xi,\psi,t\right)\underset{\xi\to\infty}{\to}0,
\end{cases}
\tag{13}
$$

де $g_0(\xi,\psi,y)=0$, $g_1(\xi,\psi,t)=a_{11}(\psi,t)e^{-2\xi}+a_{12}(\psi,t)e^{-\xi}$, $g_2(\xi,\psi,t)=a_{21}(\xi,\psi,t)\xi+$ $+a_{22}(\xi,\psi,t)$, $a_{11}(\xi,\psi,t)=-\varepsilon^2\dfrac{f_2}{v^2(\varphi^*,\psi)}U^2_{0\varphi}(\varphi^*,\psi,t)$, $a_{12}(\xi,\psi,t)=\left(U_{0\varphi}(\varphi^*,\psi,t)\right)_t-$ $-\dfrac{f_1}{v^2(\varphi^*,\psi)}U_{0\varphi}(\varphi^*,\psi,t)-2\varepsilon\dfrac{f_2}{v^2(\varphi^*,\psi)}U_0(\varphi^*,\psi,t)U_{0\varphi}(\varphi^*,\psi,t)$, , $a_{21}(\xi,\psi,t)=$

$$2v^{-2}(\varphi^*,\psi)v(\varphi^*,\psi)v'(\varphi^*,\psi)\left(\Pi_{1\xi\xi}(0,\psi,t)+\Pi_{1\xi}(0,\psi,t)\right)-\Big(2f_2U_0{}'(\varphi^*,\psi,t)\times$$
$$\times\left(U_0(\varphi^*,\psi,t)+\Pi_0(0,\psi,t)\right)-f_1U_0{}'(\varphi^*,\psi,t)\Big)v^{-2}(\varphi^*,\psi),$$

$$a_{22}(\xi,\psi,t)=-\big(U_0(\varphi^*,\psi,t)+$$
$$+\Pi_0(0,\psi,t)\big)2f_2\times\left(U_*(\varphi^*,\psi,t)+\Pi_1(0,\psi,t)\right)v^{-2}(\varphi^*,\psi)+\Pi_{0\psi\psi}(0,\psi,t)+f_0-$$
$$-\left(f_1\left(U_*(\varphi^*,\psi,t)+\Pi_1(0,\psi,t)\right)-(\Pi_1(0,\psi,t))_t\right)v^{-2}(\varphi^*,\psi),\ h_0(\psi,t)=\varepsilon U_{0\varphi}(\varphi^*,\psi,t),$$
$$h_1(\psi,t)=\varepsilon U_{*\varphi}(\varphi^*,\psi,t),\ h_2(\psi,t)=0.$$

В результаті їх розв'язання отримаємо:
$\Pi_0(\xi,\psi,t)=\varepsilon U_{0\varphi}(\varphi^*,\psi,t)e^{-\xi}$; $\Pi_1(\xi,\psi,t)=\varepsilon U_{*\varphi}(\varphi^*,\psi,t)e^{-\xi}+0{,}5a_1(\psi,t)e^{-2\xi}+$ $+\left(a_1(\psi,t)+a_2(\psi,t)-2\varepsilon U_{*\varphi}(\varphi^*,\psi,t)\xi\right)e^{-2\xi}$, $\Pi_2(\xi,\psi,t)$ знаходиться аналогічно (див., напр., [4]).

Для знаходження $\overline{\Pi}_0$, $\overline{\Pi}_{1/2}$, $\overline{\Pi}_1$, маємо такі задачі:

$$\begin{cases} v^2(\varphi,Q)\overline{\Pi}_{i/2\eta\eta}(\varphi,\eta,t)+v^2(\varphi,Q)\overline{\Pi}_{i/2\varphi}(\varphi,\eta,t)+p_{i/2}(\varphi,\eta,t)=\overline{\Pi}_{i/2t}(\varphi,\eta,t),\\ \overline{\Pi}_{i/2\eta}(\varphi,0,t)=q_{i/2}(\varphi,0,t),\overline{\Pi}_{i/2}(\varphi,\eta,0)=0,\ \overline{\Pi}_{i/2\varphi}(\varphi^*,\eta,t)=0,\overline{\Pi}_{i/2}(\varphi,\eta,t)\underset{\eta\to\infty}{\to}0,\end{cases}$$

де $p_0(\varphi,\eta,t)=f_2\overline{\Pi}_0^2(\varphi,\eta,t)+\overline{\Pi}_0(\varphi,\eta,t)(2f_2U_0(\varphi,\eta,t)+f_1)$, $p_{1/2}(\varphi,\eta,t)=$

$$f_2\Big(2U_0(\varphi,Q,t)U_0'(\varphi,Q,t)(-\eta)+2U_0(\varphi,Q,t)\overline{\Pi}_{1/2}(\varphi,Q,t)+2U_0'(\varphi,Q,t)(-\eta)\times$$
$$\times\overline{\Pi}_0(\varphi,Q,t)+2\overline{\Pi}_0(\varphi,Q,t)\overline{\Pi}_{1/2}(\varphi,Q,t)\Big)+f_1\left(U_0'(\varphi,Q,t)(-\eta)+\overline{\Pi}_{1/2}(\varphi,Q,t)\right),$$

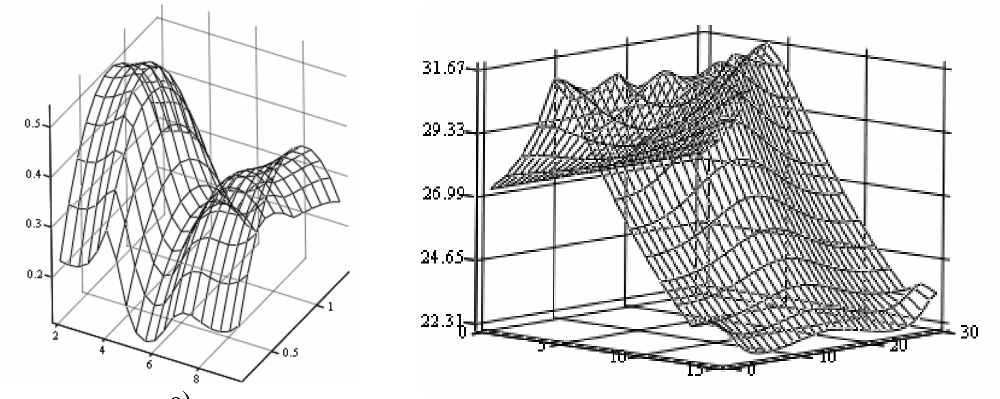
$$p_1(\varphi,\eta,t)=f_2\Big(2U_0'^2(\varphi,Q,t)(\eta^2)+\overline{\Pi}_{1/2}^2(\varphi,Q,t)+2U_0(\varphi,Q,t)\overline{\Pi}_1(\varphi,Q,t)+$$
$$+2U_0'(\varphi,Q,t)(-\eta)\overline{\Pi}_{1/2}(\varphi,Q,t)+2U_*(\varphi,Q,t)\overline{\Pi}_0(\varphi,Q,t)+\overline{\Pi}_0(\varphi,Q,t)\overline{\Pi}_1(\varphi,Q,t)\Big)+$$
$$+f_1\overline{\Pi}_1(\varphi,Q,t),\qquad q_0(\varphi,\eta,t)=0,\qquad q_{1/2\eta}(\varphi,Q,t)=-U_{0\psi}(\varphi,Q,t)+$$
$$+\frac{\alpha}{\beta}\left(U_0(\varphi,Q,t)+\overline{\Pi}_0(\varphi,Q,t)-U_*^*(\varphi,Q,t)\right),\ q_{1\eta}(\varphi,Q,t)=U_{0\psi}'(\varphi,Q,t)\eta+$$
$$+\alpha/\beta\left(U_0'(\varphi,Q,t)(-\eta)+\overline{\Pi}_{1/2}(\varphi,Q,t)\right).$$

Задачі для знаходження примежових функцій $\underline{\Pi}(\varphi,\mu,t)=\sum_{i=0}^{2}\varepsilon^{i/2}\,\underline{\Pi}_{i/2}(\varphi,\mu,t)$ є аналогічними. Розв'язки записаних вище задач отримуються за допомогою числових методів[8,9], замінюючи умову $\overline{\Pi}_{i/2}(\varphi,\eta,t)\to 0$ при . $\eta\to\infty$ на $\overline{\Pi}_{i/2}\left(\varphi,Q\varepsilon^{-0.5},t\right)=0$ з використанням часових ітераційних процедур.

Ідея загального алгоритму числово-асимптотичного розв'язання вихідної модельної задачі (2) – (5) базується на поетапній фіксації температурного поля та поля швидкостей (див., напр., [3]).

4. Результати числових розрахунків

На рис.1 б), 2 а) та 2 б) відповідно зображені динамічна сітка в області G_z, поле величини швидкості відносно області комплексного потенціалу G_ω та



а) б)

Рис. 2. Поле швидкостей (а) та розподіл температури в G_ω *при* $t=0.4576$ *(б)*

розподіл температури в момент часу $t=0.4576$ за умов $T_0^*(x)=15(3+(x+2.7))^{-2}$ $T_*^0(t)=15e^{-3t}$ у випадку, якщо $AD=\{(x,y):y=-2.82\cdot10^{-6}x^6+4.51\cdot10^{-4}x^5-0.029\cdot x^4+0.97\cdot x^3-17.57\cdot x^2+166.95\cdot x-633.42\}$та $BC=\{(x,y):$ $y=5.14\cdot10^{-4}\cdot x^5-0.075\cdot x^4+4.28\cdot x^3-120.76\cdot x^2+1675.2\cdot x-9130.2\}$.

5. Висновки

Таким чином, апроксимація реального поля швидкостей деяким фіктивним квазіідеальним полем дає можливість поставлені задачі зводити до крайових задач типу «фільтрація-конвекція-дифузія» і використовувати відомі розроблені нами методи розв'язання останніх, зокрема методологію переходу від фізичної криволінійної області до відповідної області комплексного потенціалу (в результаті чого спрощується рівняння, а задача зводиться до канонічної області). При цьому в одержаних рівняннях та умовах з'являється ряд невизначених параметрів – коефіцієнтів, що певним чином залежать від тепловіддачі випаровуванням та конвекцією, температури та абсолютної вологості повітря, хмарності, природної температури тощо, які встановлюються експериментальним або теоретичним шляхом за додаткових умов про процес. А тому, **в перспективі** актуальним є розв'язання обернених задач на встановлення різних показників, зокрема, знаходження невідомого коефіцієнта теплової дифузії (залежного від часу або від координат фізичної області) [5]. Також можливим є поширення даної методології на випадки більш складних конфігурації фізичної області та характеру течії (зокрема, врахування впливів додаткових втоків та витоків із водойми-охолоджувача) і, коли $f_1^2 \le 4 f_0 f_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бомба А.Я., В. М. Булавацький, В. В. Скопецький, Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. – Київ : Наукова думка, 2007. – 308 с.
2. Бомба А.Я., Барановський С.В., Присяжнюк І.М., Нелінійні сингулярно-збурені задачі типу «конвекція-дифузія». – Рівне: НУВГП, 2008. – 252 с.
3. Бомба А.Я., Каштан С.С. Чисельне розв'язання обернених нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення // Волинський математичний вісник. – 2001. – Вип. 8. – 9-22с.
4. Бомба А.Я., Присяжнюк І.М. Асимптотичне розвинення розв'язків нелінійних сингулярно збурених крайових задач типу "конвекція-дифузія" із запізненням // Доповіді НАН України.- 2005. – №3 – С. 60-66.
5. Бомба А.Я., Фурсачик О.А. Обернені сингулярно збурені задачі типу конвекція-дифузія в чотирикутних криволінійних областях // Мат. методи та фіз.-мех. поля.– Львів – 2009. – Вип. 3.– С. 59-66.
6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. – М.: Наука, 1977. – 408с.
7. Пивень В.Ф. Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости. – Орёл, 2006 – 506с.
8. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616с.
9. Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Вычислительная теплопередача. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784с.

Надійшла у першій редакції 26.04.2010, в останній - 19.09.2010.