УДК 519.853

Задача покрытия компактного многогранного множества заданным количеством конгруэнтных прямых параллелепипедов минимальных размеров

Е. С. Сосюрка
Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного, НАНУ, Украина

В статье рассматривается задача покрытия компактного многогранного множества с непустой внутренностью заданным количеством конгруэнтных прямых параллелепипедов минимальных размеров. Допускается только трансляция параллелепипедов. Приводится критерий покрытия, на основе конструктивных средств математического моделирования строится математическая модель задачи покрытия, исследуются ее особенности. Как результат, показано, что решение исходной задачи может быть сведено к решению последовательности задач линейного программирования. Предложена стратегия решения задачи. Приведены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: *задача покрытия, семейство параллелепипедов, математическое моделирование.*

У статті розглядається задача покриття компактної багатогранної множини з непустою внутрішністю заданою кількістю конгруентних прямих паралелепіпедів мінімальних розмірів. Дозволяється лише трансляція паралелепіпедів. Наводиться критерій покриття, на основі конструктивних засобів математичного моделювання будується математична модель задачі покриття, досліджуються її особливості. Як результат, показано, що розв'язання вихідної задачі може бути зведене до розв'язання послідовності задач лінійного програмування. Запропоновано стратегію розв'язання задачі. Наведені результати числових експериментів.

Ключові слова: *задача покриття, сім'я паралелепіпедів, математичне моделювання.*

The problem of covering a compact polyhedral set with non-empty interior by the given number of congruent right parallelepipeds of minimal sizes, having mutual parallel edges, is considered in this article. Parallelepipeds can be only translated and their rotations are not permitted. A cover criterion is defined, on the ground of constructive tools of mathematical modeling a mathematical model of the problem is offered and its basic characteristics are analyzed. As a result, it is shown, that a solution of the initial problem can be reduced to solving a sequence of linear programming problems. Numerical examples are given.

Key words: *covering problem, set of parallelepipeds, mathematical modeling.*

1. Введение

Задачи покрытия возникают в различных областях науки и техники, например, в пространственных базах данных, в системах пожарной безопасности, статического инспектирования несколькими видами сенсоров, таких как телевизионные камеры, датчики расстояний, пожарные сенсоры и т.п. В робототехнике задачи покрытия представляются как задачи размещения датчиков при компьютерной визуализации. Встречаются задачи покрытия и при создании систем технического зрения робота для распознавания образа или контура. Также широко известен в литературе класс задач покрытия «art gallery problem», которые требуют разместить некоторое число датчиков так, чтобы они покрыли любой многогранник (внутреннюю часть картинной галереи). Анализ научной литературы, посвященной задачам покрытия, показал, что одним из наименее изученных классов задач покрытия является класс трехмерных задач покрытия компактного многогранного множества, исследование которого на данный момент отражено лишь в двух работах, одна из которых [1] ограничивает количество покрывающих объектов до двух штук, в другой же [2] в качестве покрываемого объекта рассматривается лишь прямой параллелепипед. Предложенные же в этих работах стратегии решения основаны на эвристических алгоритмах и не учитывают особенности покрываемого множества, используя его аппроксимацию вплоть до прямого параллелепипеда. Отсутствие эффективных методов, дающих точные решения задач обозначенного класса, требует построения адекватных математических моделей, учитывающих пространственную форму прокрываемого множества и использующих условие покрытия, записанное в аналитическом виде, формализация которого и является основным барьером при моделировании поставленного класса задач.

2. Постановка задачи и цели работы

Целью данного исследования является построение конструктивных средств математического и компьютерного моделирования и разработка стратегии решения задачи покрытия компактного многогранного множества заданным количеством одинаковых прямых параллелепипедов минимального размера.

Рассматривается задача покрытия в следующей постановке.

Пусть задано семейство $\Lambda = \{P_i, i \in I = \{1,2,...,n\}\}$ прямых параллелепипедов, конгруэнтных параллелепипеду $P = \{(x,y,z) \in R^3 : -a \le x \le a,\ -b \le y \le b,\ -c \le z \le c\}$, $a,b,c - \text{const}$ и компактное многогранное множество $\Omega \subset R^3$, представимое в виде:

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{m} \Omega_j,\ \ \Omega_j = \{(x,y,z) \in R^3 : A_{jl}x + B_{jl}y + C_{jl}z + D_{jl} \le 0, l \in I_{\varpi} = \{1,2,..,\varpi_j\}\},$$

где $\mathrm{int}(\Omega_j) \ne \varnothing$, через $\mathrm{int}(\Omega_j)$ обозначена внутренность множества Ω_j [3]. Введем в качестве переменной величины коэффициент гомотетии γ. Тогда каждый параллелепипед $P_i \in \Lambda$ определяется соотношением:

$$\{(x,y,z,\gamma) \in R^4 : -a\gamma \le x \le a\gamma,\ -b\gamma \le y \le b\gamma,\ -c\gamma \le z \le c\gamma\}.$$

Положение множества Ω в пространстве R^3 фиксировано, расположение же каждого параллелепипеда семейства Λ однозначно определяется вектором трансляции $u_i = (x_i, y_i, z_i)$. В данном исследовании рассматривается лишь трансляция параллелепипедов, вращения не допускаются. Обозначим параллелепипед P_i, транслированный на вектор u_i, через $P_i(u_i,\gamma)$, а семейство транслированных параллелепипедов - $\Lambda(u)$, где $u = (u_1, u_2, ...)$.

Определение 1. Говорим, что семейство $\Lambda(u^0)$ - покрытие множества Ω, если существует такой вектор параметров размещения параллелепипедов $u^0 = (u_1^0, u_2^0, ..., u_n^0) \in R^{3n}$, что выполнено соотношение:

$$\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{n} P_i(u_i^0, \gamma) . \qquad (1)$$

Пусть задан вектор $u^0 = \left(u_1^0, u_2^0, ..., u_n^0\right)$. Рассмотрим множество $G\left(u^0\right) = \bigcup_{i=1}^{n} P_i(u_i^0, \gamma)$, его дополнение обозначим через $h\left(u^0, \gamma\right) = cl\left(R^3 \setminus G\left(u^0, \gamma\right)\right)$, где $cl\left(R^3 \setminus G\left(u^0, \gamma\right)\right)$ - замыкание множества $R^3 \setminus G\left(u^0, \gamma\right)$ [3]. Учитывая свойства двойственности теоретико-множественных операций, условие (1) эквивалентно следующему утверждению: подсемейство $\Lambda(u^0)$ покрытие множества Ω, если

$$\operatorname{int}(\Omega) \cap h\left(u^0, \gamma\right) = \varnothing \qquad (2)$$

Возникает следующая задача:

Задача 1. Найти минимальное значение коэффициента гомотетии γ параллелепипедов $P_i \in \Lambda$ и их вектор трансляции $u^* = \left(u_1^*, u_2^*, .., u_n^*\right) \in R^{3n}$, при которых достигается покрытие множества Ω.

Таким образом, решение задачи 1 сводится к решению задачи:

$$\min_{\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{n} P_i(u_i, \gamma)} \gamma \qquad (3)$$

Для построения математической модели задачи 1 необходимо представить в явном виде ограничения, которые накладываются на область допустимых решений (3). Для этого рассмотрим более подробно условие (1). С этой целью исследуем множество $h(u, \gamma)$.

3. Аналитическое описание взаимного положения покрывающих параллелепипедов

Рассмотрим параллелепипеды $P_i(u_i, \gamma)$ и $P_j(u_j, \gamma)$. Пусть параллелепипеду $P_l(u_l, \gamma), l = i, j$ соответствует набор вершин $\{v_p^l, p = 1,2,..,8\}$. Тогда взаимное размещение параллелепипедов $P_i(u_i, \gamma)$ и $P_j(u_j \gamma)$ может быть одним из видов, представленных на рис.:

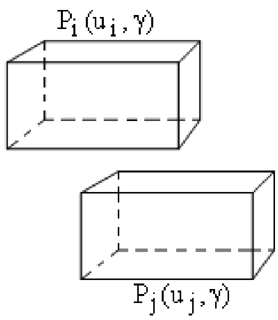

Рис.1а.

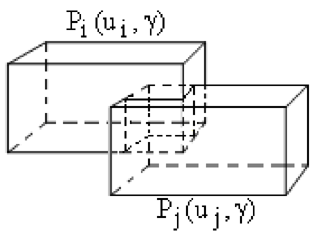

Рис.1б.

Возможны следующие типы взаимного размещения $P_i(u_i,\gamma)$ и $P_j(u_j,\gamma)$:

1. $P_i(u_i,\gamma)\bigcap P_j(u_j,\gamma)=\varnothing$. (Рис.1а.);

2. существует $v_p^j \in P_i(u_i,\gamma)$ и $v_s^i \in P_j(u_j,\gamma)$ (в зависимости от номеров вершин, возможно восемь типов). (Рис.1б.);

Таким образом, существует не более чем 9 типов взаимного расположения параллелепипедов $P_i(u_i,\gamma)$ и $P_j(u_j,\gamma)$. Тогда семейство $H_{ij}(u_i,u_j,\gamma)=\left(R^3 \setminus \operatorname{int} P_i(u_i,\gamma)\right)\bigcap\left(R^3 \setminus \operatorname{int} P_j(u_j,\gamma)\right)$ можно представить в виде объединения подсемейств $H_{ij}^t(u_i,u_j,\gamma)$, $t\in L=\{1,2,...,9\}$, каждое из которых состоит из множеств одного типа. Это значит, что пространство параметров размещения параллелепипедов P_i и P_j можно разбить на такие подмножества R_{ij}^t, что, если $(u_i,u_j)\in R_{ij}^t$, то множество $h(u_i,u_j,\gamma)\in H_{ij}^t$. Следовательно, $R^6=\bigcup_{t=1}^{9} R_{ij}^t$, где каждому множеству R_{ij}^t соответствует $H_{ij}^t, t\in L$ [4].

Определение 2. Если $h(u_i^1,u_j^1,\gamma), h(u_i^2,u_j^2,\gamma)\in H_{ij}^t(u_i,u_j,\gamma)$, то говорим, что $h(u_i^1,u_j^1,\gamma)$ и $h(u_i^2,u_j^2,\gamma)$ имеют пространственную форму t-го типа.

Пусть теперь $H(u,\gamma)=\bigcap_{i=1}^{n}\left(R^3 \setminus \operatorname{int} P_i(u_i,\gamma)\right)$, $u\in R^{3n}$. По аналогии со случаем двух параллелепипедов, рассматриваем взаимное расположение каждой пары параллелепипедов семейства $\Lambda(u)$, то есть, каждому множеству $h\in H(u,\gamma)$ может быть поставлена во взаимно-однозначное соответствие следующая матрица:

$$M_q=\begin{pmatrix} m_{12}^{t_1} & m_{13}^{t_2} & \dots & m_{1n}^{t_{n-1}} \\ 0 & m_{23}^{t_n} & \dots & m_{2n}^{t_{2n-2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_{n-1,n}^{t_{n(n-1)/2}} \end{pmatrix}, \text{ где } m_{ij}^{t_s}\in\left\{R_{ij}^{t_s}, t_s\in L\right\}, s=1,2,..,n(n-1)/2,$$

$q=1,2,...,9$, если $t_1\in L$, $t_2=t_3=...=t_{n(n-1)/2}\in L$; $q=1,2,..,9^2$, если $t_1,t_2\in L$, $t_3=...=t_{n(n-1)/2}\in L$; …; $q=1,2,..,9^{n(n-1)/2}$, если $t_1,t_2,...,t_{n(n-1)/2}\in L$.

Определение 3. Множества $h(u^1,\gamma)$ и $h(u^2,\gamma)$ имеют одинаковую пространственную форму, если они определяются одинаковыми матрицами M_q.

Теорема 1. [4]. Для семейства прямых параллелепипедов $\Lambda(u)$ разбиение пространства R^{3n} имеет вид:

$$R^{3n} = \bigcup_{q=1}^{\eta} R_q^{3n},\ R_q^{3n} = \bigcap_{j>i=1}^{n} \bigcap_{s=1}^{n(n-1)/2} S_{ij}^{t_s}, \tag{4}$$

где $\eta = 9^{n(n-1)/2}$, $S_{ij}^{t_s}$ - прямой цилиндр с основанием $R_{ij}^{t_s}$.

В [5] показано, что $h(u,\gamma) \in H(u,\gamma)$ представимо в виде конечного объединения базовых множеств, а именно: полупространств $C_\delta^0, \delta = 1,2,..,6$, двугранных углов $C_\delta^2, \delta = 7,8,..,18$, трехгранных углов $C_\delta^3, \delta = 19,20,..,26$, полубесконечных цилиндров с прямоугольным основанием $C_\delta^4, \delta = 27,28,..,32$, бесконечных цилиндров с прямоугольным основанием $C_\delta^5, \delta = 32,33,34$ и прямых параллелепипедов C^1. То есть, $h(u,\gamma) = \bigcup_{j=1}^{\lambda} C_j(w_{ij},\gamma)$, где $C_j \in \widetilde{C} = \left\{C_\delta^0, \tilde{N}_\delta^2, \tilde{N}_\delta^3, \tilde{N}_\delta^4, \tilde{N}_\delta^5, C^1, \delta = 1,2,..,35\right\}$, w_{ij} состоит из не более чем 6 соответствующих компонент вектора u.

Заметим, если $u \in R_q^{3n} \subset R^{3n}$, то $H_q(u,\gamma)$, $q \in Q = \{1,2,..,\eta\}$ состоят из множеств одной и той же пространственной формы и отличаются только метрическими характеристиками.

4. Построение Γ-функции теории покрытия

Как известно, конструктивным средством моделирования отношений геометрических объектов является понятие Φ-функции, которая позволяет записать условие покрытия (1), (2) в аналитическом виде.

$$\Phi\left(u^0, v\right) \geq 0 \iff \Omega \subset G\left(u^0\right) \tag{5}$$

где $\Phi\left(u^0, v\right)$ - Φ-функция множеств $h(u^0,\gamma)$ и $\Omega(v)$ [6, 7]. Неравенство (5) назовем критерием покрытия.

Поскольку Φ-функция для $h(u^0,\gamma) \in H_q^{3n}(u,\gamma)$ и Ω имеет вид: $\Phi_q\left(u^0, v\right) = \min\left\{\Phi_{qj}(u^0, v), j \in I_\lambda\right\}$[11], где Φ_{qj} - Φ-функция множеств C_j и Ω, то Φ-функции для любого $u \in \operatorname{int} R_q^{3n}$ имеют один и тот же вид и отличаются только значениями коэффициентов. Следовательно, взяв $u \in \operatorname{int} R_q^{3n}$ в качестве переменной в Φ_q, получим следующую функцию: $F_q(u,v) = \min\left\{F_{qj}(u,v), j \in I_\lambda\right\}$, $F_q(u,v)\big|_{u=u^0} = \Phi_q(u^0,v)$. Легко видеть, что если $F_q(u^*, v^*) \geq 0$, то $\Omega \bigcap h(u^*,\gamma) = \varnothing$. Принимая во внимание (3), положив $v = 0$, построим Γ-функцию (функцию покрытия) [7]: для множеств Ω и $h(u,\gamma)$

$$\Gamma(u,\gamma)=\begin{cases}\Gamma_1(u,\gamma),\text{åñëè}\ \ u\in R_1^{3n},\\ \Gamma_2(u,\gamma),\text{åñëè}\ \ u\in R_2^{3n},\\ \dots\\ \Gamma_\eta(u,\gamma),\text{åñëè}\ \ u\in R_\eta^{3n},\end{cases}\tag{6}$$

Таким образом, если найдется вектор $u^*\in R^{3n}$ такой, что $\Gamma(u^*,\gamma)\ge 0$, то $\Omega\bigcap \operatorname{int} h(u^*,\gamma)=\varnothing$.

5. Некоторые особенности Γ-функции покрытия

Теорема 2. [5]. $\Gamma(u,\gamma)$ - кусочно-линейная функция, претерпевающая разрыв I рода при $u\in\bigcup\limits_{q=2}^{9}\bigcup\limits_{i>j=1}^{n}\left(frR_{ij}^{1}\bigcap frR_{ij}^{q}\right)$.

Оценка числа функций, описывающих $\Gamma(u,\gamma)$ имеет вид [5]: $\theta=\sum\limits_{q=1}^{\eta}\varphi_q N_q$, где

$$\varphi_q=\sum_{\delta=1}^{12}\mu_{q2\delta}+\sum_{\delta=1}^{8}\mu_{q3\delta}+\sum_{\delta=1}^{6}\mu_{q4\delta}+\sum_{\delta=1}^{3}\mu_{q5\delta}+\mu_{q1},$$

$$N_q\le N=\vartheta_1^{\mu_{é1}}\cdot\prod_{\delta=1}^{12}\vartheta_{2\delta}^{\mu_{q2\delta}}\cdot\prod_{\delta=1}^{8}\vartheta_{3\delta}^{\mu_{q3\delta}}\cdot\prod_{\delta=1}^{6}\vartheta_{4\delta}^{\mu_{q4\delta}}\cdot\prod_{\delta=1}^{3}\vartheta_{5\delta}^{\mu q5\delta},\ \mu_{q2\delta},\mu_{q3\delta},\mu_{q4\delta},\mu_{q5\delta},\mu_{q1}$$

– число базовых множеств $C_\delta^0,\tilde{N}_\delta^2,\tilde{N}_\delta^3,\tilde{N}_\delta^4,\tilde{N}_\delta^5,C^1$, участвующих в формировании множества $H(u^0,\gamma)$, $\vartheta_{j\delta}$ – число функций, участвующих в формировании Φ-функций для $\tilde{N}_\delta^j$ и Ω, $j=1,2,3,4,5$.

Тогда, если $\Gamma(u^*,\gamma)<0$, то (2) не выполняется, если $\Gamma(u^*,\gamma)\ge 0$, то (2) выполнено и u^* - искомый вектор параметров размещения.

6. Математическая модель задачи покрытия

Таким образом, решение задачи 2 сводится к решению последовательности задач линейного программирования:

$$\min_{\Gamma_q(u^*,\gamma)\ge 0}\gamma\ ,\ \text{где}\ \Gamma_q(u^*,\gamma)=\max_{u\in R_q^{3n}}\Gamma_q(u,\gamma),\ q\in Q.\tag{7}$$

Для решения задачи $\max\limits_{u\in R_q^{3n}}\Gamma_q(u,\gamma)$ строится дерево решений. Каждой p-ой концевой вершине этого дерева соответствует функция $\Gamma_{qp}(u,\gamma),\ u\in R_q^{3n}, p\in\{1,2,..,N_q\}$.

Поскольку задача (7) является многоэкстремальной, NP-полной и NP-трудной [8], то, в общем случае, в настоящее время глобального максимума можно достичь только теоретически.

Для поиска приближения к глобальному максимуму используется стратегия, изложенная в [9, 10].

7. Выводы по результатам

Построена математическая модель с кусочно-линейной функцией цели и невыпуклой областью допустимых решений, граница которой описывается линейными функциями. Исследованы основные особенности предложенной модели. Решение поставленной задачи покрытия сведено к решению последовательности задач линейного программирования.

Пример. Пусть задана двухсвязная многогранная область Ω, представленная объединением выпуклых многогранников $\Omega_j, j=1,2,...,7$. Полагаем, что Ω_j задается последовательностью вершин $\{v_{jt}, t=1,2,..,\varpi_j\}$, координаты которых приведены в табл.

Таблица 1. Вершины покрываемого многогранника

j	v_{j1}	v_{j2}	v_{j3}	v_{j4}
Ω_1	$(-100,-110,0)$	$(-180,0,0)$	$(-130,-100,0)$	$(-140,0,120)$
Ω_2	$(-130,60,0)$	$(-160,-110,0)$	$(-10,130,0)$	$(-100,100,100)$
Ω_3	$(-60,-120,0)$	$(100,100,0)$	$(150,130,0)$	$(70,120,120)$
Ω_4	$(50,120,0)$	$(150,100,0)$	$(170,40,0)$	$(130,90,110)$
Ω_5	$(150,80,0)$	$(180,-30,0)$	$(110,-140,0)$	$(150,-30,140)$
Ω_6	$(-110,-140,0)$	$(90,-15,0)$	$(140,-100,0)$	$(80,-130,150)$
Ω_7	$(-10,-150,0)$	$(-110,-70,0)$	$(-150,-110,0)$	$(-70,-120,110)$

Заданное количество параллелепипедов $n=13$, исходные метрические характеристики: $a=4.1$, $b=1.8$, $c=3.2$ (полудлина, полуширина и полувысота параллелепипеда соответственно). Вектор $u^0 = ((70,30,10),(40,43,51),(91,30,17),(41,81,36),(71,98,77),(31,19,33),(52,20,97),$ $(31,58,12),(97,31,87),(103,55,97),(99,17,11),(56,62,87),(77,80,70))$ соответствует начальному размещению параллелепипедов $P_i, i=1,2,..,13$.

Искомый вектор параметров размещения, удовлетворяющий условию покрытия (2) –

$$u^* = ((120,-29,65),(48,-127,75),(-135,-70,47),(-101,91,56),(88,93,70),(131,11,75),$$
$$(-38,-114,68),(-90,-94,60),(-117,8,70),(17,121,133),(149,-68,44),(144,50,150),$$
$$(-38,-114,68),(-90,-94,60),(-117,8,70),(17,121,133),(149,-68,44),(144,50,150),(-104,-103,119)),$$

при этом коэффициент гомотетии $\gamma=2.345$, то есть минимальные размеры параллелепипедов, обеспечивающие покрытие исходного множества составляют: $a=9.6145$, $b=4.221$, $c=7.504$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cao An Wang, Bo-Ting Yang, Binzhai Zhu. On some polyhedra covering problems //Journal of Combinatorial Optimization. 2000. № 4. - P.437-447.
2. England B., Daniels K. A partition-based heuristic for translational box covering // Proceedings of the 12th WSEAS international conference on Computers “Recent advances in Computer Engineering”. 2008. - P.542-550.
3. Александрян Г. А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. – Москва: Высш. шк., 1979. 336 с.
4. Сосюрка Е.С. Аналитическое описание взаимного расположения прямых парллелепипедов в задаче покрытия компактного многогранного множества // Вестник Харьковского национального университета. – 2008. № 833. - С.247-257.
5. Сосюрка Е.С. Построение гамма-функции и ее использование для решения задачи покрытия компактного многогранного множества набором прямых параллелепипедов// Вестник Харьковского национального университета. 2009. № 847. - С.314-323.
6. Stoyan Yu. G. Ф-function and its basic properties // Доп. НАН України. 2001. No 8. - С.112-117.
7. Stoyan Yu. Covering a polygonal region by a collection of various size rectangles // Пробл. машиностроения. 2007. Т. 10, No 2. - С.67-82.
8. Пападимитриу Х., Стайнглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. – М.: Мир, 1985. 512 с.
9. Романова Т.Е., Кривуля А.В., Злотник М.В. Трансляционное прямоугольное покрытие // Доп. НАН Украины. 2008. No 7. - С. 48-53.
10. Романова Т.Е., Кривуля А.В., Злотник М.В. Математическая модель и метод решения задачи покрытия многоугольной области прямоугольными объектами // Пробл. машиностроения. 2008. Т. 11, No 3. - С.58-67.

Надійшла - 29.09.2010.