УДК 621.37:621.391

Математическая модель оптимальной обработки квазигауссовых сигналов

С. Г. Рассомахин
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

Дано определение квазигауссовых сигналов, как одного класса полунепрерывных процессов. На основе нелинейной задачи оптимизации и метода вариационного исчисления определена переходная характеристика нелинейного фильтра-дискриминатора, который выполняет функции селективной фильтрации и оценки значения сигнала. Показаны преимущества полученного результата по показателю среднего квадрата ошибки по сравнению с известным линейным методом фильтрации.

Ключевые слова: *математическая модель, квазигауссовые сигналы, нелинейный фильтр-дискриминатор.*

Дано визначення квазігауссових сигналів, як одного класу напів безперервних процесів. На основі нелінійної задачі оптимізації і методу варіаційного числення визначена перехідна характеристика нелінійного фільтру-дискримінатора, який виконує функції селективної фільтрації і оцінки значення сигналу. Показані переваги одержаного результату по показнику середнього квадрата помилки в порівнянні з відомим лінійним методом фільтрації.

Ключові слова: *математична модель, квазігаусові сигнали, нелінійний фільтр-дискримінатор.*

Determination of almost Gaussian signals is given, as one of types of semi continuous processes. On the basis of nonlinear task of minimization and method of variation calculation the decision, allowing to define transitional description of nonlinear filter - discriminator which carries out the functions of electoral filtration and estimation of value signal, is found. Advantage of the got result is shown on the indicator of the middle square of error, arrived at by comparison to the known linear method of filtration.

Key words: *mathematical model, almost Gaussian signals, nonlinear filter-discriminator.*

1. Общая постановка задачи и её актуальность

При построении эффективных цифровых систем передачи информации (ЦСПИ) все более интенсивно предпринимаются усилия по рациональному использованию преимуществ «мягких» алгоритмов обработки сигналов, как универсального средства повышения качества связи. Известно [1–4], что применение непрерывной шкалы градации информативных признаков сигналов с дискретной модуляцией при декодировании помехоустойчивых кодов позволяет получить среднее приращение энергетической эффективности ЦСПИ около 2 дБ. Одним из традиционных способов перехода к непрерывному представлению выхода дискретного демодулятора при когерентной обработке сигналов является использование логарифма отношения правдоподобия, вычисляемого на основе известных вероятностных распределений сигнальных функций и аддитивного шума в канале связи [4]. Этот способ, несомненно, является наилучшим для обычных систем передачи данных, в которых все символы передаваемого дискретного потока обладают одинаковой значимостью. Однако, ситуация в корне меняется, если речь идет о передаче количественной информации, представленной двоичным кодом. При этом, естественно, ошибки при обработке старших разрядов позиционного числового кода приводят к более нежелательным последствиям, чем ошибки в младших символах кода числа. Для обработки двоичных сигналов в этом случае эффективными оказываются методы априорного перераспределения энергии, затрачиваемой на передачу символов кода с разным позиционным весом [3].

В настоящее время мало исследованными остаются методы оптимизации алгоритмов обработки количественных данных для моделей недвоичных (многоуровневых) методов модуляции, например, амплитудной и амплитудно-фазовой. Поэтому разработка математической модели универсальных алгоритмов «мягких» решений при обработке многоуровневых сигналов, переносящих числовые данные, является достаточно актуальной задачей. Ее решение позволит усовершенствовать методы приема таких сигналов, а, следовательно, повысить энергетическую эффективность ЦСПИ.

2. Направление исследований и цель работы

Основой для создания модели может являться методический подход, предполагающий использование концепции непрерывного канала для передачи дискретных сообщений. При этом непрерывный сигнал, обладающий функцией распределения $\varphi(s)$, обладает информативными признаками из дискретного (конечного или счетного) множества. Приближение распределения $\varphi(s)$ к нормальному обеспечивает, в условиях гауссова канала и ограничения на среднюю мощность передатчика, повышение энтропии сигнала, а, следовательно, и скорости передачи информации. Ввиду квантованного характера изменения информативных параметров таких сигналов, применение оптимальной линейной фильтрации [4] в процессе первичной обработки не всегда приводит к наилучшему результату. Это связано с тем, что определение оптимального избирательного фильтра обычно осуществляется решением интегрального уравнения Винера-Хопфа [4], получаемого при рассмотрении (в качестве сигнала и помехи) непрерывных случайных процессов с дробно-рациональным спектром.

Целью статьи является получение аналитической модели обработки многоуровневых квазигауссовых сигналов на фоне аддитивного белого шума, а также нахождение характеристики оптимального нелинейного фильтра-дискриминатора, предназначенного для максимизации отношения сигнал/шум на выходе гауссова канала.

3. Основная часть

Произвольный сигнал $x(t)$ может быть представлен в виде временного ряда на основе отсчетных функций

$$x(t)=\sum_i a_j\left(\frac{i}{2F}\right)\cdot\operatorname{sinc}\left(t-\frac{i}{2F}\right), \tag{1}$$

где $a_j\left(\frac{i}{2F}\right)$ – j- е значение амплитуды отсчета в i -й момент времени $t_i=\frac{i}{2F}$, F – верхняя частота в спектре. Квазигауссовым сигналом, обладающим плоским спектром в полосе $\left[0,F\right]$ будем называть аналитическую функцию времени (1) в случае, если распределение вероятностей амплитуд отсчетов a_i асимптотически подчинено нормальному закону, а множество возможных значений a_i является конечным или счетным. Необходимость передачи таких сигналов возникает при использовании аналогового представления числовых кодов, при этом значения амплитуд a_i соответствуют передаваемым действительным целым числам.

Рассмотрим процесс получения вектора $\vec{a}$ числового кода для построения (1) на примере преобразования представления стационарного эргодического двоичного источника с энтропией $H(x)=1$. Исходной является последовательность независимых равновероятных двоичных символов, которая разбивается на N блоков по k бит. Каждый из блоков трактуется, как код обычного целого числа c_i из диапазона $\left[0,2^k-1\right]$ и центрируется относительно нуля, что приводит к получению дробных чисел: $b_i=c_i-\left(2^k-1\right)/2$. Элементы b_i при $i=0\ldots N-1$ являются координатами вектора $\vec{b}$. Полученный вектор подвергается нормализующему преобразованию, которое приводит к получению вектора числового кода $\vec{z}=\left\{z_0,z_1,\ldots,z_N\right\}$:

$$\vec{z}=\left\|\mathrm{A}_N\right\|\cdot\vec{b}, \tag{2}$$

где $\left\|\mathrm{A}_N\right\|$ – матрица Адамара размером $N\times N$, состоящая из ортогональных строк и столбцов и получаемая с использованием рекуррентного правила

$$\left\|\mathrm{A}_2\right\|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} \quad \ldots \quad \left\|\mathrm{A}_N\right\|=\begin{vmatrix}\mathrm{A}_{N/2} & \mathrm{A}_{N/2}\\ \mathrm{A}_{N/2} & -\mathrm{A}_{N/2}\end{vmatrix}. \tag{3}$$

Несмотря на дробные значения координат вектора $\vec{b}$, получаемый на основании (2) вектор $\vec{z}$ содержит только целые числа, расположенные симметрично относительно нуля в диапазоне $\left[-N\left(2^k-1\right)/2,\ldots,0,\ldots,N\left(2^k-1\right)/2\right]$. Формирование вектора амплитудных коэффициентов $\vec{a}$ для синтеза сигнала $x(t)$ производится с учетом ограничения P на среднюю мощность: $\vec{a}=\alpha\cdot\vec{z}$, где α – коэффициент масштабирования. Если $Q(a_i)=Q(z_i)$ – распределение вероятностей координат вектора $\vec{a}$, то

$$\alpha = \sqrt{P}\left(\sum_{i=0}^{N\left(2^k-1\right)} Q\left(a_i\right) z_i^{\,2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \qquad (4)$$

При равной вероятности появления всех $2^{k\cdot N}$ комбинаций на выходе источника, распределение вероятностей $Q\left(a_i\right)$ с увеличением N асимптотически стремится к кусочно-определенному усеченному нормальному закону, что является следствием классической предельной теоремы:

$$Q\left(a_i\right) = Q\left(z_i\right) = \Pr\left\{\left(i - \frac{N}{2}\left(2^k-1\right) - 0{,}5\right) < z_i < \left(i - \frac{N}{2}\left(2^k-1\right) + 0{,}5\right)\right\} =$$

$$= \frac{\gamma}{\sigma\sqrt{2\cdot\pi}} \int\limits_{i-\frac{N}{2}\left(2^k-1\right)-0{,}5}^{i-\frac{N}{2}\left(2^k-1\right)+0{,}5} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\cdot\sigma^2}\right) d\eta, \qquad i = 0,1,\ldots N\left(2^k-1\right), \qquad (5)$$

где γ – коэффициент усечения, определяемый выражением

$$c = \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\cdot\pi}} \int\limits_{0}^{N\left(2^k-1\right)} \exp\left(-\left(\eta - \frac{N}{2}\left(2^k-1\right)\right)^2 \Big/ 2\cdot\sigma^2\right) d\eta\right]^{-1},$$

а σ^2 – дисперсия суммы N независимых, равномерно распределенных случайных величин b_i, которая, как следует из (2) и (3), определяется выражением $\sigma^2 = N\left[\left(2^{2k}-1\right)\big/12\right]$.

При передаче по гауссову каналу сигнал (1), обладающий средней мощностью $P = \sum_{i=0}^{N\left(2^k-1\right)} Q\left(a_i\right)\cdot a_i^2 \approx \alpha^2 \cdot N\left[\left(2^{2k}-1\right)\big/12\right]$ складывается с белым шумом $\xi\left(t\right)$, обладающим спектральной плотностью мощности N_0. Поэтому на выходе канала наблюдению доступен сигнал $y(t) = x(t) + \xi(t)$. Оптимальный линейный фильтр, обеспечивающий минимальный средний квадрат ошибки при наблюдении сигнала на выходе канала, обладает передаточной функцией [4]:

$$K\left(\omega\right) = \frac{S\left(\omega\right)}{S\left(\omega\right) + N_0} = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{1}{h}\right)^{-1}, & \text{при } 0 \le \omega \le 2\pi F, \\ 0, & \text{при } \omega > 2\pi F, \end{cases} \qquad (6)$$

где $S(\omega)$ – спектр мощности сигнала, ω – круговая частота, $h = P\big/N_0$ – отношение сигнал/шум в канале. Фильтрация по правилу (6) определяет физически достижимый предел улучшения отношения сигнал/шум в случае, если сигнал является непрерывным, то есть его измерения в отсчетных точках могут принимать любые значения на числовой оси. При этом оценка переданного сигнала после прохождения $y(t)$ через фильтр (6) в отсчетных точках на оси времени $x^*(t_j)$ обеспечивает дисперсию шума восстановления чисел a_i

$$D=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sum_{j=0}^{M-1}\left(x\left(t_j\right)-x^*\left(t_j\right)\right)^2=\frac{P}{1+h}. \qquad (7)$$

Учет дискретного характера координат вектора $\vec{a}$ позволяет улучшить качество восстановления квазигауссова сигнала на выходе канала путем применения нелинейного дискриминатора в сочетании с обычной полосовой фильтрацией. В этом случае, если $\Phi(\omega)$ – амплитудно-частотная характеристика идеального фильтра нижних частот (ФНЧ), а $f(y)$ описывает амплитудный дискриминатор, то передаточная функция нелинейного фильтра-дискриминатора имеет вид

$$K_н(\omega,y)=\Phi(\omega)\cdot f(y), \quad \text{где} \quad \Phi(\omega)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad 0\le\omega\le 2\pi F,\\ 0 & \text{при} \quad \omega>2\pi F.\end{cases} \qquad (8)$$

Реализация полосовой фильтрации может осуществляться известными методами (например, быстрым преобразованием Фурье с последующим обнулением коэффициентов внеполосных гармоник, или вычислением свертки сигнала и переходной характеристики ФНЧ и т. д.) и не является предметом обсуждения данной статьи. Кроме того, будем предполагать, что при полосовой фильтрации ограниченной по времени, но достаточно продолжительной реализации сигнала (при больших значениях N) можно пренебречь искажениями, неизбежно возникающими на краях рассматриваемого временного интервала (из-за проявления, так называемого, эффекта Гиббса). Поэтому займемся определением характеристики оптимального дискриминатора $f_{опт}(y)$, обеспечивающего минимальный средний квадрат ошибки восстановления сигнала $x(t)$ в условиях гауссова шума. При передаче отсчета с амплитудой a_j и вероятностью появления $Q(a_i)$, на выходе канала (после полосовой фильтрации в момент времени t_i) присутствует измерение $y(t_i)$. На основании этого измерения дискриминатор формирует оценку $x^*=f(y)$. Квадрат ошибки при получении данной оценки составляет величину $Q(a_j)\cdot\left[f(y)-a_j\right]\cdot d\Psi_{a_j}(y)$, где $d\Psi_{a_j}(y)=\Pr\left(y\middle|a_j\right)$ – элементарная вероятность попадания измерения в окрестность точки y при условии передачи отсчета с амплитудой a_j; $\Psi_{a_j}(y)$ – функция правдоподобия или плотность распределения вероятностей случайной величины y при передаче отсчета с амплитудой a_j.

Вычисление математического ожидания квадрата ошибки для совокупности амплитуд a_j, $j=0,\ldots N\left(2^k-1\right)$, а также усреднение по всем возможным значениям y дает возможность определения дисперсии ошибки восстановления сигнала (1) при использовании дискриминатора $f\left(y\right)$ в виде

$$D_f=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{N\left(2^k-1\right)}Q\left(a_j\right)\left[f\left(y\right)-a_j\right]^2\Psi_{a_j}\left(y\right)dy\,. \tag{9}$$

В соответствии с рассмотренным алгоритмом получения вектора амплитуд, выражение (9) подразумевает $a_j=\alpha\left[j-\dfrac{N}{2}\left(2^k-1\right)\right]$. При аддитивном воздействии шума в гауссовом канале функции правдоподобия при передаче отсчетов с амплитудами $a_j,\ j=0,\ldots N\left(2^k-1\right)$ определяются нормальным распределением с соответствующими математическими ожиданиями и дисперсией, равной N_0:

$$\Psi_{a_j}\left(y\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}}\exp\left(-\frac{\left(y-a_j\right)^2}{2N_0}\right). \tag{10}$$

Поэтому

$$D_f=\frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2N_0}}\sum_{j=0}^{N\left(2^k-1\right)}Q\left(a_j\right)\left[f^2\left(y\right)-2f\left(y\right)a_j+a_i^{\,2}\right]e^{-\frac{a_j\left(a_j-2y\right)}{2N_0}}dy\,.$$

Сделаем замену $f\left(y\right)=f\left(y\right)+\Delta$, найдем производную $\dfrac{dD_f}{d\Delta}$ и положим затем $\Delta=0$:

$$\frac{dD_f}{d\Delta}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi N_0}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2N_0}}\sum_{j=0}^{N\left(2^k-1\right)}Q\left(a_j\right)\left[f\left(y\right)-a_j\right]e^{-\frac{a_j\left(a_j-2y\right)}{2N_0}}dy\,. \tag{11}$$

Минимум D_f найдем, приравнивая (11) к нулю и учитывая симметрию нормального распределения:

$$\sum_{j=0}^{N\left(2^k-1\right)}Q\left(a_j\right)\left[f_{опт}\left(y\right)-a_j\right]e^{-\frac{a_j\left(a_j-2y\right)}{2N_0}}=0\,.$$

Отсюда следует, что характеристика оптимального дискриминатора определяется выражением

$$f_{опт}\left(y\right)=\sum_{j=0}^{N\left(2^k-1\right)}a_j\,Q\left(a_j\right)e^{-\frac{a_j\left(a_j-2y\right)}{2N_0}}\left[\sum_{j=0}^{N\left(2^k-1\right)}Q\left(a_j\right)e^{-\frac{a_j\left(a_j-2y\right)}{2N_0}}\right]^{-1}. \tag{12}$$

Аналогичная характеристика оптимального линейного фильтра (6) записывается в виде

$$f_л(y)=\frac{h}{1+h}y\,. \tag{13}$$

Различие между характеристиками дискриминаторов (12) и (13) при осуществлении "мягкого" решения о значении амплитуды принятого отсчета рассмотрим на примере, положив $k=1,\ N=4$, при ограничении на среднюю мощность квазигауссова сигнала $P=1$. Значения амплитуд и распределение вероятностей $Q\left(a_j\right)$ для выбранных значений параметров приведено в Табл.1, причем для данного распределения, как следует из (4), $\alpha=1$, что означает $a_j=z_j$.

Табл.1. Распределение вероятностей амплитуд квазигауссова сигнала

j	0	1	2	3	4
$z_j=a_j$	-2	-1	0	1	2
$Q\left(a_j\right)$	$1/16$	$4/16$	$6/16$	$4/16$	$1/16$

Характеристики (12) и (13), рассчитанные для условий примера представлены на Рис. 1 для различных значений отношения сигнал/шум в канале. Графики показывают, что при малых значениях h отличие $f_{опт}\left(y\right)$ от $f_л\left(y\right)$ проявляется только в нелинейности на границах диапазона передаваемых чисел (амплитуд отсчетов). С улучшением качества канала нелинейность оптимального дискриминатора проявляется сильнее, стремясь при $h\to\infty$ к характеристике идеального квантователя. Полезность полученной характеристики (12) состоит в реализации гибкого алгоритма реагирования на качество гауссова канала, описываемого отношением сигнал/шум. При этом за счет плавного изменения крутизны характеристики, происходящего в районе границ соседних уровней амплитуд, достигается минимизация среднего квадрата ошибки восстановления. Это позволяет ожидать приращения энергетического выигрыша СПИ, использующих методы мягкой обработки многоуровневых сигналов. Кроме того, полученный нелинейный фильтр-дискриминатор может быть использован в двоичных системах, например, в демодуляторах и декодерах турбо кодов.

Отношение сигнал/шум, достигаемое на выходе фильтров (линейного и оптимального нелинейного), может быть найдено с использованием формул

$$h_л=P/D_л,\qquad h_{опт}=P/D_{опт}\,, \tag{14}$$

где $D_л$ и $D_{опт}$ определяются из выражения (9) при подстановке функций (13) и (12), соответственно.

Сравнение точности восстановления амплитуд отсчетов для этих двух случаев иллюстрируется на Рис. 2 при различном качестве канала (различном значении отношения сигнал/шум). Полученные зависимости говорят о том, что выигрыш от применения разработанного способа оптимальной обработки многоуровневых квазигауссовых сигналов становится весьма существенным при отношении сигнал/шум более 10 дБ.

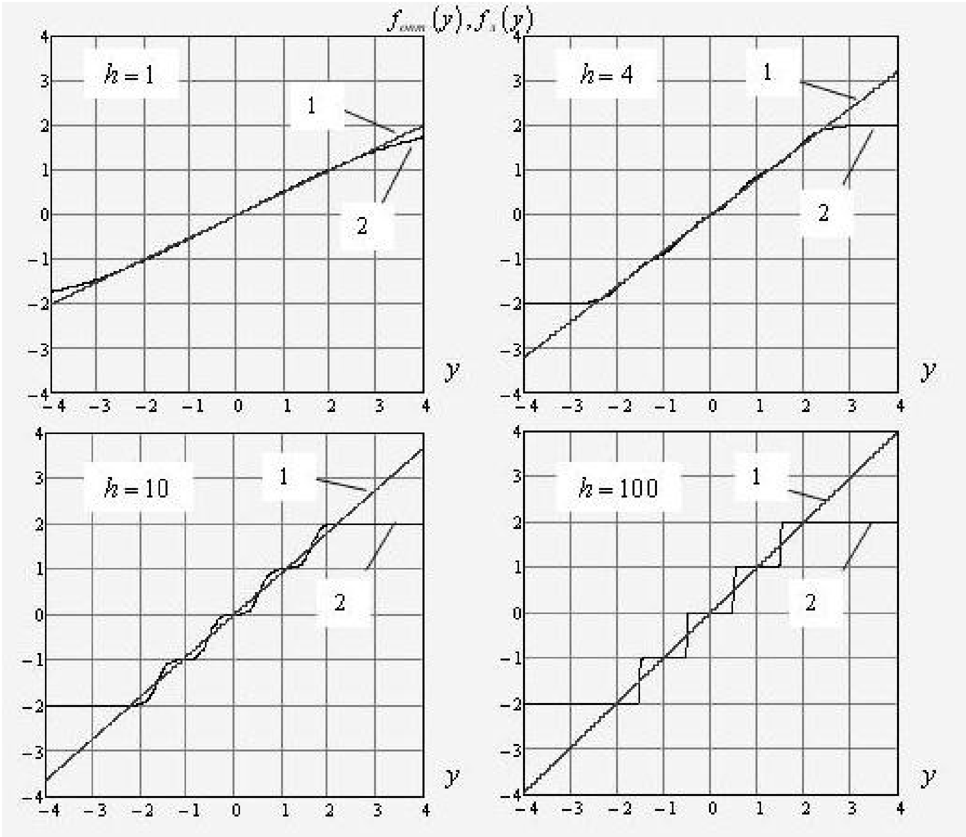

Рис. 1. Характеристики линейного $f_л(y)$ *(кривые 1) и оптимального нелинейного* $f_{опт}(y)$ *(кривые 2) дискриминаторов при различном отношении сигнал/шум*

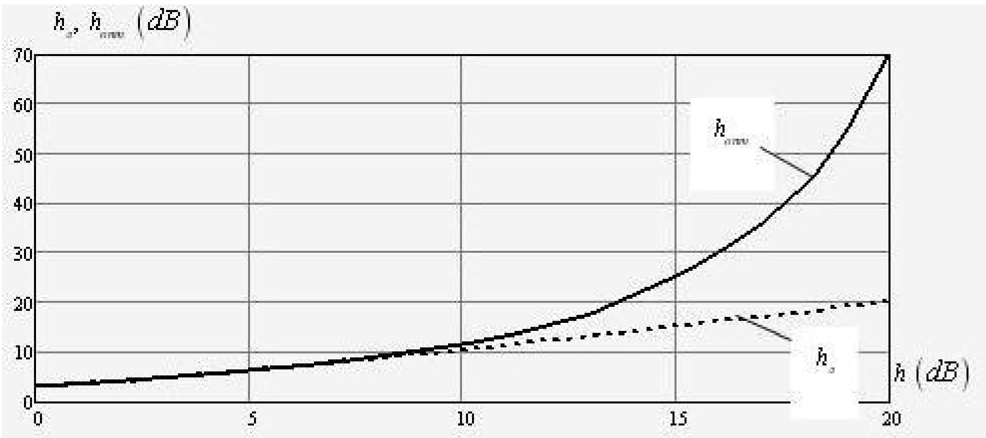

Рис. 2. Зависимости отношения сигнал/шум на выходе линейного фильтра и оптимального нелинейного фильтра-дискриминатора от отношения сигнал/шум в канале

4. Выводы

Анализ полученных результатов показывает, что для плохих каналов линейный и нелинейный алгоритмы обеспечивают, практически, одинаковый результат. Однако с улучшением качества канала выигрыш от использования нелинейного фильтра-дискриминатора становится существенным и достигает нескольких десятков децибел. Исходный и полученный алгоритмы фильтрации являются основой для реализации «мягких» решений при обработке дискретных сигналов, представленных в виде квазигауссовых процессов. Полученная математическая модель и функция оптимального нелинейного фильтра-дискриминатора (12) составляют предпочтительную альтернативу по сравнению с обычно используемым логарифмом отношения правдоподобия, как числовой характеристики при выработке "мягких" решений в декодерах-демодуляторах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишневский В. М., Ляхов А. И., Портной С. Л., Шахнович И. В. Широкополосные беспроводные сети передачи информации.–М.: Техносфера, 2005.–592 с.
2. Григорьев В. А., Лагутенко О. И., Распаев Ю. А. Сети и системы радиодоступа. – М.: Эко-Трендз, 2005. – 384 с.
3. Феер К. Беспроводная цифровая связь. Методы модуляции и расширения спектра: Пер. с англ. / Под ред. В. И. Журавлева. − М.: Радио и связь, 2000. − 520 с.
4. Тихонов В. И. Оптимальный прием сигналов. − М.: Радио и связь, 1983. − 320 с.
5. Рассомахин С. Г. Одномерные кодово-сигнальные конструкции на основе нормализующего преобразования двоичных последовательностей // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС, 2007. – Вип. 7(65). – С. 83-87.

Надійшла - 21.04.2010.