УДК 517.954:517.972

Нестационарная задача о диффузии вещества в бесконечном стержне

С. Л. Жуковецкая, О. Н. Яковлева

Одесская государственная академия холода, Украина

Южноукраинский национальный педагогический университет имени К. Д. Ушинского, Украина

Исследована одна экстремальная задача о диффузии вещества в бесконечном стержне, выяснены вопросы разрешимости, построено решение задачи при определенных условиях.

Ключевые слова: *диффузия, бесконечный стержень, разрешимость.*

Досліджена одна екстремальна задача про дифузію речовини в нескінченому стрижні, з'ясовані питання розв'язності, побудовано розв'язок задачі при певних умовах.

Ключові слова: *дифузія, нескінчений стрижень, розв'язність.*

One extremal problem about diffusion of matter in infinite bar was investigational, the questions of solvability are found out, the solution of problem was built at certain conditions.

Key words: *diffusion, infinite bar, solvability.*

Исследуется задача:

В области $-\infty < x < \infty$ при $t > 0$ найти ограниченную функцию $u(x,t)$, которая удовлетворяет уравнению

$$u_t'(x,t) = a^2 u_{xx}''(x,t) \qquad (1)$$

и условиям

$$u(b,t_1) \to \inf, \ \ t_1 > 0 \qquad (2)$$

$$u_x'(c,t_2) = \sigma, \ \ \sigma > 0, \ t_2 > 0 \qquad (3)$$

$$u(x,0) \ge 0, \qquad (4)$$

где $a \ne 0$ – известная постоянная, σ – известная постоянная, $x = b$, $x = c$ – известные точки, t_1, t_2 – известные моменты времени.

Данная задача является нестационарной задачей о диффузии вещества в бесконечном стержне.

Применим к уравнению (1) преобразование Фурье по переменной x, получим обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$V_t'(x,t) + a^2 x^2 V(x,t) = 0, \qquad (5)$$

где $V(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R u(\tau,t) e^{ix\tau} d\tau$ – преобразование Фурье искомой функции $u(x,t)$, $x \in R$.

Уравнение (5) является уравнением с разделяющимися переменными, его можно привести к виду

$$\frac{dV}{V} = -a^2x^2dt .$$

Построим общее решение этого уравнения:

$$\ln V = -a^2x^2t + \ln c(x),$$

$$V(x,t) = c(x)e^{-a^2x^2t},$$

где $c(x)$ – неизвестная функция параметра x.

Положив $t = 0$, получим:

$$V(x,0) = c(x),$$

где $V(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R u(\tau,0)e^{ix\tau}$, $x \in R$. Тогда решение уравнения (5) примет вид:

$$V(x,t) = V(x,0)\cdot e^{-a^2x^2t}.$$

Функция $V(x,t)$ представима в виде произведения двух преобразований Фурье: функции $V(x,0)$ и функции $e^{-a^2x^2t}$. На основании свойств преобразования Фурье функция $u(x,t)$ представима в виде свертки обратных преобразований Фурье функций $V(x,0)$ и $e^{-a^2x^2t}$. Так как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R e^{-\frac{s^2}{2}}e^{-ixs}ds = e^{-\frac{x^2}{2}},$$

то

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R e^{-a^2ts^2}e^{-ixs}ds = \frac{1}{a\sqrt{2t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$$

Т.о. решение уравнения (1) имеет вид

$$u(x,t) = \frac{1}{a\sqrt{2t}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R u(s,0)\cdot e^{\frac{-(x-s)^2}{4a^2t}}ds,\ x \in R,\ t > 0. \tag{6}$$

Для построения решения задачи (1)-(4) необходимо найти функцию $u(x;0) = u(x)$. Для определения функции $u(x)$ используем условия (2) и (3). Из условия (2) получим:

$$\frac{1}{a\sqrt{2t_1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R u(s)\cdot e^{\frac{-(s-b)^2}{4a^2t_1}}ds \to \inf,$$

что эквивалентно условию:

$$\frac{1}{\sqrt{t_1}}\int_R u(s)\cdot e^{\frac{-(s-b)^2}{4a^2t_1}}ds \to \inf .$$

Так как:

$$u'_x(x,t) = \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}\sqrt{t^3}}\int_R u(s)(s-x)\cdot e^{\frac{-(s-x)^2}{4a^2t}}ds,\ x \in R,$$

то из условия (3) получим:

$$\frac{1}{\sqrt{t_2^3}}\int_R u(s)(s-c)\cdot e^{\frac{-(s-c)^2}{4a^2t_2}}\,ds = 4a^3\sqrt{\pi}\,\sigma\ .$$

Введём функции:

$$\varphi(s)=\frac{1}{\sqrt{t_1}}e^{\frac{-(s-b)^2}{4a^2t_1}}\ ,\psi(s)=\frac{1}{\sqrt{t_2^3}}(s-c)e^{\frac{-(s-c)^2}{4a^2t_2}}\ .$$

Пусть $\Gamma\subset R$, Γ – множество, на котором функции $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ принимают неотрицательные значения. Тогда полученные условия можно записать в виде:

$$\begin{cases}\int\limits_{\Gamma} u(s)\varphi(s)\,ds\to\inf,\\ \int\limits_{\Gamma} u(s)\psi(s)\,ds=4a^3\sqrt{\pi}\sigma,\\ u(s)\ge 0,\ s\in\Gamma.\end{cases}\tag{7}$$

Совокупность условий (7) представляет собой задачу «о сингулярном решении». Её решение имеет вид:

$$u(x)=c_0\delta(x-s_0)\ ,$$

где $s_0\in\Gamma\subset R$, c_0 – неизвестная постоянная.

Так как $t>0$, то $\varphi(s)>0$ для всех $s\in R$, а функция $\psi(s)$ неотрицательна при $s-c\ge 0$. Это означает, что множество $\Gamma=[c;+\infty)$.

Постоянная c_0 определяется так:

$$c_0=\frac{4a^3\sqrt{\pi}\sigma\ t_1^{\frac{3}{2}}e^{\frac{(s_0-c)^2}{4a^2t_2}}}{s_0-c}\ .\tag{8}$$

Точку s_0 определяем из условия:

$$\frac{t_2^{\frac{3}{2}}}{t_1^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{s_0-c}\cdot e^{\frac{(s_0-c)^2t_2^{-1}-(s_0-b)^2t_1^{-1}}{4a^2}}\to\inf\ .$$

Подставив найденное значение s_0 в формулу (8), получим вполне определенное значение постоянной c_0. Т.о. решение задачи (1)-(4) имеет вид:

$$u(x,t)=\frac{c_0}{2a\sqrt{\pi t}}e^{\frac{-(s_0-x)^2}{4a^2t}}\ ,\ x\in R\ ,\ t>0\ .\tag{9}$$

Решение задачи (1)-(4) приводит к нахождению инфимума функции

$$F(x)=\frac{t_2^{\frac{3}{2}}}{t_1^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{x-c}\cdot e^{\frac{(x-c)^2t_2^{-1}-(x-b)^2t_1^{-1}}{4a^2}}$$

на множестве $\Gamma=[c;+\infty)$.

Очевидно, что при любых t_1, t_2, b, c функция $F(x)$ непрерывна на множестве $(c;+\infty)$, при этом

$$\lim_{x\to c+0} F(x) = +\infty .$$

Для достижения минимума на множестве $(c;+\infty)$ необходимо, чтобы

$$\lim_{x\to +\infty} F(x) = +\infty . \qquad (10)$$

Были рассмотрены случаи, при которых выполнялось условие (10).

1. $t_2 < t_1$, *тогда* $t_2^{-1} - t_1^{-1} > 0$ *и выполнено* (10) *при любых значениях b и c. На промежутке* $(c;+\infty)$ *существует точка* s_0 *:*

$$F(s_0) = \inf_{c<x<+\infty} F(x) . \qquad (11)$$

В этом случае решение задачи (1)-(4) существует.

2. $t_2 > t_1$, *тогда* $t_2^{-1} - t_1^{-1} < 0$ *и* $\lim_{x\to +\infty} F(x) = 0$ *при любых b и c. Это означает, что в этом случае задача* (1)-(4) *решений не имеет.*

3. $t_1 = t_2$, *тогда*

$$F(x) = \frac{t_1}{x-c} \cdot e^{\frac{2t_1^{-1}(b-c)x + t_1^{-1}\left(c^2-b^2\right)}{4a^2}} .$$

При $b > c$ выполнено условие (10) и на $(c;+\infty)$ существует точка s_0, которая удовлетворяет условию (11). В этом случае решение задачи (1)-(4) существует.

При $b = c$ функция $F(x)$ примет вид

$$F(x) = \frac{t_1}{x-c} .$$

Функция не имеет минимума на $(c;+\infty)$, т.к. $\lim_{x\to +\infty} F(x) = 0$. Задача (1)-(4) решений не имеет.

При $b < c$ $\lim_{x\to +\infty} F(x) = 0$, задача (1)-(4) решений не имеет.

Построим решение задачи (1)-(4) в случае $t_1 = t_2$ и $b > c$. Функцию $F(x)$ запишем в виде:

$$F(x) = t_1 \cdot e^{\frac{t_1^{-1}\left(c^2-b^2\right)}{4a^2}} \cdot e^{\frac{2t_1^{-1}(b-c)x}{4a^2}} .$$

Т.к. $t_1 \cdot e^{\frac{t_1^{-1}\left(c^2-b^2\right)}{4a^2}}$ вполне определённая постоянная, то для нахождения точки s_0 необходимо на множестве $(c;+\infty)$ определить минимум функции

$$G(x) = \frac{1}{x-c} \cdot e^{\frac{t_1^{-1}(b-c)x}{2a^2}} .$$

После определенных рассуждений и вычислений получим, что

$$s_0 = c + \frac{2a^2 t_1}{b-c}.$$

Т.к. $t_1 > 0$, $b > c$, то $s_0 \in \Gamma = [c;+\infty)$. Теперь мы можем из (8) найти значение c_0:

$$c_0 = 2a(b-c)\sqrt{\pi t_1}\sigma e^{\frac{a^2 t_1}{(b-c)^2}}.$$

Решение задачи (1)-(4) в этом случае будет иметь вид:

$$u(x,t) = (b-c)\sigma\sqrt{\frac{t_1}{t}} e^{-\frac{(c-x)^2}{4a^2 t} - \frac{(c-x)t_1}{(b-c)t} - \frac{t_1}{t}}.$$

В случае 1 ($t_2 < t_1$) точку s_0 можно найти лишь приближённо, значит, решение задачи (1)-(4) мы можем получить только приближённо.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черский Ю.И. Аналитическое решение экстремальных задач. – Одесса: ОИИМФ, 1990. – 54с.
2. Жуковецкая С.Л., Яковлева О.Н. Исследование одной экстремальной задачи диффузии вещества в бесконечном стержне // Труды XIV Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ – 2009). – Харьков-Херсон, 2009. – с. 74-76.

Надійшла у першій редакції 30.06.2010, в останній - 08.07.2010.