УДК 51-73

Математическое моделирование переноса тепла в жидком гелии при конечных размерах нагревателя

К. Э. Немченко, Ю. В. Рогов, С. Ю. Рогова
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина

Рассмотрена математическая модель распространения тепла в двухслойной области, где первый слой – нагреватель конечной длины, второй слой – жидкий гелий. При описании модели используется уравнение теплопроводности и система уравнений для сверхтекучих жидкостей, которая учитывает вклад механизма теплопроводности и вклад второго звука в распространение тепла. Модель исследуется с помощью преобразования Лапласа. Получены аналитические выражения, описывающие тепловые процессы в рассматриваемой системе. В рамках развитой модели планируется описание экспериментов, в которых обнаружено необычное поведение резонансов теплового потока.

Ключевые слова: *модель, жидкий гелий, нагреватель, резонанс.*

Розглянуто математичну модель поширення тепла у двошаровій області, де перший шар – нагрівач кінцевої довжини, другий шар – рідкий гелій. При описі моделі використається рівняння теплопровідності й система рівнянь для надплинних рідин, що враховує внесок механізму теплопровідності й внесок другого звуку в поширення тепла. Модель досліджується за допомогою перетворення Лапласа. Отримані аналітичні вирази, що описують теплові процеси в розглянутій системі. У рамках розвинутої моделі планується опис експериментів, у яких виявлена незвичайна поведінка резонансів теплового потоку.

Ключові слова: *модель, рідкий гелій, нагрівач, резонанс.*

The double-layer model heat spread where the first layer is a finite length heater and the second layer is liquid helium is considered. When describing the model thermal conductivity equation and the system of hydrodynamic equations for superfluids that takes into account thermal conductivity mechanism and second sound mechanism in the heat spread is used. The model is researched using Laplace transform. The analytical expressions describing heat processes in the considered system are obtained. Within the bounds of the developed model experiments describing where unusual heat flow resonance behavior was found is planed.

Keywords: *model, liquid helium , heater, resonance.*

1. Введение

В данной работе описывается модель распространения тепла в двухслойной области. Первый слой является обычным веществом конечной толщины и служит нагревателем. В качестве второго слоя рассматривается жидкий гелий. Рассматриваются случаи полубесконечного второго слоя и второго слоя конечной толщины.

Обычно распространение тепла описывается с помощью уравнения теплопроводности, которое получается в пренебрежении тепловым расширением веществ. То есть, только в том случае, когда коэффициент теплового расширения тела равен нулю распространение тепла можно описывать с помощью уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T \tag{1.1}$$

Здесь введен коэффициент температуропроводности, который равен $\chi = \kappa / C_V$, где κ - коэффициент теплопроводности, а C_V - теплоемкость единицы объема вещества, вычисленная при постоянном объеме.

Если же коэффициент теплового расширения вещества отличен от нуля, то любой нагрев приведет к уменьшению плотности вещества в месте нагрева. Это отклонения плотности будет распространяться по веществу со скоростью звука. И в тех местах вещества, в которые дойдет это разрежение плотности, температура будет повышена. Таким образом, начальная температура будет распространяться по веществу, как за счет теплопроводности, так и за счет звука. Для того, чтобы решить задачу о таком распространении температуры, нужно исходить из полной системы гидродинамических уравнений [1-2].

Сверхтекучий жидкий ^{4}He обладает целым рядом уникальных свойств, отличающих его от других веществ. Одним их таких свойств является возможность существования так называемого второго звука. В этой необычной звуковой моде, в отличие от обычного звука, колеблется не плотность (и давление), а температура и энтропия. Наряду с этой звуковой температурной волной в сверхтекучем ^{4}He существует и обычная диссипативная температурная мода, которая связана с теплопроводностью, термодиффузией и массовой диффузией [3]. Таким образом, температура изменяется за счет двух процессов: в звуковой волне второго звука и в температурной диссипативной волне [4-11]. Такая ситуация в течение долгого времени вызывала интерес у экспериментаторов, но непосредственные эксперименты возобновились только в последние годы. Одной из целей данной работы является описание этих экспериментов.

Основной целью этой работы является создание математической модели жидкостей, в которых релаксация температуры и плотности происходит одновременно за счет акустических и диссипативных мод. Решение такой задачи потребует разработки и применения вычислительных методов, обобщающие те, которые используются при решении обычных задач сохранения тепла и массы: метод разделения переменных, метод изображений источников.

2. Описание модели

Для описания распространения тепла в первом слое используется уравнение теплопроводности с внешними равномерно распределенными источниками тепла:

$$\begin{gathered} \dot{T}_1 = \chi_1 T_1'' + q(t), \\ q(t) = Q_0 \cos(\omega t) = \omega T_0 \cos(\omega t), \end{gathered} \tag{2.1}$$

где χ_1 – температуропроводность первого слоя, T_1 – температура первого слоя, Q_0 – амплитуда внешних источников тепла, ω – частота.

Граничное условие на поток тепла на левом конце первого слоя задается в виде:

$$Q(0,t) = 0 \tag{2.2}$$

а на правом конце первого слоя поток тепла ищем в виде:

$$Q(l_1,t) = Q_1 \cos(\omega t + \varphi), \tag{2.3}$$

где l_1 - толщина первого слоя, Q_1 и φ – параметры, которые определяются из равенства температур и тепловых потоков на границе слоев.

Распространение тепла во втором слое изучается в двух случаях. Первый случай соответствует нормальным (не сверхтекучим) жидкостям, для которых распространение тепла описывается обычным уравнением теплопроводности, которое получается при пренебрежении коэффициентом теплового расширения вещества и имеет вид:

$$\dot{T}_2 = \chi_2 T_2'', \tag{2.4}$$

где χ_2 - температуропроводность второго слоя, T_2 – температура второго слоя.

Второй случай соответствует средам, в которых возможно звуковое распространение тепла. Тогда уравнения выглядят следующим образом [1]:

$$\begin{cases} \dot{v}_n + u_2^2 T' = 0 \\ \dot{T} + v_n' = \chi T'' \end{cases}. \tag{2.5}$$

Здесь u_2 - скорость так называемого «второго» звука, v_n – скорость, определяющая величину потока тепла:

$$v_n = \frac{Q}{ST}, \tag{2.6}$$

Q – плотность потока тепла, а S – энтропия единицы объема вещества.

При постановке задачи рассматриваются два варианта граничных условий:

$$\text{а)}\ T_2(x,t) \xrightarrow{x\to\infty} 0. \tag{2.7}$$

в случае, если второй слой полубесконечен, и

$$\text{б)}\ T(l_2,t) = 0. \tag{2.8}$$

в случае, если второй слой конечен. Здесь l_2 - толщина второго слоя.

3. Результаты вычислений

Для решения задачи использовалось преобразование Лапласа для того, чтобы в будущем решить задачу о включении и выключении теплового потока. Амплитуда и фаза теплового потока на границе слоев получены с помощью приравнивания температур и тепловых потоков на границе. В результате были найдены следующие решения. Для первого слоя:

$$T_1(x,t) = \frac{Q_1\sqrt{sh^2(\lambda_1 l_1) + \cos^2(\lambda_1 l_1)}\sin(\omega t - \alpha)}{\sqrt{ch^2(\lambda_1 l_1) - \cos^2(\lambda_1 l_1)}\lambda_1 \chi_1 C_{V1}} + \frac{\overline{Q}_0}{\omega}\sin(\omega t), \tag{3.1}$$

$$A_1(x) = \cos(\lambda_1 x) ch(\lambda_1 x)\cos(\lambda_1 l_1) sh(\lambda_1 l_1) + \sin(\lambda_1 x) sh(\lambda_1 x)\sin(\lambda_1 l_1) ch(\lambda_1 l_1),$$

$$B_1(x) = \sin(\lambda_1 x) sh(\lambda_1 x)\cos(\lambda_1 l_1) sh(\lambda_1 l_1) - \cos(\lambda_1 x) ch(\lambda_1 x)\sin(\lambda_1 l_1) ch(\lambda_1 l_1).$$

где $\lambda_1 = \sqrt{\omega / 2\chi_1}$, $\alpha = \varphi - \pi/4 + arctg(B_1(x)/A_1(x))$, $\overline{Q}_0 = Q_0 C_{V1} l_1$, а C_{V1} - теплоемкость первого слоя.

Для полубесконечного второго слоя в случае классической жидкости (случай 1а):

$$T_2(x,t)=\frac{Q_1\exp(-\lambda_2 x)}{\sqrt{2}\lambda_2\chi_2 C_{V2}}\sin(\omega t+\beta), \tag{3.2}$$

где $\lambda_2=\sqrt{\omega/2\chi_2}$, $\beta=\varphi-\lambda_2 x+\pi/4$, C_{V2} - теплоемкость второго слоя. Для сдвига по фазе найдено следующее выражение :

$$tg\varphi=-\frac{1+\theta_-}{1+\theta_+}. \tag{3.3}$$

Здесь $\theta_\pm=\dfrac{\lambda_2\chi_2 C_{V2}\varsigma_\pm}{2\xi}$, $\varsigma_\pm=sh(2\lambda_1 l_1)\pm\sin(2\lambda_1 l_1)$,

$\xi=\lambda_1\chi_1 C_{V_1}C_V\left(ch^2(\lambda_1 l_1)-\cos^2(\lambda_1 l_1)\right)$.

Для амплитуды потока тепла получено, что

$$Q_1=\frac{Q_0\lambda_2\chi_2 C_{V2}}{\omega((\cos\varphi-\sin\varphi)+\sqrt{2}(\theta_+\cdot\cos\varphi-\theta_-\cdot\sin\varphi))}. \tag{3.4}$$

Для второго слоя в случае полубесконечной задачи(случай 2а):

$$T_2(x,t)=\frac{Q_1\exp(-k_1x)}{\omega C_V}\left(k_1\sin(\omega t+\varphi-k_2x)+k_2\cos(\omega t+\varphi-k_2x)\right), \tag{3.5}$$

где сдвиг по фазе имеет такой вид

$$\varphi=-arctg\left(\frac{\sqrt{2}k_2\xi+\omega C_V\varsigma_-}{\sqrt{2}k_1\xi+\omega C_V\varsigma_+}\right), \tag{3.6}$$

а амплитуда потока тепла

$$Q_1=\frac{Q_0\xi}{\xi(k_1\cos\varphi-k_2\sin\varphi)+(\theta_+\cdot\cos\varphi-\theta_-\cdot\sin\varphi)C_V\omega/\sqrt{2}}. \tag{3.7}$$

Для второго слоя в случае задачи на отрезке (случай 2б) получаем :

$$T_{2segm}(x,t)=-\frac{Q_1\left(A_2(x)\sin(\omega t)+B_2(x)\cos(\omega t)\right)}{UC_V(ch^2(k_2l_2)-\cos^2(k_1l_2))}, \tag{3.8}$$

$$Q_{2segm}(x,t)=\frac{Q_1\left(A_{2Q}(x)\sin(\omega t)+B_{2Q}(x)\cos(\omega t)\right)}{ch^2(k_2l_2)-\cos^2(k_1l_2)}, \tag{3.9}$$

$$B_2(x)=\frac{U}{\omega}\left(\left((k_1\cos\varphi-k_2\sin\varphi)(s_2(x)s_3(l_2)-s_1(x)s_4(l_2))\right)+\right.$$
$$\left.\left((k_2\cos\varphi+k_1\sin\varphi)(s_1(x)s_3(l_2)+s_2(x)s_4(l_2))\right)\right),$$
$$A_{2Q}(x)=-\sin\varphi\left(s_3(l_2-x)s_3(l_2)+s_4(l_2-x)s_4(l_2)\right)$$
$$-\cos\varphi\left(s_4(l_2-x)s_3(l_2)-s_3(l_2-x)s_4(l_2)\right),$$
$$B_{2Q}(x)=\cos\varphi\left(s_3(l_2-x)s_3(l_2)+s_4(x)s_4(l_2)\right)-$$
$$\sin\varphi\left(s_4(l_2-x)s_3(l_2)-s_3(l_2-x)s_4(l_2)\right),$$
$$s_1(x)=\cos(k_2(l_2-x))sh(k_1(l_2-x)),$$
$$s_2(x)=\sin(k_2(l_2-x))ch(k_1(l_2-x)),$$

$$s_3(x)=\cos(k_2 x)ch(k_1 x),$$
$$s_4(x)=\sin(k_2 x)sh(k_1 x)..$$

Здесь используются величины, характеризующие бегущую тепловую волну:

$$k_1=\frac{\omega}{U}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{u_2^2}{U^2}\right)} \tag{3.10}$$

– величина, определяющая поглощение звука,

$$k_2=\frac{\omega}{U}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{u_2^2}{U^2}\right)} \tag{3.11}$$

– величина, определяющая длину волны звука,

$$U=\sqrt[4]{u_2^4+\omega^2\chi^2} \tag{3.12}$$

– величина, определяющая скорость распространения тепловых волн.

4. Предельные случаи

Рассмотрим предельные случаи отношения толщины первого слоя и длины тепловой волны в нем. В случае обычных классических жидкостей (1а)

$$l_1\lambda_1<<1:$$

$$\varphi=-arctg\left(\frac{C_{V1}}{C_{V2}}2\lambda_2 l_1\left(1-\frac{C_{V1}}{C_{V2}}2\lambda_2 l_1\right)\right)\xrightarrow{l_1\to 0}0, \tag{4.1}$$

$$Q_1=\overline{Q}_0\left(1-\frac{C_{V1}}{C_{V2}}\lambda_2 l_1\right)\xrightarrow{l_1\to 0}\overline{Q}_0. \tag{4.2}$$

Подставив эти значения параметров в решение (3.2), получим

$$T_2(x,t)=\frac{Q_0\exp(-\lambda_2 x)}{\sqrt{2}\lambda_2\chi_2 C_{V2}}\left(\cos(\omega t-\lambda_2 x)+\sin(\omega t-\lambda_2 x)\right), \tag{4.3}$$

что совпадает с решением уравнения теплопроводности для полубесконечного отрезка, в случае, когда на границе колеблется тепловой поток $(Q(0,t)=Q_0\cos(\omega t))$.

$$l_1\lambda_1>>1:$$

$$\varphi=-\frac{\pi}{4}, \tag{4.4}$$

$$Q_1=\frac{\overline{Q}_0}{l_1}\frac{C_{V2}}{\sqrt{2}\left(\lambda_2 C_{V1}+\lambda_1 C_{V2}\right)}\xrightarrow{l_1\to\infty}0. \tag{4.5}$$

Подставив эти значения параметров в решение (3.1), получим, что амплитуда теплового потока на границе равна $\frac{\overline{Q}_0}{\omega}$, что соответствует задаче о периодическом колебании температуры на границе ($T(0,t)=T_0\cos(\omega t)$).

В случае сверхтекучих жидкостей (2а)

$$l_1\lambda_1<<1:$$

$$\varphi = -arctg\left(\frac{C_{V1}}{C_V}k_2 l_1\left(1-\frac{C_{V1}}{C_{V2}}k_1 l_1\right)\right)\xrightarrow{l_1\to 0} 0, \tag{4.6}$$

$$Q_1 = \overline{Q}_0\left(1-\frac{C_{V1}}{C_{V2}}k_1 l_1\right)\xrightarrow{l_1\to 0}\overline{Q}_0, \tag{4.7}$$

Подставив эти значения параметров в решение (3.5), получим

$$T_2(x,t) = \frac{Q_0\exp(-k_1 x)}{\omega C_V}\left(k_1\sin(\omega t - k_2 x) + k_2\cos(\omega t - k_2 x)\right),$$

что совпадает с решением системы уравнений (2.5) для полубесконечного отрезка, в случае, когда на границе колеблется тепловой поток $(Q(0,t) = Q_0\cos(\omega t))$.

$$l_1\lambda_1 << 1:$$

$$\varphi = -arctg\left(\frac{k_2 C_{V1} + \lambda_1 C_V}{k_1 C_{V1} + \lambda_1 C_V}\right), \tag{4.8}$$

$$Q_1 = \frac{\overline{Q}_0}{l_1\left(\lambda_1\chi_1 C_{V1}(k_1\cos\varphi - k_2\sin\varphi) + (\cos\varphi - \sin\varphi)\,C_V\omega/\sqrt{2}\right)}, \tag{4.9}$$

$$\lambda_1 << l_1 \text{ и } \lambda_1\chi_1 C_{V1} << C_V u_2:$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{4}, \tag{4.10}$$

$$Q_1 = \frac{\overline{Q}_0}{l_1}\frac{\sqrt{2}\lambda_1}{(\cos\varphi - \sin\varphi)}\xrightarrow{l_1\to\infty} 0. \tag{4.11}$$

Т. о., при толщине первого слоя значительно меньшей длины тепловой волны, амплитуда теплового потока на границе первого слоя стремится к единице, в случае, когда толщина первого слоя значительно больше длины тепловой волны, амплитуда теплового потока на границе первого слоя стремится к нулю. Т.е. при достаточно тонком первом слое все тепло, выделенное в нем, переходит во второй слой, что аналогично периодическим колебаниям теплового потока на границе, а при достаточно толстом первом слое все тепло, выделенное в нем накапливается и не переходит во второй слой, что аналогично периодическим колебаниям температуры на границе.

5. Выводы

В работе построена математическая модель излучения и распространения тепла в двухслойной области. Первый слой является обычным веществом конечной толщины и служит нагревателем. В качестве второго слоя рассматривается жидкий гелий. В модели учитывается как звуковая, так и диссипативная мода. В рамках модели найдены условия теплового согласования границ слоев, получены аналитические выражения, описывающие тепловые процессы в рассматриваемой системе. Предложенная модель может быть использована для описания необычного поведения резонансов температуры и теплового потока и определения экспериментальных условий, при которых наблюдается такое явление.

ЛИТЕРАТУРА

1. Немченко К. Э., Рогова С. Ю. Звуковая и диссипативная релаксация сверхтекучих растворах ^{3}He-^{4}He // Конференція молодих вчених та аспірантів "ІЕФ - 2007". м.Ужгород, 14-19 травня. - 2007. - с. 163.
2. Nemchenko K., Rogova S. Sound and dissipative relaxation in superfluid ^{3}He-^{4}He mixtures // Наук. вісник Ужгородського ун-ту. Серія фізика. – 2007. вип. 21. – с. 57-62.
3. Халатников И.М. Теория сверхтекучести. – М.: Наука, 1970. – 160 с.
4. Nemchenko K., Rogova S. Normal modes in the mixtures of quantum liquids // КМУ "Фізика низьких температур", 5-7 червня, м. Харків. -2007.- с. 40.
5. Nemchenko K., Rogova S. Second sound contribution to evolution of temperature gradient in helium isotope mixtures // International Symposium QFS. 1-6 August, Kazan. – 2007. - p.102.
6. Nemchenko K., Rogova S. Second Sound Contribution to Temperature Gradient Evolution in Superfluid Mixtures // J. of Low Temp. Phys. – 2008. v. 150, N. 3-4. - p. 187-193.
7. Немченко К. Э., Рогова С. Ю. Звуковой тепло и массоперенос в сверхтекучих растворах различной геометрии // 1-а Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених "Фізика низьких температур". 20-23 травня, м. Харків. – 2008. - с.78.
8. Nemchenko K., Rogova S. Heat transfer by sound in superfluid heliumat low temperatures // 4-th International Conference PLMMP. May 23-26, Kyiv. – 2008. - p. 215.
9. Немченко К. Э., Рогова С. Ю. Heat Transfer Peculiarities in Quantum Liquids // 2-а Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених "Фізика низьких температур ". 1-5 червня, м. Харків. - 2009, с.136.
10. Немченко К. Э., Рогова С. Ю. Релаксация температуры и концентрации в квантовых сверхтекучих растворах ^{3}He-^{4}He // 35-е совещание по физике низких температур, 29 сентября – 2 октября, Черноголовка. –2009. с. 51
11. Nemchenko K., Rogova S. Heat and ^{3}He Transfer by Second Sound in Superfluid Helium at Low Temperatures // J. of Molecular Liquids. – 2010. v. 151. p. 9-11.

Надійшла у першій редакції 26.05.2010, в останній - 13.06.2010.