

Метод, що базується на представленнях алгебри Кунца, для натуральних коефіцієнтів масштабування, більших за одиницю, дозволяє досить просто побудувати аналітичний вигляд всіх фільтрів через коефіцієнти низькочастотного фільтру розкладу. Але факторизація матриці  $A$  із формули (5.3) в деяких випадках може вимагати нетривіальних евристичних міркувань.

### 7. Висновки

В даній роботі авторами вперше проведено огляд існуючих методів дискретного недіадного ВП, визначені принципові характеристики розглянутих методів. На основі аналізу обраних характеристик надані рекомендації для використання того чи іншого методу для розв'язання задач певного типу.

Залишається відкритим питання про вибір найбільш відповідного коефіцієнту масштабування в кожному конкретному випадку. Також представляється перспективною задача динамічної зміни масштабуючого коефіцієнта на різних рівнях кратномасштабного аналізу в залежності від особливостей сигналу.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов. – М.: Мир, 2005. – 671 с.
2. Pollock D.S.G., Cascio I.L. Non-dyadic wavelet analysis // *Optimisation, Econometric and Financial Analysis: Advances in Computational Management Science*, Kontoghiorghes E.J. and Gatu C. (eds.) – Springer Verlag. – 2007. – Vol. 9. – P. 167-204
3. Bratelli O., Jorgensen P.E.T. Isometries, shifts, Cuntz algebras and multiresolution wavelet analysis of scale  $N$  // *Integral Equations Operator Theory*. – 1997. – Vol. 28, №4. – P. 382-443.
4. Auscher P. Ondelettes fractales et applications. Ph.D. Thesis. Universite IX Paris, Dauphine. Paris, France. – 1989.
5. Baussard A., Nicolier F., and Truchetet F. Rational multiresolution analysis and fast wavelet transform: application to wavelet shrinkage denoising // *Signal Processing*. – Vol. 84, №10. – 2004. – P. 1735-1747.
6. Bayram I., Selesnick I.W. Design of orthonormal and overcomplete wavelet transforms based on rational sampling factors // *IEEE Trans. Signal Processing*. – 2009. – Vol. 57, №1. – P. 131-145
7. Чертов О.Р., Мальчиков В.В. Недіадні вейвлет-перетворення: неперервний випадок // Сучасні тенденції розвитку інформаційних технологій в науці, освіті та економіці: Матеріали IV Всеукраїнської науково-практичної конференції. 15-17 квітня 2010 р., м. Луганськ. – Луганськ : Phoenix, 2010. – С. 146-147.
8. Аржанцев И.В. Базисы Гребнера и системы алгебраических уравнений. – М.: МЦНМО, 2003. – 65 с.

УДК 004.94

## Численное моделирование влияния гофрировки на движение заряженной частицы в токамаке ITER

Ю. К. Москвитина

*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина  
Национальный научный центр "Харьковский физико-технический институт"*

Проведен сравнительный анализ применения «классической» схемы 4-го порядка Рунге-Кутты и альтернативной схемы 5-го порядка Рунге-Кутты для моделирования движения энергичной заряженной частицы на периферии плазмы токамака ITER при наличии гофрировки тороидального магнитного поля. Показано, что метод Рунге-Кутты 5-го порядка в 7 раз превосходит по производительности метод Рунге-Кутты 4-го порядка при заданном допустимом отклонении значения кинетической энергии.

**Ключевые слова:** метод Рунге-Кутты, численное решение заряженная частица.

Проведено порівняльний аналіз використання «класичної» схеми 4-го порядку Рунге-Кутти та альтернативної схеми 5-го порядку Рунге-Кутти для моделювання руху зарядженої частинки на периферії плазми в токамаці ITER за наявності гофрування тороїдального магнітного поля. Показано, що метод Рунге-Кутти 5-го порядку в 7 разів перевищує по продуктивності метод Рунге-Кутти 4-го порядку при заданому допустимому відхиленні значення кінетичної енергії.

**Ключові слова:** метод Рунге-Кутти, чисельний розв'язок, заряджена частинка.

The benchmark analysis of Runge-Kutta methods is done for numerical simulation of energetic particle at the plasma periphery under toroidal field ripples in the tokamak ITER. Two methods are under consideration: "classical" 4-th order scheme and alternative 5-th order scheme. It is shown that Runge-Kutta method of 5-th order excels in efficiency Runge-Kutta method of 4th order by 7 times under the given limit of energy deviation.

**Key words:** methods Runge-Kutta, numerical solution, charged particle.

### 1. Мотивация и актуальность задачи

Поскольку для удержания заряженных частиц в токамаке используются электромагнитные поля сложной геометрии, точное интегрирование уравнений движения заряженной частицы почти всегда оказывается невозможным. Поэтому в большинстве случаев движение частиц рассматривается с помощью приближенных методов исследования, как аналитических, так и численных [1-4]. Наиболее распространенным методом является усреднение по быстрому циклотронному вращению частицы в магнитном поле, так называемое дрейфовое приближение [4-8].

Исследование с помощью этого приближенного метода позволяет охватить широкий круг задач [1-8]. Вопрос о степени точности приближенных уравнений, в частности, об эффектах, теряемых при усреднении, пока еще с достаточной полнотой не проанализирован. Например, недостаточность дрейфового приближения является очевидной при описании движения частиц с высокой энергией ( $E$ : МэВ,  $E$  кинетическая энергия частицы) поскольку радиус ларморовской орбиты  $\rho_L$ : 10 см уже не может считаться малым параметром

задачи [9]. В этом случае, для аналитического описания движения иона необходимо использовать уравнение движения Ньютона с силой Лоренца, а для численного моделирования, так называемые коды полной орбиты (“full orbit codes”).

Большинство исследований по удержанию частиц и энергии в токамаке сконцентрировано на исследовании осесимметричных конфигураций. Однако дискретная структура магнитной системы токамака, состоящей из конечного числа катушек, нарушает аксиальную симметрию системы, вызывая гофрировку тороидального магнитного поля ловушки. В узком смысле под гофрировкой понимается неоднородность магнитного поля, обусловленная дискретностью магнитной системы.

Результаты теоретических и экспериментальных исследований показывают, что гофрировка магнитного поля в токамаке приводит к ухудшению условий удержания частиц и энергии [10-14]. Это явление называется «гофрировочными» потерями частиц («ripple losses»), а соответствующий процесс «гофрировочным переносом» («ripple induced transport»). Аномальные потери альфа частиц являются одной из основных проблем токамака-реактора. Поэтому исследование влияния аксиально-асимметричных возмущений магнитной конфигурации на движение и удержание заряженных частиц является важной задачей, имеющей не только теоретический, но и большой практический интерес.

В данной работе проведен сравнительный анализ применения «классической» схемы 4-го порядка Рунге-Кутты (РК4) и альтернативной схемы 5-го порядка Рунге-Кутты (РК5) [15] для моделирования движения энергичной заряженной частицы на периферии плазмы токамака ITER при наличии гофрировки тороидального магнитного поля.

## 2. Уравнение движения частицы

Движение заряженной частицы в электромагнитном поле в бесстолкновительном случае описывается уравнением Ньютона с силой Лоренца

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\dot{\mathbf{r}}\mathbf{B}], \quad (1)$$

где  $\mathbf{r}$  радиус вектор заряженной частицы,  $m$ ,  $e$  масса и заряд иона,  $c$  скорость света в вакууме,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  вектор напряженности электрического и магнитного поля. Уравнение (1) является дифференциальным уравнением второго порядка, и может быть представлено в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка. Численные методы решения таких систем ОДУ хорошо разработаны.

## 3. Методы Рунге-Кутты для решения систем ОДУ

Среди многообразия схем, предложенных для задач, сводящихся к решению системы ОДУ, можно выделить методы, сочетающие в себе одновременно требования высокой точности, устойчивости и эффективной программной реализации. К ним относятся одношаговые схемы Рунге-Кутты (РК).

Наиболее известным и широко применяемым методом РК является явная 4-х стадийная схема 4-го порядка точности (РК4). Тем не менее, существуют альтернативные схемы 5-го порядка, позволяющие оценивать локальную погрешность и адаптивно изменять шаг, вычисляя правую часть уравнений всего в шести точках (РК5). Пример такой схемы приведен в книге [15].

#### 4. Система координат

В работе используется *кваситороидальная система координат*. В качестве координат в этой системе используется набор  $(r, \vartheta, \varphi)$  (см. Рис.1), где  $r$  - длина радиус- вектора  $\mathbf{r}$ , проведённого от круговой оси тора к данной точке.

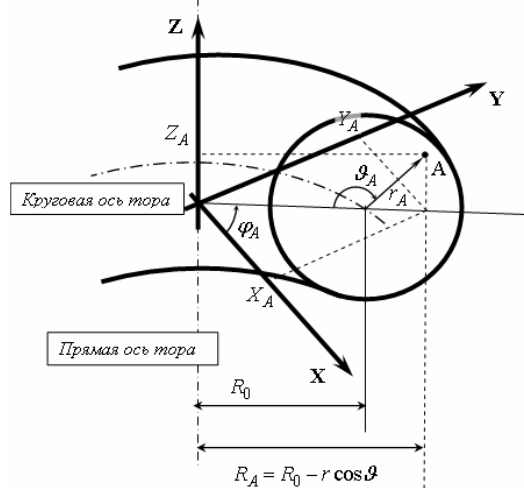


Рис.1. Система квазитороидальных координат

Координата  $\varphi$  называется *торидальным углом*. Угол  $\vartheta$ , между направлением главной нормали тора  $\mathbf{n}$  и радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , называется *полоидальным углом*;  $R_0$  большой радиус тора,  $a$  малый радиус. На рис.1 использованы следующие обозначения:  $\{r_A, \vartheta_A, \varphi_A\}$  - квазитороидальные координаты;  $\{X_A, Y_A, Z_A\}$  - декартовы координаты;  $\{R_A, \varphi_A, Z_A\}$  - цилиндрические координаты.

#### 5. Модель магнитного поля

Магнитное поле токамака с дискретным набором катушек тороидального магнитного поля, может быть приближенно представлено в виде суперпозиции осесимметричного основного магнитного поля  $\mathbf{B}^0$  и периодического возмущения магнитного поля  $\mathbf{B}^1$ , соответствующего гофрировке магнитного поля

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^0 + \mathbf{B}^1. \quad (2)$$

Здесь и далее считается, что магнитные поверхности токамака круглые. Основное магнитное поле замкнутой ловушки можно аналитически задать в виде [16]

$$\mathbf{V}^0 = \frac{B_0 R_0}{R_0 - r \cos \vartheta} \left\{ 0, \frac{r}{R_0} \iota(r), 1 \right\}, \quad (3)$$

где  $B_0$  магнитное поле на круговой оси тора,  $\iota(r)$  угол вращательного преобразования.

Гофрировка представляет собой периодическое (вдоль большого обхода тора) возмущение магнитного поля. Магнитное поле периодического возмущения может быть представлено в виде

$$B_r^1 = \frac{B_0 R_0}{R_0 - r \cos \vartheta} 2ka_{TF} K_1(ka_{TF}) I_0'(kr) \sin(N\varphi), \quad (4)$$

$$B_\vartheta^1 = 0, \quad (5)$$

$$B_\varphi^1 = B_0 2ka_{TF} K_1(ka_{TF}) I_0(kr) \cos(N\varphi), \quad (6)$$

где  $N$  количество катушек тороидального магнитного поля,  $k$  волновой вектор гофрировки,  $a_{TF}$  радиус катушек тороидального магнитного поля,  $K_1(ka_{TF})$  и  $I_0(kr)$  функции Мак-Дональда и модифицированная функция Бесселя соответственно.

Магнитное поле в виде (2) удовлетворяет условиям  $\operatorname{div} \mathbf{V}^0 = 0$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{V}^1 = 0$ .

## 6. Результаты численного моделирования движения иона в токамаке ITER

При численном решении уравнений использовались следующие значения геометрических параметров рабочей камеры токамака ITER:  $a = 200$  см,  $R_0 = 620$  см,  $a_{TF} = 400$  см,  $B_0 = 5,3 \cdot 10^4$  Гс,  $k = 29 \cdot 10^{-3}$  см $^{-1}$ .

Для сравнения эффективности указанных выше схем РК было проведено моделирование движения альфа-частицы ( $m = 4m_p, Z = 2e$ , где  $m_p$  масса протона,  $e$  модуль заряда электрона). Исследования проводились для различных энергий и отношения параметра  $v_\square/v$ , где  $v_\square$  величина проекции скорости  $v$  на направление магнитного поля. Кроме того, варьировались начальное положение частицы и время движения частицы.

Следует отметить, что адаптивное изменение шага при решении уравнений движения ионов в сильном магнитном поле - не эффективно, поскольку шаг и радиус спиралевидной траектории медленно меняется по сравнению с быстрым циклотронным вращением. Поэтому, в дальнейшем используется постоянный шаг интегрирования.

Поскольку численная модель движения включает только магнитное поле, то кинетическая энергия является инвариантом, и может быть использована для оценки ошибки решения системы уравнений движения.

Для оценки эффективности схем РК изменялся шаг интегрирования, и оценивалась относительная ошибка численного решения  $\delta$  по формуле

$$\delta = \Delta E / E_0 = (E(t) - E_0) / E_0, \quad (6.1)$$

где  $E_0$  начальная кинетическая энергия частицы, а  $E(t)$  энергия частицы в момент времени  $t$ .

На рис.2 представлены результаты исследования для частицы с энергией 1МэВ и  $v_{\square}/v=0.1$ , начальное положение в обоих случаях совпадает:  $r_0 = 120$  см,  $\vartheta_0 = \pi$  и  $\varphi_0 = 0$ .

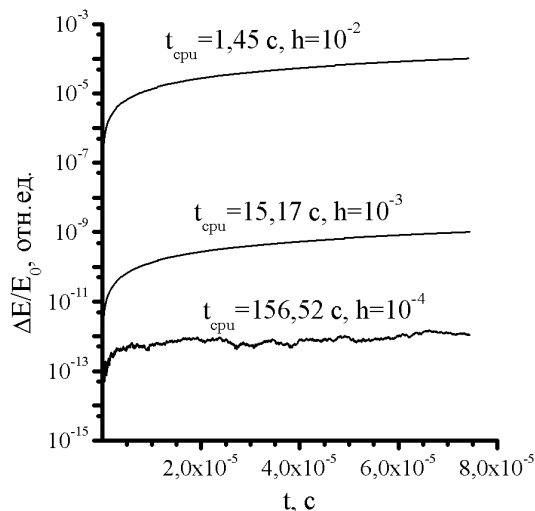


Рис.2. Относительное изменение энергии при РК4

Интегрирование системы ОДУ проводилось для одинаковых промежутков времени  $t_{sim} = 1000T_c$  где  $T_c \approx 2,48 \cdot 10^{-8}$  с циклотронный период вращения иона по ларморовской окружности. Кроме того, регистрировалось время вычисления траектории  $t_{CPU}$ .

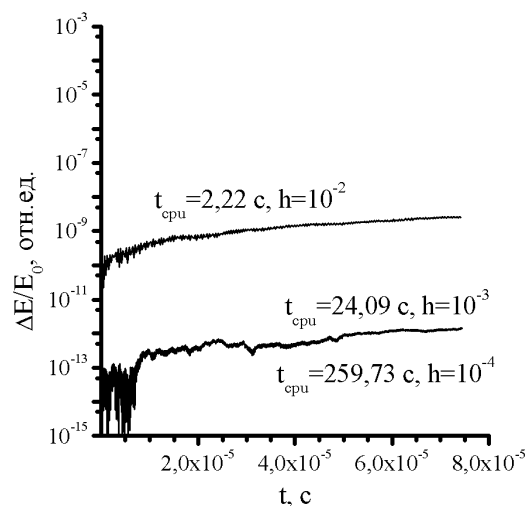


Рис.3. Относительное изменение энергии при РК5

Как видно из рис.3, применение схемы РК5 позволяет получить удовлетворительную точность сохранения кинетической энергии  $\Delta E/E_0 \approx 10^{-9}$  при шаге  $h=10^{-2}$ , что соответствует  $\Delta t=10^{-2}T_c$ . Применение РК4 с тем же шагом, даёт ошибку  $\Delta E/E_0 \approx 10^{-4}$  при сравнимых временах вычисления  $t_{CPU}=2,22$ с для схемы РК5 и  $t_{CPU}=1,45$ с для РК4. Точность  $\Delta E/E_0 \approx 10^{-9}$  может быть достигнута при применении РК4 с шагом  $h=10^{-3}$ , однако при этом  $t_{CPU}=15,17$ с, что в 7 раз больше аналогичного результата с применением РК5. Предельная малая ошибка, полученная в результате уменьшения шага интегрирования  $h$ , для обоих методов составила  $\Delta E/E_0 \approx 10^{-12}$ , что, по-видимому, обусловлено разрядностью ячейки для хранения числа (16 значащих цифр). Из рис.3 хорошо видно, что уменьшение шага в 10 раз, т.е.  $h=10^{-4}$  ( $\Delta E/E_0 \approx 1,85 \cdot 10^{-12}$ ,  $t_{CPU}=259,73$ с) не даёт существенного улучшения по сравнению с использованием шага  $h=10^{-3}$  ( $\Delta E/E_0 \approx 1,47 \cdot 10^{-12}$ ,  $t_{CPU}=24,09$ с), что говорит о своеобразном «насыщении» метода. Использование РК4 с шагом  $h=10^{-4}$  даёт ошибку  $\Delta E/E_0 \approx 1,5 \cdot 10^{-12}$  для  $t_{CPU}=156,52$ с.

Обобщая вышеизложенное можно сделать вывод, что использование альтернативной схемы 5-го порядка оправдывает себя вплоть до предельной ошибки  $\Delta E/E_0 \approx 10^{-12}$ .

На рис.4 продемонстрировано использование РК5 для моделирования движения заряженной частицы. Для моделирования использовались следующие параметры частицы:  $v_{\square}/v=0,1$ , энергия частицы 3,5 МэВ, что соответствует энергии рождения альфа-частицы в результате реакции ядерного синтеза ядер дейтерия и трития.

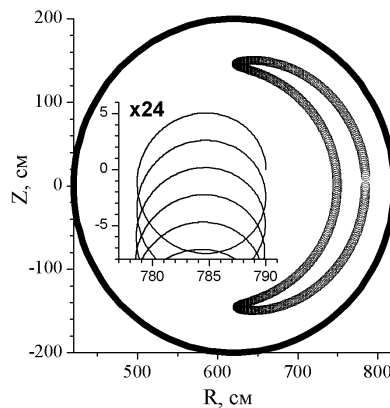


Рис.4. Проекция траектории «запертой» частицы на вертикальное сечение тора

На рис.4. представлена траектория альфа-частицы в плоскости  $(R,Z)$  (см.рис1). Такая траектория соответствует движению частицы между областями

высокого магнитного поля, это движение называется «баунс» осцилляциями (на рис.4 модуль вектора напряженности магнитного поля спадает слева направо), а соответствующий период колебательного движения – «баунс» периодом  $\tau_b$ .

Такая частица называется «запертой» на тороидальной неоднородности магнитного поля, а соответствующая траектория называется «банан». Ширина траектории соответствует ширине ларморовской орбиты. В рассматриваемом случае «баунс» период  $\tau_b = 687T_c$ .

Также на рис.3 представлен увеличенный фрагмент траектории соответствующий начальному участку движения частицы, где хорошо видна спиральная траектория заряженной частицы.

## 7. Выводы

Проведен сравнительный анализ эффективности использования для численного решения уравнения движения заряженной частицы в токамаке ITER «классической» схемы Рунге-Кутты 4-го порядка и 6-тиочечной схемы Рунге-Кутты 5-го порядка с оптимизированными коэффициентами, возможностью оценки локальной погрешности и адаптивным изменением шага. Показано, что

- в сильном магнитном поле адаптивное изменение шага неэффективно;
- метод Рунге-Кутты 5-го порядка в 7 раз превосходит по производительности метод Рунге-Кутты 4-го порядка при заданном допустимом отклонении значения кинетической энергии;
- построенная численная модель адекватно описывает процесс движения заряженной частицы в тороидальной магнитной ловушке плазмы.

Численная модель движения иона на основании уравнения Ньютона с силой Лоренца и метода Рунге-Кутта 5-го порядка позволяет учесть эффекты конечной ширины ларморовской орбиты. Производительность указанного метода указывает на возможность моделирования ансамбля большого числа частиц, что открывает большие возможности для моделирования эволюции функции распределения заряженных частиц по скоростям. Кроме того, эта модель может с успехом применяться для так называемого метода «частица в ячейке» («Particle In Cell», PIC).

Применение метода Рунге-Кутты в модели не требует наличия инварианта (интеграла системы ОДУ) и позволяет учитывать влияние столкновений в плазме на движения частиц посредством оператора столкновений Монте-Карло.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Shishkin A.A., Motojima O., Sudo S., Moskvitin A.A., Moskvitina Yu.K. et al. Dynamics of D+D Fusion Products in LHD Geometry // Fusion Engineering & Design. – 2006. – Vol.81, Issues 23-24. – p. 2733-2736.
2. Yavorskij V.A., Edenstrasser J.W., Goloborod'ko V.Ya., Reznik S.N., Zweben S.Z. Fokker-Planck modelling of delayed loss of charged fusion products in TFTR // Nuclear Fusion. – 1998. – Vol.38, № 10. – p. 1565-1576.
3. Moskvitina Yu.K., Yavorskij V.O., Schoepf K. Superbanana Fokker-Planck equation for tokamaks with the strong toroidal field ripples // Вестник



- Харьковского Национального университета, Серия физическая «Ядра, частицы, поля». – 2009. – Вып. 3(43), №868. – ст. 53-58.
4. Tani K., Takizuka T., Azumi M Ripple loss of alpha particles in a tokamak reactor with a non-circular plasma cross-section // *Nuclear Fusion*. – 1993. – Vol.33, № 6. – p. 903-914.
  5. Mimata H., Tani K., Tsutsui H., Tobita K., Tsuji-iio S. et. al. Numerical Study of the Ripple Resonance Diffusion of Alpha Particles in Tokamaks // *Plasma and Fusion Research*. – 2009. – Vol.4. – p. 008- 1-008- 8.41.
  6. Moskvitina Yu.K., Shishkin A.A. Resonant interaction between fusion products and magnetic field perturbation in toroidal magnetic trap with the rotational transform // *Вопросы Атомной Науки и Техники, Серия «Плазменная электроника и новые методы ускорения»*. – 2008. – Вып.6, № 4. – ст. 104-108.
  7. Shishkin A., Moskvitina Yu., Motojima O., Sagara A., Mitarai O. et al. Control of  $\alpha$ -particle confinement in the helical device for fusion with “the magnetic axis sweeping” // *Вопросы Атомной Науки и Техники, Серия «Плазменная электроника и новые методы ускорения»*. – 2008. – Вып.6, № 4. – ст. 109-113.
  8. Moskvitina Yu.K., Shishkin A.A. Effect of the resonance phenomena on high energetic particle losses in closed magnetic trap with the rotational transform of the magnetic field // *Вопросы Атомной Науки и Техники, Серия «Физика плазмы»*. – 2008. – Вып.14, № 6. – ст. 19-21.
  9. Fasoli A., Gormenzano C., Berk H.L., Breizman B., Briguglio S. et. al. Chapter 5: Physics of Energetic Ions // *Nuclear Fusion*. – 2007. – Vol.47, № 6. – p. S264-S284.
  10. Юшманов П.Н. Диффузионные транспортные процессы в токамаках, обусловленные гофрировкой // *Вопросы теории плазмы* – 1987. – вып.16. – с. 102-208.
  11. Yavorskij V.A., Andrushchenko Zh.N., Edenstrasser J.W, Goloborod'ko V.Ya. Three-dimensional Fokker-Planck equation for trapped fast ions in a Tokamak with weak toroidal field ripples // *Physics of Plasmas*. – 1999. – Vol.6, № 10. – p. 3853-3867.
  12. Putvinski S.V. Physics of Energetic Particles in ITER // *Nuclear Fusion*. – 1998. – Vol.38, № 9. – p. 1275-1281.
  13. Kurki-Suonio T., Asunta O., Hynönen V., Johnson T., Koskela T. Fast Particle Losses in ITER // 22<sup>th</sup> IAEA Fusion Energy Conference, Geneva, October 13-18. – 2008. – IAEA-CN-165/IT/P6-2.
  14. Heidbrink W.W., Sadler G.J. The behaviour of fast ions in tokamak experiments // *Nuclear Fusion*. – 1994. – Vol.34, № 4. – p. 535-615.
  15. Ильина В.А., Силаев П.К. Численные методы для физиков теоретиков II. – Москва-Ижевск, 2004. – 118с.
  16. Волков Е.Д., Супруненко В.А., Шишкин А.А. СТЕЛЛАРАТОР – Киев: Наукова думка, 1983. – 312 с.