

УДК 537.8

Анализ трёхмерных нестационарных электромагнитных полей с применением метода конечных элементов

М. Г. Пантелят, Е. К. Руденко, А. Н. Сафонов, Н. Г. Шульженко

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Украина

Описана методика компьютерного моделирования методом конечных элементов распределения нестационарного трёхмерного электромагнитного поля в электрических машинах и электротехнических устройствах различного назначения. Для подтверждения достоверности разработанной методики анализируются результаты решения тестовой задачи для частного случая нестационарного электромагнитного поля ротора турбогенератора. Проведено численное исследование влияния магнитной проницаемости материала на трёхмерные нестационарные электромагнитные процессы в упрощённой схеме ротора. Показана необходимость использования трёхмерных постановок и расчётных моделей для численного анализа нестационарных электромагнитных процессов в реальных конструкциях электрических машин.

Ключевые слова: нестационарное электромагнитное поле, компьютерное моделирование, метод конечных элементов, трёхмерная постановка.

Описано методику комп'ютерного моделювання методом скінченних елементів розподілу нестационарного тривимірного електромагнітного поля в електричних машинах та електротехнічних пристроях різного призначення. Для підтвердження достовірності розробленої методики аналізуються результати розв'язання тестової задачі для окремого випадку нестационарного електромагнітного поля ротора турбогенератора. Проведено чисельне дослідження впливу магнітної проникності матеріалу на тривимірні електромагнітні процеси в спрощеній схемі ротора. Показана необхідність використання тривимірних постановок і розрахункових моделей для чисельного аналізу нестационарних електромагнітних процесів в реальних конструкціях електричних машин.

Ключові слова: нестационарне електромагнітне поле, комп'ютерне моделювання, метод скінченних елементів, тривимірна постановка.

A method for computer modelling by the finite element method of the transient 3D magnetic field distribution in electrical machines and various electrical engineering devices are described. For confirmation of the developed technique reliability results of the testing problem solution for the particular case of the turbogenerator rotor transient electromagnetic field are analyzed. Numerical investigation of the material magnetic permeability influence on spatial transient electromagnetic processes in the rotor simplified model is carried out. The necessity of the use of 3D formulations and numerical models for the numerical analysis of transient electromagnetic processes in real-life structures of electrical machines is shown.

Key words: transient electromagnetic field, computer modelling, finite element method, 3D formulation.

1. Введение

Электромагнитные процессы в электротехнических устройствах различного назначения в общем случае носят пространственный характер. В первую очередь это относится к таким фрагментам конструкции, как концевая зона ротора и статора электрических машин. В связи с этим, разработка методики расчёта электромагнитных явлений в трёхмерной постановке является

актуальной научной и прикладной задачей. В последние годы для расчёта пространственных электромагнитных полей широко используется метод конечных элементов [1-8], являющийся одним из наиболее развитых и эффективных методов численного решения уравнений математической физики.

С научной и практической точки зрения наибольший интерес представляет компьютерное моделирование нестационарных электромагнитных полей и процессов в электротехническом оборудовании. Примером актуальной нестационарной задачи может служить исследование электромагнитного состояния ротора синхронного турбогенератора на аварийных и динамических режимах. Полученное в результате решения задачи пространственно-временное распределение электромагнитного поля позволяет определить плотность вихревых токов, потери (внутренние источники тепла), момент и пондеромоторные силы для последующей расчётной оценки теплового, термомеханического и вибрационного состояния конструкции и срабатывания её ресурса.

В данной работе описывается разработанная методика компьютерного моделирования методом конечных элементов нестационарных трёхмерных электромагнитных процессов в электрических машинах и электротехническом оборудовании различного назначения. При создании программного обеспечения реализована постановка задачи конечноэлементного анализа электромагнитных полей в трёхмерной постановке [4, 5, 8]. Для подтверждения достоверности разработанной методики анализируются результаты решения тестовой задачи для частного случая нестационарного электромагнитного поля ротора турбогенератора. Проведено численное исследование влияния магнитной проницаемости материала на трёхмерные нестационарные электромагнитные процессы в упрощённой схеме ротора, которое не может быть выполнено при использовании двухмерной постановки.

2. Математическая модель трёхмерного электромагнитного поля и решение задач методом конечных элементов

Математическое описание электромагнитных процессов в общем случае представляет собой систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме без учёта токов смещения [4-6]

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J}; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

дополненную материальными уравнениями, определяющими электрофизические свойства материалов

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}; \\ \mathbf{J} &= \gamma \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (2)$$

где \mathbf{H} – вектор напряжённости магнитного поля; \mathbf{B} – вектор индукции магнитного поля; \mathbf{E} – вектор напряжённости электрического поля; \mathbf{J} – вектор плотности токов проводимости; μ – магнитная проницаемость; γ – удельная электрическая проводимость.

В декартовой системе координат вектора, входящие в выражения (1), (2), могут быть представлены в виде [1, 4]:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}; \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}; \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}.$$

В общем случае, магнитная проницаемость μ может зависеть от напряжённости магнитного поля \mathbf{H} [7]. Явления магнитного гистерезиса и анизотропии магнитных свойств материалов не учитываются.

В данной работе система уравнений (1), (2) решается в терминах векторного магнитного потенциала \mathbf{A} , который вводится соотношениями [4-6]

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \text{rot } \mathbf{A}; \\ \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } V; \end{aligned} \quad (3)$$

где V – скалярный электрический потенциал.

В декартовой системе координат вектор \mathbf{A} имеет вид [1]

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}.$$

В общем случае нестационарных электромагнитных процессов вектор плотности токов проводимости \mathbf{J} представляется в виде суммы заданного вектора плотности тока стороннего источника \mathbf{J}_S и вектора плотности вихревых токов \mathbf{J}_e [6]:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_S + \mathbf{J}_e,$$

где

$$\mathbf{J}_S = \begin{pmatrix} J_{Sx} \\ J_{Sy} \\ J_{Sz} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}; \quad \mathbf{J}_e = -\gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \gamma \text{grad } V = -\gamma \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial A_z}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}.$$

Рассматривается решение линейной задачи расчёта нестационарного магнитного поля, т.е. зависимость магнитной проницаемости μ от напряжённости магнитного поля \mathbf{H} не учитывается.

Нестационарная линейная векторная краевая задача, решаемая в терминах векторного магнитного потенциала \mathbf{A} (3), приобретает вид [5, 8]:

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{A} + \mu \mathbf{J} = \gamma \mu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \text{ в } \Omega, \quad 0 < t \leq \tau \\ -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \nu} = \alpha_A (\mathbf{A} - \mathbf{A}_\infty) \text{ на } \Gamma, \quad 0 < t \leq \tau. \\ \mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \text{ в } \Omega, \quad t = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} A_{x0} \\ A_{y0} \\ A_{z0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}; \quad \mathbf{A}_\infty = \begin{pmatrix} A_{x\infty} \\ A_{y\infty} \\ A_{z\infty} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1},$$

где \mathbf{J} – заданные в одной или нескольких подобластях расчётной области токи в виде вектора плотности тока стороннего источника (например, токи в статоре турбогенератора), Ω – область решения задачи, Γ – граница области Ω , ν – внешняя нормаль к боковой поверхности Γ , α_A – штрафной множитель для приближённого удовлетворения граничных условий не являющихся естественными, \mathbf{A}_0 – вектор начальных условий для компонент векторного магнитного потенциала (при решении прикладных задач все три компоненты задаются равными нулю), \mathbf{A}_∞ – вектор, компонентами которого являются заданные значения векторного магнитного потенциала на границе Γ .

Функционал краевой задачи (4) для вектора \mathbf{A} запишется следующим образом:

$$\mathbf{j} = \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} = \iiint_{\Omega} \left[\frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} (\nabla A_x)^2 \\ (\nabla A_y)^2 \\ (\nabla A_z)^2 \end{pmatrix} + 2\gamma \begin{pmatrix} A_x \frac{\partial A_x}{\partial t} \\ A_y \frac{\partial A_y}{\partial t} \\ A_z \frac{\partial A_z}{\partial t} \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} J_x A_x \\ J_y A_y \\ J_z A_z \end{pmatrix} \right] d\Omega + \iint_{\Gamma} \alpha_A \left[\begin{pmatrix} A_x^2 \\ A_y^2 \\ A_z^2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} A_{x\infty} A_x \\ A_{y\infty} A_y \\ A_{z\infty} A_z \end{pmatrix} \right] d\Gamma \in \mathbb{R}^{3 \times 1}. \quad (5)$$

Введём сетку по временной переменной следующим образом:

$$\omega_t = \{t_l : t_l = \Delta t l; l = \overline{0, n_t}; \Delta t = \tau n_t^{-1}; n_t \in \mathbb{N}\}$$

Нестационарная краевая задача (4) решается с использованием неявной конечно-разностной схемы Крэнка-Николсона по времени для получения приближённого решения в векторном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{A}^{l+1}}{\partial t} = 2 \frac{\mathbf{A}^{l+1} - \mathbf{A}^l}{\Delta t} - \frac{\partial \mathbf{A}^l}{\partial t}, \quad l = \overline{0, n_t - 1}; \quad \mathbf{A}^0 = \mathbf{A}_0, \quad (6)$$

где A^l – соответствующая пространственная компонента векторного магнитного потенциала; Δt – величина шага по времени.

Тогда функционал (5) краевой задачи после подстановки в него (6) примет вид:

$$\mathbf{j}^{l+1} = \begin{pmatrix} j_x^{l+1} \\ j_y^{l+1} \\ j_z^{l+1} \end{pmatrix} = \iiint_{\Omega} \left[\frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} (\nabla A_x^{l+1})^2 \\ (\nabla A_y^{l+1})^2 \\ (\nabla A_z^{l+1})^2 \end{pmatrix} + \frac{4\gamma}{\Delta t} \left[\begin{pmatrix} (A_x^{l+1})^2 \\ (A_y^{l+1})^2 \\ (A_z^{l+1})^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_x^l A_x^{l+1} \\ A_y^l A_y^{l+1} \\ A_z^l A_z^{l+1} \end{pmatrix} \right] \right] d\Omega -$$

$$\begin{aligned}
& -2 \iiint_{\Omega} \gamma \left(\begin{array}{c} A_x^{l+1} \frac{\partial A_x^l}{\partial t} \\ A_y^{l+1} \frac{\partial A_y^l}{\partial t} \\ A_z^{l+1} \frac{\partial A_z^l}{\partial t} \end{array} + \begin{array}{c} J_x A_x^{l+1} \\ J_y A_y^{l+1} \\ J_z A_z^{l+1} \end{array} \right) d\Omega + \\
& + \iint_{\Gamma} \alpha_A \left(\begin{array}{c} (A_x^{l+1})^2 \\ (A_y^{l+1})^2 \\ (A_z^{l+1})^2 \end{array} - 2 \begin{array}{c} A_{x\infty} A_x^{l+1} \\ A_{y\infty} A_y^{l+1} \\ A_{z\infty} A_z^{l+1} \end{array} \right) d\Gamma, \quad l = \overline{0, n_t - 1}.
\end{aligned}$$

Решение параболической краевой задачи (4) на $(l+1)$ -ом шаге времени представим в виде:

$$\mathbf{A}^{l+1} = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{k=1}^{n_z} \mathbf{A}_{ijk}^{l+1} \varphi_{ijk}, \quad i = \overline{1, n_x}; \quad j = \overline{1, n_y}; \quad k = \overline{1, n_z}; \quad l = \overline{0, n_t - 1},$$

где

$$\mathbf{A}_{ijk}^{l+1} = \begin{pmatrix} A_{xijk}^{l+1} \\ A_{yijk}^{l+1} \\ A_{zijk}^{l+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}, \quad i = \overline{1, n_x}; \quad j = \overline{1, n_y}; \quad k = \overline{1, n_z} \quad - \quad \text{узловые значения}$$

искомой функции;

$\varphi_{ijk}, \quad i = \overline{1, n_x}; \quad j = \overline{1, n_y}; \quad k = \overline{1, n_z}$ – базисные финитные функции, определённые на произвольной сетке узлов.

Необходимое условие минимумов функционалов (5)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{J}^{l+1}}{\partial A_{x pqr}^{l+1}} = 0; \quad p = \overline{1, n_x}; \quad q = \overline{1, n_y}; \quad r = \overline{1, n_z}; \quad l = \overline{0, n_t - 1} \\ \frac{\partial \mathcal{J}^{l+1}}{\partial A_{y pqr}^{l+1}} = 0; \quad p = \overline{1, n_x}; \quad q = \overline{1, n_y}; \quad r = \overline{1, n_z}; \quad l = \overline{0, n_t - 1} \\ \frac{\partial \mathcal{J}^{l+1}}{\partial A_{z pqr}^{l+1}} = 0; \quad p = \overline{1, n_x}; \quad q = \overline{1, n_y}; \quad r = \overline{1, n_z}; \quad l = \overline{0, n_t - 1} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial j_x^{l+1}}{\partial A_{x\ pqr}^{l+1}} = 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. ; p = \overline{1, n_x}; q = \overline{1, n_y}; r = \overline{1, n_z}; l = \overline{0, n_t - 1}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \frac{\partial j_y^{l+1}}{\partial A_{y\ pqr}^{l+1}} = 0 \\ 0 \end{array} \right. ; p = \overline{1, n_x}; q = \overline{1, n_y}; r = \overline{1, n_z}; l = \overline{0, n_t - 1}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial j_z^{l+1}}{\partial A_{z\ pqr}^{l+1}} = 0 \end{array} \right. ; p = \overline{1, n_x}; q = \overline{1, n_y}; r = \overline{1, n_z}; l = \overline{0, n_t - 1}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial j_x^{l+1}}{\partial A_{x\ pqr}^{l+1}} = 0 \\ \frac{\partial j_y^{l+1}}{\partial A_{y\ pqr}^{l+1}} = 0 \\ \frac{\partial j_z^{l+1}}{\partial A_{z\ pqr}^{l+1}} = 0 \end{array} \right. ; p = \overline{1, n_x}; q = \overline{1, n_y}; r = \overline{1, n_z}; l = \overline{0, n_t - 1}$$

Выполнив необходимые математические преобразования, получаем три независимые линейные системы алгебраических уравнений относительно узловых значений компонент вектора \mathbf{A}_{ijk}^{l+1} на каждом временном шаге:

$$\sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{k=1}^{n_z} \mathbf{A}_{ijk}^{l+1} \left\{ \iiint_{\Omega} \left[\frac{1}{\mu} \nabla \varphi_{ijk} \nabla \varphi_{pqr} + 2 \frac{\gamma}{\Delta t} \varphi_{ijk} \varphi_{pqr} \right] d\Omega + \iint_{\Gamma} \alpha_A \varphi_{ijk} \varphi_{pqr} d\Gamma \right\} =$$

$$= \iiint_{\Omega} \left(2 \frac{\gamma}{\Delta t} \mathbf{A}^l + \gamma \frac{\partial \mathbf{A}^l}{\partial t} + \mathbf{J} \right) \varphi_{pqr} d\Omega + \iint_{\Gamma} \alpha_A \mathbf{A}_{\infty} \varphi_{pqr} d\Gamma;$$

$$p = \overline{1, n_x}; q = \overline{1, n_y}; r = \overline{1, n_z}; l = \overline{0, n_t - 1}.$$

В результате решения данной системы находим компоненты вектора \mathbf{A} и вычисляем его абсолютную величину на каждом шаге по времени l следующим образом:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

В разработанном программном обеспечении реализован метод конечных элементов с использованием пространственных 8-узловых конечных элементов на пространственной сетке в виде произвольных шестигранников [1].

Решение векторной задачи (4) представляется на интересующих пользователя временных шагах в виде изолиний компонент и модуля вектора магнитного потенциала \mathbf{A} , индукции магнитного поля \mathbf{B} (3) и напряжённости магнитного поля \mathbf{H} (2) по всей расчётной области, плотности вихревых токов \mathbf{J} (2), а также внутренних источников тепла Q в проводящих под областях конструкции. Компоненты вектора плотности вихревого тока \mathbf{J} , его абсолютная величина J , а также скалярная величина добавочных потерь Q вычисляются по формулам

$$\mathbf{J}_e \equiv \mathbf{J} = -\gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}; \quad J_e \equiv J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2 + J_z^2}; \quad Q = \frac{1}{\gamma} J^2. \quad (7)$$

Для вычисления производной по времени от вектора \mathbf{A} в (7) применяем её конечно-разностную аппроксимацию на сетке ω_i в виде [9, 10]

$$\frac{\partial \mathbf{A}^0}{\partial t} \approx \frac{-3\mathbf{A}^0 + 4\mathbf{A}^1 - \mathbf{A}^2}{2\Delta t}; \quad \frac{\partial \mathbf{A}^l}{\partial t} \approx \frac{\mathbf{A}^{l+1} - \mathbf{A}^{l-1}}{2\Delta t}, \quad l = \overline{1, n_t - 1};$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}^{n_t}}{\partial t} \approx \frac{3\mathbf{A}^{n_t} - 4\mathbf{A}^{n_t-1} + \mathbf{A}^{n_t-2}}{2\Delta t}.$$

3. Сравнение результатов расчёта нестационарного электромагнитного поля с известным решением для частного случая

Для апробации разработанной методики решена задача расчёта двухмерного нестационарного электромагнитного поля в поперечном сечении турбогенератора ТГВ-300, приведенном на рис. 1.

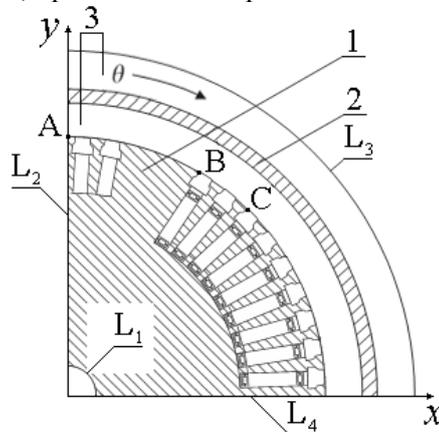


Рис. 1. Расчётная схема ротора турбогенератора ТГВ-300 (¼ поперечного сечения)
1 – ротор, 2 – под область с заданной плотностью постоянного тока статора, 3 – воздух; L_1, L_3 – границы с заданным нулевым значением векторного магнитного

потенциала, $L = \bigcup_{h=1}^4 L_h$ – граница области решения задачи

Расчётная область представляет собой трёхмерную схему ротора, представленную на рис. 2. Для выполнения сравнения численных результатов предполагалось, что пространственное распределение электромагнитного поля по длине ротора является равномерным. Для реализации данного предположения при решении трёхмерной задачи на обоих торцах ротора задавались граничные условия симметрии

$$\frac{\partial A_z(x, y, t)}{\partial z} = 0$$

для единственной осевой компоненты вектора магнитного потенциала A_z .

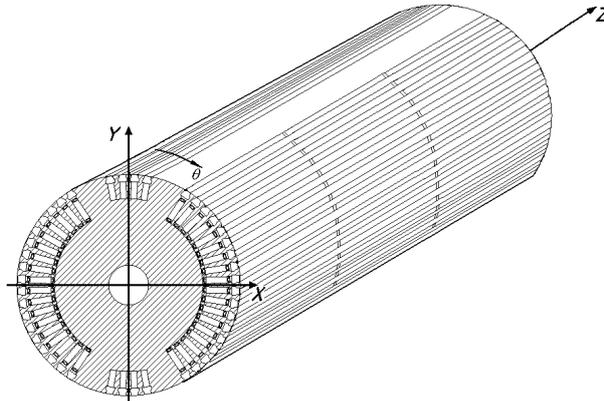


Рис. 2. Трёхмерная схема ротора турбогенератора ТГВ-300

Нестационарная линейная векторная краевая задача в двумерной постановке имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta A_z(x, y, t) + \mu J_z(x, y, t) = \gamma \mu \frac{\partial A_z(x, y, t)}{\partial t} \text{ в } \Gamma, 0 < t \leq \tau \\ -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z(x, y, t)}{\partial \nu} = \alpha_A (A_z(x, y, t) - A_{z\infty}(x, y, t)) \text{ на } L_1 \cup L_3, 0 < t \leq \tau \\ -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z(x, y, t)}{\partial \nu} = 0 \text{ на } L_2 \cup L_4, 0 < t \leq \tau \\ A_z(x, y, 0) = A_{z0}(x, y) \text{ в } \Gamma \end{cases}$$

Функционал для данной краевой задачи в двумерной постановке строится следующим образом:

$$J_z = \iint_{\Gamma} \left[\frac{1}{\mu} (\nabla A_z(x, y, t))^2 + 2\gamma A_z(x, y, t) \frac{\partial A_z(x, y, t)}{\partial t} - 2J_z(x, y, t) A_z(x, y, t) \right] d\Gamma + \int_{L_1 \cup L_3} \alpha_A [A_z^2(x, y, t) - 2A_{z\infty}(x, y, t) A_z(x, y, t)] d(L_1 \cup L_3).$$

Введём сетку по временной переменной:

$$\omega_t = \{ t_l : t_l = \Delta t l; l = \overline{0, n_t}; \Delta t = \tau n_t^{-1}; n_t \in \mathbb{N} \}.$$

Обозначим с учётом сетки ω_t :

$$A_z(x, y, t_l) = A_z^l(x, y); \left. \frac{\partial A_z(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=t_l} = \frac{\partial A_z^l(x, y)}{\partial t}.$$

Как и в случае нестационарной краевой задачи в трёхмерной постановке (4), решение ищется с использованием неявной конечно-разностной схемы Крэнка-Николсона по времени в следующем виде:

$$\frac{\partial A_z^{l+1}(x, y)}{\partial t} = 2 \frac{A_z^{l+1}(x, y) - A_z^l(x, y)}{\Delta t} - \frac{\partial A_z^l(x, y)}{\partial t}, \quad l = \overline{0, n_t - 1};$$

$$A_z^0(x, y) = A_{z0}(x, y).$$

В результате подстановки этой формулы в функционал краевой задачи в двумерной постановке мы получим:

$$j_z^{l+1} = \iint_{\Gamma} \left[\frac{1}{\mu} \left(\nabla A_z^{l+1}(x, y) \right)^2 + \frac{4\gamma}{\Delta t} \left(\left(A_z^{l+1}(x, y) \right)^2 - A_z^l(x, y) A_z^{l+1}(x, y) \right) \right] d\Gamma -$$

$$- 2 \iint_{\Gamma} \left[\gamma A_z^{l+1}(x, y) \frac{\partial A_z^l(x, y)}{\partial t} + J_z(x, y, t_{l+1}) A_z^{l+1}(x, y) \right] d\Gamma +$$

$$+ \int_{L_1 \cup L_3} \alpha_A \left[\left(A_z^{l+1}(x, y) \right)^2 - 2 A_{z\infty}(x, y, t_{l+1}) A_z^{l+1}(x, y) \right] d(L_1 \cup L_3), \quad l = \overline{0, n_t - 1}.$$

Решение краевой задачи в двумерной постановке на $(l+1)$ -ом временном шаге выписывается в следующем виде:

$$A_z^{l+1}(x, y) = \sum_{k=1}^{n_z} A_{zk}^{l+1} \varphi_k(x, y), \quad k = \overline{1, n_z}; \quad l = \overline{0, n_t - 1}.$$

Необходимое условие минимума функционала в двумерной постановке:

$$\frac{\partial j_z^{l+1}}{\partial A_{zr}^{l+1}} = 0; \quad r = \overline{1, n_z}; \quad l = \overline{0, n_t - 1}.$$

В конечном итоге мы получаем линейные системы алгебраических уравнений относительно узловых значений A_{zk}^{l+1} , $k = \overline{1, n_z}$ на каждом временном шаге:

$$\sum_{k=1}^{n_z} A_{zk}^{l+1} \iint_{\Gamma} \left[\frac{1}{\mu} \nabla \varphi_k(x, y) \nabla \varphi_r(x, y) + 2 \frac{\gamma}{\Delta t} \varphi_k(x, y) \varphi_r(x, y) \right] d\Gamma +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n_z} A_{zk}^{l+1} \int_{L_1 \cup L_3} \alpha_A \varphi_k(x, y) \varphi_r(x, y) d(L_1 \cup L_3) =$$

$$= \iint_{\Gamma} \left(2 \frac{\gamma}{\Delta t} A_z^l(x, y) + \gamma \frac{\partial A_z^l(x, y)}{\partial t} + J_z(x, y, t_{l+1}) \right) \varphi_r(x, y) d\Gamma +$$

$$+ \int_{L_1 \cup L_3} \alpha_A A_{z\infty}(x, y, t_{l+1}) \varphi_r(x, y) d(L_1 \cup L_3);$$

$$r = \overline{1, n_z}; \quad l = \overline{0, n_t - 1}.$$

Рассматривается режим короткого замыкания двух фаз машины [9]. Решение задачи выполнено с использованием описанной в данной статье методики расчёта трёхмерных нестационарных электромагнитных полей, а также с помощью разработанной ранее программы для конечноэлементного анализа электромагнитных процессов в двухмерной постановке [11]. Бегущая волна плотности токов обратной последовательности при коротком замыкании двух фаз турбогенератора задаётся в подобласти толщиной 5 см, которая имитирует статор турбогенератора, в следующем виде [11, 12]:

$$J_z(x, y, t) = \mathcal{G} \left(c_1 e^{-\frac{t}{\tilde{t}_1}} + c_2 e^{-\frac{t}{\tilde{t}_2}} + c_3 \right) \sin(2\pi ft + \varphi) \in C^\infty(0, \tau];$$

$$c_1 = 3763.2, c_2 = 14403, c_3 = 5033.7, \tilde{t}_1 = 0.012 \text{ с}, \tilde{t}_2 = 1.14 \text{ с};$$

$$\mathcal{G} = 0.001724145, f = 100 \text{ Гц}; \varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & y = 0 \\ \arctg \frac{x}{y}, & y \neq 0 \end{cases},$$

x, y – оси декартовой системы координат.

Для выполнения сравнения численных результатов предполагалось, что пространственное распределение магнитного поля по длине ротора является равномерным. Подробная информация о конструкции ротора и свойствах материалов приведена в работе [11].

Полученные численные результаты (временное распределение векторного магнитного потенциала в характерных точках наружной поверхности ротора, обозначенных на рис. 1 буквами А, В, С) приведены на рис. 3. Представлено также изменение векторного магнитного потенциала во времени в точках, находящихся под поверхностью соответствующих клиньев (т.е. под точками А, В, С) на глубине 0.4 см и 0.8 см (на рис. 3 данные точки обозначены соответственно А1, В1, С1 и А2, В2, С2).

Сравнение приведенных на рис. 3 результатов с известным решением, полученным с использованием двухмерной модели [11], показывает, что погрешность расчёта нестационарного электромагнитного поля в поперечном сечении ротора турбогенератора (см. рис. 1) не превышает 5 %.

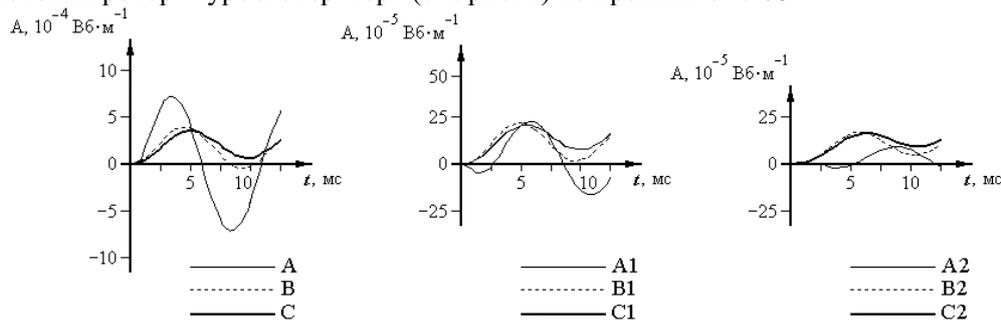


Рис. 3. Векторный магнитный потенциал в характерных точках сечения ротора турбогенератора

Таким образом, разработанная методика позволяет выполнять конечноэлементный анализ трёхмерных нестационарных электромагнитных полей с точностью, достаточной для использования полученных результатов в инженерной практике.

4. Исследование влияния магнитной проницаемости материала на трёхмерные нестационарные электромагнитные процессы в упрощённой схеме ротора турбогенератора

Рассматриваются нестационарные электромагнитные процессы в упрощённой схеме синхронного турбогенератора ТГВ-300, приведенной на рис.4.

В разработанном программном обеспечении пока реализовано решение линейной задачи расчёта стационарного магнитного поля, т.е. зависимость магнитной проницаемости μ от напряжённости магнитного поля \mathbf{H} не учитывается. При выполнении расчётов для магнитомягких материалов (в первую очередь, для стали ротора турбогенератора) задаётся постоянное значение магнитной проницаемости.

Рассматриваются два способа задания магнитной проницаемости стали ротора:

- среднее по кривой намагничивания значение магнитной проницаемости $\mu = 100\mu_0$ (μ_0 – магнитная проницаемость вакуума) [11];
- величина магнитной проницаемости насыщенной стали $\mu = \mu_0$.

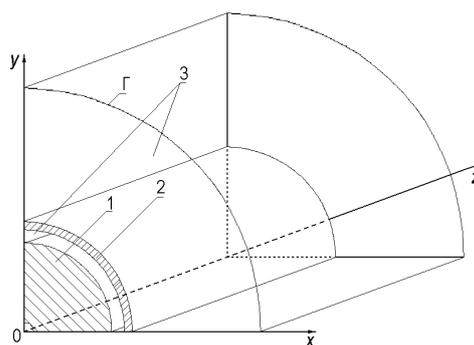


Рис. 4. Упрощённая трёхмерная схема турбогенератора.
1 – ротор; 2 – подобласть с заданной плотностью тока статора;
3 – воздух; Г – удалённая граница

Расчётная область включает в себя упрощённую модель $\frac{1}{4}$ части поперечного сечения стального ротора турбогенератора без обмоток возбуждения и пазовых клиньев (подобласть 1 на рис. 4), подобласть 2 (материал – медь с удельной электрической проводимостью $\gamma = 6 \cdot 10^7 \text{ См} \cdot \text{м}^{-1}$) с заданной плотностью тока статора в режиме короткого замыкания двух фаз турбогенератора [11-13] и диэлектрические подобласти (воздух) 3. Диаметр ротора 1.10 м, воздушный зазор между статором и ротором – 0.09 м, радиус удалённой границы Г (см. рис. 4), на которой задаётся нулевое значение векторного магнитного потенциала, составляет 1.50 м [11]. Длина

рассматриваемого фрагмента конструкции ротора – 5 м, на одном торце ($z = 0$ м) заданы граничные условия $A_x = 0$, $A_y = 0$ и $A_z = 0$, а на другом ($z = 5$ м) – граничные условия симметрии для всех трёх компонент векторного магнитного потенциала.

Материал ротора – сталь с удельной электрической проводимостью $\gamma = 0.5 \cdot 10^7$ См·м⁻¹ [11] и постоянным значением магнитной проницаемости ($\mu = \mu_0$ и $\mu = 100\mu_0$). Бегущая волна плотности токов обратной последовательности при коротком замыкании двух фаз турбогенератора задаётся в подобласти толщиной 5 см, которая имитирует статор турбогенератора, в следующем виде [11, 13]:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}g \left(c_1 e^{-\frac{t}{\tilde{t}_1}} + c_2 e^{-\frac{t}{\tilde{t}_2}} + c_3 \right) \sin(2\pi ft + \varphi) \\ \sqrt{2}g \left(c_1 e^{-\frac{t}{\tilde{t}_1}} + c_2 e^{-\frac{t}{\tilde{t}_2}} + c_3 \right) \sin(2\pi ft + \varphi) \\ g \left(c_1 e^{-\frac{t}{\tilde{t}_1}} + c_2 e^{-\frac{t}{\tilde{t}_2}} + c_3 \right) \sin(2\pi ft + \varphi) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1},$$

$$c_1 = 3763.2, c_2 = 14403, c_3 = 5033.7, \tilde{t}_1 = 0.012 \text{ с}, \tilde{t}_2 = 1.14 \text{ с};$$

$$g = 0.001724145, f = 100 \text{ Гц};$$

$$\left(c_1 e^{-\frac{t}{\tilde{t}_1}} + c_2 e^{-\frac{t}{\tilde{t}_2}} + c_3 \right) \sin(2\pi ft + \varphi) \in C^\infty(0, \tau]; \varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & y = 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, & y \neq 0 \end{cases},$$

x, y – оси декартовой системы координат.

В качестве примеров полученных численных результатов на рис. 5 – 24 приведены графики, характеризующие протекание нестационарных электромагнитных процессов в рассматриваемой конструкции: изменение во времени компонент векторного магнитного потенциала (2), компонент вектора плотности вихревых токов (2) и добавочных потерь (7) в различных точках ротора (по радиусу и углу в поперечном сечении, а также по длине ротора) для различных величин магнитной проницаемости ($\mu = \mu_0$ и $\mu = 100\mu_0$). В подрисуночных подписях к рис. 5 – 24 указано положение точек конструкции ротора, в которых получены соответствующие результаты: осевая координата z точки по длине ротора и угол φ с осью y в поперечном сечении (см. рис. 4). Зависимости, приведенные на рис. 5 – 20, соответствуют точкам с радиусом 0.550 м, 0.501 м и 0.452 м; на рис. 21, 22 – 0.550 м и 0.501 м; на рис. 23, 24 – 0.452 м. С уменьшением радиуса точки амплитудные значения соответствующих величин уменьшаются.

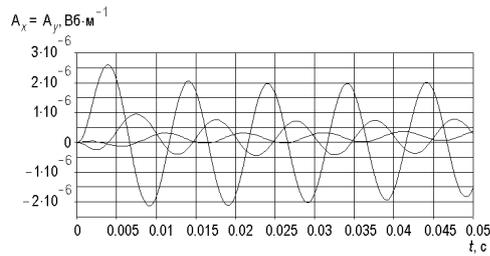


Рис. 5. Компоненты A_x и A_y векторного магнитного потенциала,

$$z = 1.25 \text{ м}; \varphi = 0^\circ; \mu = \mu_0$$

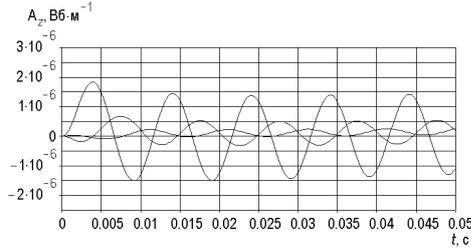


Рис. 7. Компонента A_z векторного магнитного потенциала,

$$z = 1.25 \text{ м}; \varphi = 0^\circ; \mu = \mu_0$$

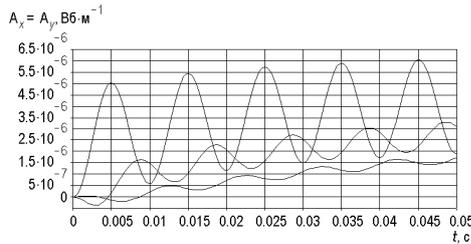


Рис. 9. Компоненты A_x и A_y векторного магнитного потенциала,

$$z = 5.00 \text{ м}; \varphi = 45^\circ; \mu = \mu_0$$

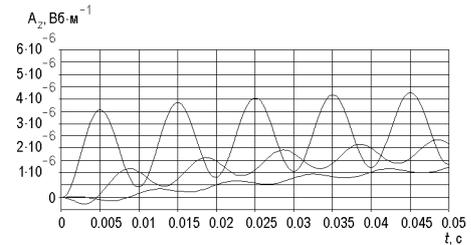


Рис. 11. Компонента A_z векторного магнитного потенциала,

$$z = 5.00 \text{ м}; \varphi = 45^\circ; \mu = \mu_0$$

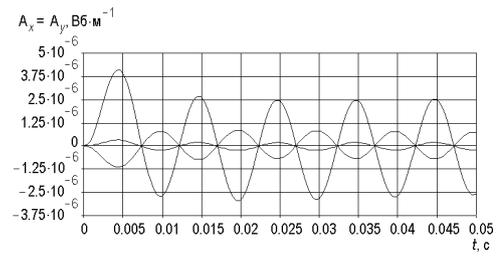


Рис. 6. Компоненты A_x и A_y векторного магнитного потенциала,

$$z = 1.25 \text{ м}; \varphi = 0^\circ; \mu = 100\mu_0$$

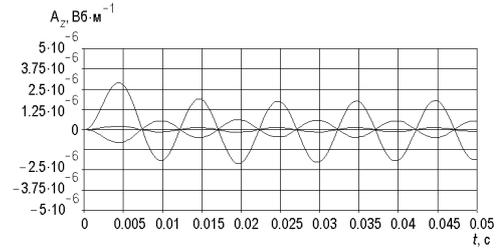


Рис. 8. Компонента A_z векторного магнитного потенциала,

$$z = 1.25 \text{ м}; \varphi = 0^\circ; \mu = 100\mu_0$$

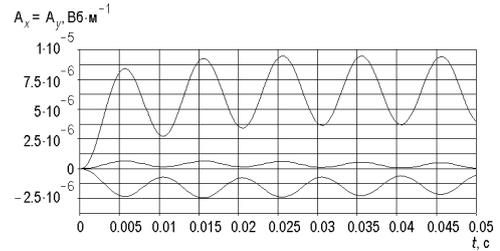


Рис. 10. Компоненты A_x и A_y векторного магнитного потенциала,

$$z = 5.00 \text{ м}; \varphi = 45^\circ; \mu = 100\mu_0$$

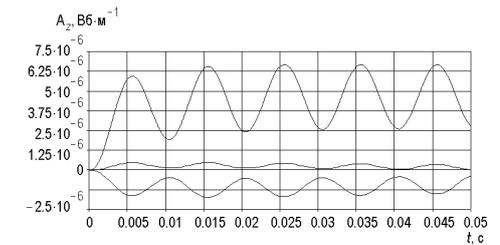


Рис. 12. Компонента A_z векторного магнитного потенциала,

$$z = 5.00 \text{ м}; \varphi = 45^\circ; \mu = 100\mu_0$$

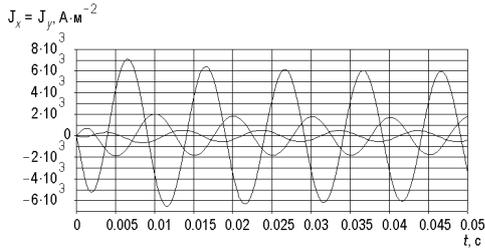


Рис. 13. Компоненты J_x и J_y плотности вихревых токов,
 $z = 1.25$ м; $\varphi = 0^\circ$; $\mu = \mu_0$

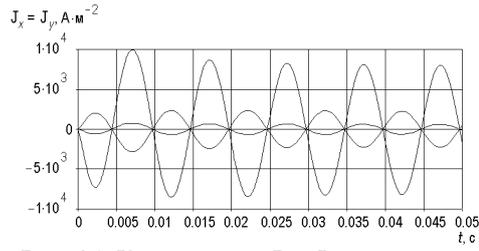


Рис. 14. Компоненты J_x и J_y плотности вихревых токов,
 $z = 1.25$ м; $\varphi = 0^\circ$; $\mu = 100\mu_0$

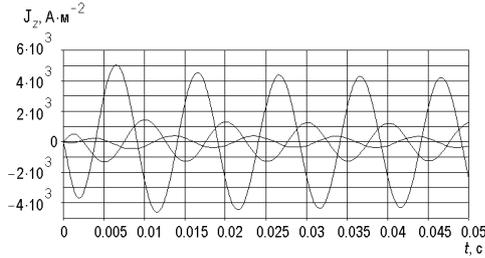


Рис. 15. Компонента J_z плотности вихревых токов,
 $z = 1.25$ м; $\varphi = 0^\circ$; $\mu = \mu_0$

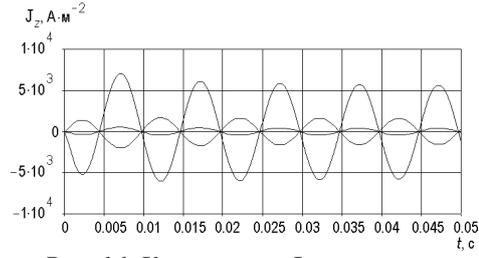


Рис. 16. Компонента J_z плотности вихревых токов,
 $z = 1.25$ м; $\varphi = 0^\circ$; $\mu = 100\mu_0$

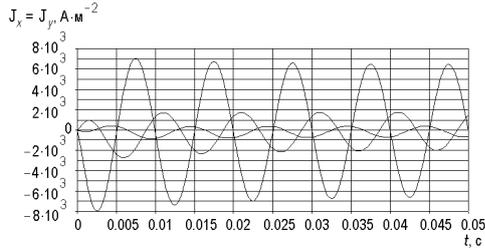


Рис. 17. Компоненты J_x и J_y плотности вихревых токов,
 $z = 5.00$ м; $\varphi = 45^\circ$; $\mu = \mu_0$

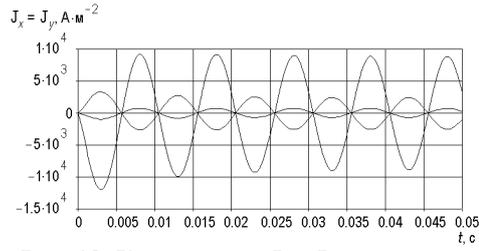


Рис. 18. Компоненты J_x и J_y плотности вихревых токов,
 $z = 5.00$ м; $\varphi = 45^\circ$; $\mu = 100\mu_0$

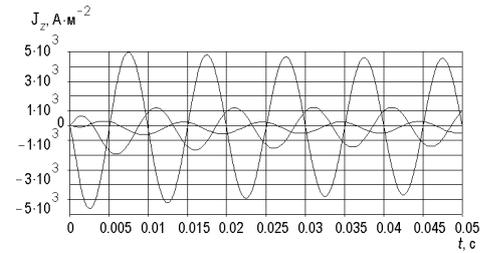


Рис. 19. Компонента J_z плотности вихревых токов,
 $z = 5.00$ м; $\varphi = 45^\circ$; $\mu = \mu_0$

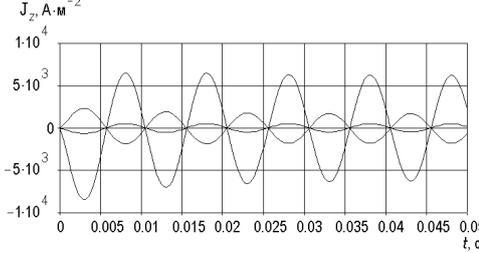


Рис. 20. Компонента J_z плотности вихревых токов,
 $z = 5.00$ м; $\varphi = 45^\circ$; $\mu = 100\mu_0$

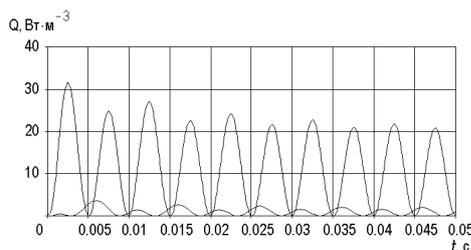


Рис. 21. Добавочные потери Q ,
 $z = 5.00$ м; $\varphi = 45^\circ$; $\mu = \mu_0$

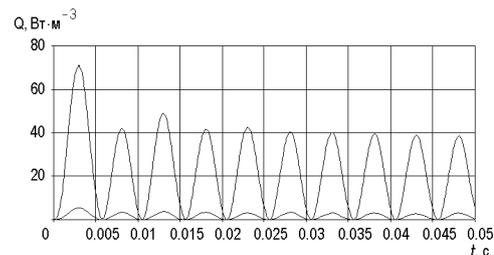


Рис. 22. Добавочные потери Q ,
 $z = 5.00$ м; $\varphi = 45^\circ$; $\mu = 100\mu_0$

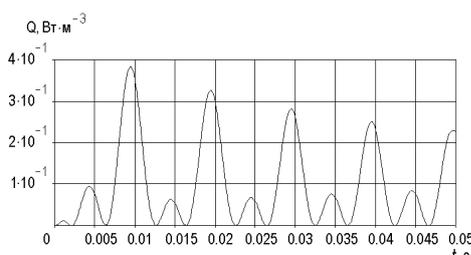


Рис. 23. Добавочные потери Q ,
 $z = 5.00$ м; $\varphi = 45^\circ$; $\mu = \mu_0$

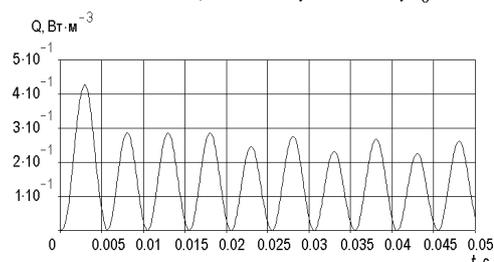


Рис. 24. Добавочные потери Q ,
 $z = 5.00$ м; $\varphi = 45^\circ$; $\mu = 100\mu_0$

Как следует из приведенных результатов, электромагнитные процессы в роторе турбогенератора при коротком замыкании двух фаз носят существенно нестационарный характер. Увеличение магнитной проницаемости материала ротора приводит к более быстрому затуханию переходного процесса. Имеют место признаки стабилизации переходного процесса к моменту времени 50 мс (амплитудные значения соседних полуволн одного знака компонент векторного магнитного потенциала и плотности тока стабилизируются). Поэтому, амплитудные значения указанных величин к моменту времени 50 мс могут быть использованы для сравнительного анализа результатов, полученных для разных величин магнитной проницаемости материала ротора. В таблицах 1, 2 приведено обобщение численных результатов (соответственно амплитудные значения векторного магнитного потенциала и вектора плотности вихревых токов в различных точках ротора к указанному моменту времени).

Анализ приведенной информации показывает, что в случае $\mu = \mu_0$ амплитудные значения компонент векторного магнитного потенциала в различных (по углу в поперечном сечении и по длине ротора) точках, находящихся под поверхностью ротора на глубине 4.9 см, уменьшаются в 1.82 – 2.58 раз по сравнению с решением на поверхности, а на глубине 9.8 см – в 3.64 – 5.59 раз. В случае $\mu = 100\mu_0$ явление скин-эффекта (сосредоточение электромагнитного поля и вихревых токов в тонком поверхностном слое ротора) носит более выраженный характер, что приводит к более резкому затуханию векторного магнитного потенциала и плотности тока по глубине ротора. Так, амплитудные значения векторного магнитного потенциала на глубине 4.9 см

уменьшаются в 3.34 – 4.38 раз по сравнению с решением на поверхности, а на глубине 9.8 см – в 12.89 – 19.34 раз.

Табл.1. Амплитудные значения векторного магнитного потенциала к моменту времени 0.05 с

| Месторасположение узла по каждому из направлений | | | $A_{ампл.}, Вб \cdot м^{-1}$ | |
|--|--|-----------|------------------------------|--------------------------|
| Осевая координата $z, м$ | Угол с осью y в поперечном сечении, градус | Радиус, м | $\mu = 100\mu_0$ | $\mu = \mu_0$ |
| 1.25 | 0 | 0.452 | $3.09641 \cdot 10^{-7}$ | $5.75018 \cdot 10^{-7}$ |
| 1.25 | 0 | 0.501 | $11.87948 \cdot 10^{-7}$ | $12.38071 \cdot 10^{-7}$ |
| 1.25 | 0 | 0.550 | $3.99677 \cdot 10^{-6}$ | $3.17346 \cdot 10^{-6}$ |
| 1.25 | 45 | 0.452 | $7.26291 \cdot 10^{-7}$ | $2.47366 \cdot 10^{-6}$ |
| 1.25 | 45 | 0.501 | $3.20585 \cdot 10^{-6}$ | $4.95472 \cdot 10^{-6}$ |
| 1.25 | 45 | 0.550 | $14.04146 \cdot 10^{-6}$ | $9.00979 \cdot 10^{-6}$ |
| 5.00 | 0 | 0.452 | $3.31264 \cdot 10^{-7}$ | $6.06144 \cdot 10^{-7}$ |
| 5.00 | 0 | 0.501 | $12.77946 \cdot 10^{-7}$ | $13.11469 \cdot 10^{-7}$ |
| 5.00 | 0 | 0.550 | $4.26953 \cdot 10^{-6}$ | $3.38662 \cdot 10^{-6}$ |
| 5.00 | 45 | 0.452 | $7.70158 \cdot 10^{-7}$ | $2.60183 \cdot 10^{-6}$ |
| 5.00 | 45 | 0.501 | $3.39965 \cdot 10^{-6}$ | $5.22128 \cdot 10^{-6}$ |
| 5.00 | 45 | 0.550 | $14.89186 \cdot 10^{-6}$ | $9.55253 \cdot 10^{-6}$ |

Табл.2. Амплитудные значения вектора плотности вихревых токов в роторе к моменту времени 0.05 с

| Месторасположение узла по каждому из направлений | | | $J_{ампл.}, А \cdot м^{-2}$ | |
|--|--|-----------|-----------------------------|-----------------------|
| Осевая координата $z, м$ | Угол с осью y в поперечном сечении, градус | Радиус, м | $\mu = 100\mu_0$ | $\mu = \mu_0$ |
| 1.25 | 0 | 0.452 | $10.05367 \cdot 10^2$ | $7.64472 \cdot 10^2$ |
| 1.25 | 0 | 0.501 | $2.06872 \cdot 10^3$ | $2.73012 \cdot 10^3$ |
| 1.25 | 0 | 0.550 | $9.79226 \cdot 10^3$ | $9.41602 \cdot 10^3$ |
| 1.25 | 45 | 0.452 | $10.69618 \cdot 10^2$ | $5.97677 \cdot 10^2$ |
| 1.25 | 45 | 0.501 | $3.58190 \cdot 10^3$ | $2.59543 \cdot 10^3$ |
| 1.25 | 45 | 0.550 | $12.95919 \cdot 10^3$ | $9.50667 \cdot 10^3$ |
| 5.00 | 0 | 0.452 | $10.78158 \cdot 10^2$ | $8.19814 \cdot 10^2$ |
| 5.00 | 0 | 0.501 | $3.87997 \cdot 10^3$ | $2.92515 \cdot 10^3$ |
| 5.00 | 0 | 0.550 | $13.55875 \cdot 10^3$ | $10.09205 \cdot 10^3$ |
| 5.00 | 45 | 0.452 | $11.46853 \cdot 10^2$ | $6.47877 \cdot 10^2$ |
| 5.00 | 45 | 0.501 | $3.83829 \cdot 10^3$ | $2.78852 \cdot 10^3$ |
| 5.00 | 45 | 0.550 | $13.90550 \cdot 10^3$ | $10.19558 \cdot 10^3$ |

Увеличение магнитной проницаемости стали ротора в 100 раз (с $\mu = \mu_0$ до $\mu = 100\mu_0$) приводит к уменьшению амплитудных значений компонент векторного магнитного потенциала в 1.03 – 1.55 раз в точках, находящихся под поверхностью ротора на глубине 4.9 см, и в 1.83 – 3.41 раз в точках на глубине 9.8 см. Это также объясняется более резким проявлением скин-эффекта с увеличением величины магнитной проницаемости материала. В то же время,

векторный магнитный потенциал на поверхности ротора возрастает в 1.26 – 1.56 раз при увеличении магнитной проницаемости стали ротора в 100 раз, что также вызывается более сильным проявлением скин-эффекта в случае $\mu = 100\mu_0$ (при этом электромагнитное поле в большей степени вытесняется из тела ротора в воздушный зазор между статором и ротором, чем в случае $\mu = \mu_0$). В результате, увеличение магнитной проницаемости приводит к существенному (ориентировочно в 2 раза) росту добавочных потерь на поверхности ротора и по его сечению. Для решения вопроса о влиянии магнитной проницаемости на тепловое, вибрационное и термопрочностное состояния роторов синхронных генераторов при коротком замыкании двух фаз необходимо выполнить компьютерное моделирование связанных тепловых, вибрационных и упругопластических процессов.

В целом, можно сделать вывод, что величина магнитной проницаемости материала существенно влияет на нестационарные электромагнитные процессы в роторе турбогенератора. Использование магнитной проницаемости насыщенной стали $\mu = \mu_0$ приводит к значительным расхождениям в численных результатах по сравнению с вариантом $\mu = 100\mu_0$.

Результаты показывают (см. рис. 23, 24), что к моменту времени 50 мс не достигается стабилизация амплитудных значений зависимостей добавочных потерь от времени. Для сравнительного анализа добавочных потерь целесообразно использовать интегральную величину вида

$$Q_{\text{среднее}} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} Q(t) dt, \quad (8)$$

где $Q(t)$ – добавочные потери в рассматриваемой точке ротора как функция времени; $Q_{\text{среднее}}$ – усреднённая во времени величина добавочных потерь в рассматриваемой точке; τ – продолжительность переходного процесса короткого замыкания (1 – 2 с) [12].

Интегральная величина добавочных потерь (внутренних источников тепла) (8) может быть также использована при решении задачи теплопроводности для определения температурного поля ротора турбогенератора и последующего расчёта его термонапряжённого состояния, а также оценки срабатывания ресурса.

5. Выводы

В статье описана разработанная методика конечноэлементного анализа нестационарных электромагнитных полей в трёхмерной постановке. Выполнено тестирование программного обеспечения. Рассмотрены вопросы достоверности численных результатов для частного случая нестационарного электромагнитного поля ротора турбогенератора ТГВ-300.

С применением упрощённой схемы турбогенератора 300 МВт установлены закономерности протекания нестационарных пространственных электромагнитных процессов и проведено численное исследование влияния

магнитной проницаемости материала на явление скин-эффекта и добавочные потери в роторе. Показано, что увеличение магнитной проницаемости стали ротора с $\mu = \mu_0$ до $\mu = 100\mu_0$ приводит к более быстрому затуханию электромагнитных колебаний во времени. В случае $\mu = 100\mu_0$ явление скин-эффекта в роторе проявляется более «резко» (электромагнитное поле затухает быстрее по глубине ротора), однако при этом электромагнитное поле на поверхности ротора возрастает, поскольку поле сильнее «выталкивается» из ротора в воздушный зазор. Указанное увеличение магнитной проницаемости приводит к возрастанию добавочных потерь ориентировочно в 2 раза как в теле ротора, так и на его поверхности.

Предложенная методика может быть использована для решения задач расчёта пространственного нестационарного электромагнитного поля в конструкциях электрических машин и электротехнических устройств других типов. Полученные численные результаты могут быть использованы для расчётной оценки термомеханического состояния и срабатывания ресурса роторов турбогенераторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пантелят М.Г., Руденко Е.К., Сафонов А.Н., Шульженко Н.Г. Конечноэлементный анализ стационарных магнитных полей в трёхмерной постановке. – Вестник Харьк. нац. ун-та. Сер. «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления». – 2009, вып. 11, № 847. – С. 292 – 306.
2. Кулон Ж.-Л., Сабонадьер Ж.-К. САПР в электротехнике. – М.: Мир, 1988. – 208 с.
3. Сильвестер П., Феррари Р. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. – М.: Мир, 1986. – 229 с.
4. Mohammed O.A. Computational verification of the three dimensional finite element formulation in the presence of three components of excitation current densities. – IEEE Southeastcon' 86. Conf. Proc., Richmond, VA, March 23 – 25, 1986. – New York, 1986. – P. 1 – 5.
5. Пантелят М.Г., Шульженко Н.Г. Использование векторного магнитного потенциала в конечноэлементном анализе нестационарных трёхмерных электромагнитных полей в проводящих средах. – Электротехника и электромеханика. – 2007, № 5. – С. 42 – 47.
6. Bíró O., Preis K. On the use of the magnetic vector potential in the finite element analysis of three-dimensional eddy currents. – IEEE Transactions on Magnetics. – 1989, v. 25, No. 4. – P. 3145 – 3159.
7. Bíró O., Preis K., Richter K.R. Various FEM formulations for the calculation of transient 3D eddy currents in nonlinear media. – IEEE Transactions on Magnetics. – 1995, v. 31, No. 3. – P. 1307 – 1312.
8. Gong L., Unbehauen R. The 3D computations of edge induction heating using semi-analytical method and FEM. – Electrical Engineering. – 1996, v. 79. – P. 189 – 195.

9. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. – М.:Наука, 1967. – 368 с.
10. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, т. II. – М.: Физматлит, 1959. – 620 с.
11. Шульженко Н.Г., Зозулин Ю.В., Пантелят М.Г., Руденко Е.К., Петушкова С.А. Влияние материала пазовых клиньев на распределение электромагнитного поля, плотности тока и потерь от токов обратной последовательности в роторе турбогенератора при двухфазном коротком замыкании. – Электротехника и электромеханика. – 2005, № 3. – С. 61 – 64.
12. Bhargava S.C. Negative-sequence currents, losses and temperature rise in the rotor of a turbogenerator during transient unbalanced operation. – Electric Machines and Power Systems. – 1983, V. 8. – P. 155 – 168.
13. Jianyang D., Xubiao L., Feng L., Shiyu Y., Guangzheng N. Negative sequence eddy current field analysis of a 1055 MVA turbogenerator by using 3D finite element model. – Proceedings of the 8th International Conference on Electrical Machines and Systems (ICEMS'2005), Nanjing, China, September 2005, P. 2075 – 2078.